

Exercice 1

Dans tout cet exercice, les trajectoires des planètes sont considérées comme circulaires. On précise qu'il faut 8,3 minutes à la lumière émise par le soleil pour atteindre la terre. La constante de gravitation universelle vaut $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$.

- Proposer des valeurs pour le rayon et la masse de la terre, en déduire sa masse volumique moyenne.
- Sachant que la période de révolution de mars autour du soleil est de 1,9 ans, calculer sa distance par rapport au soleil.
- La terre et mars sont en opposition lorsque le soleil, la terre et mars sont approximativement alignés, dans cet ordre. Quelle est la période de ce phénomène ?
- Lors de l'opposition on voit mars, depuis la terre, sous un diamètre apparent de 18,2 secondes d'arc. Calculer son diamètre.
- Le satellite naturel de mars Deimos gravite sur une orbite sensiblement circulaire, à une distance de 24000 km du centre de mars et avec une période de 30 h et 20 mn. Calculer la masse de mars et en déduire sa masse volumique moyenne. Comparer avec celle de la terre.

1. $R_T = 6400 \text{ km}$. $M_T = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$. $\mu = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$ A.N : $\mu = 5500 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

2. Troisième loi de Kepler : $\frac{T_M^2}{\pi^3} = \frac{T_T^2}{\pi^3} \Rightarrow \pi_M = \pi_T \left(\frac{T_M}{T_T} \right)^{2/3}$

A.N : $\pi_T = c \cdot \Delta t = 3 \cdot 10^8 \times 8,3 \times 60 = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$

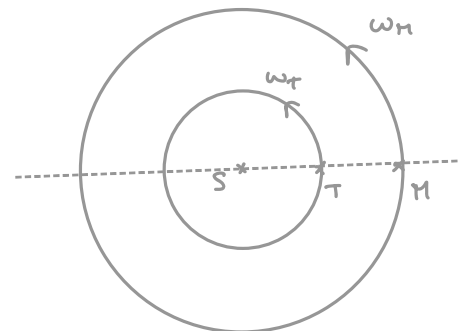
et $\pi_M = 1,5 \cdot 10^{11} \times 1,9^{2/3} \Rightarrow \pi_M = 2,3 \cdot 10^{11} \text{ m}$ distance soleil - mars

3. On se place dans le référentiel (R_M) dans lequel mars est immobile.
Alors, dans ce référentiel, la terre tourne à la vitesse angulaire $\omega_{T/M} = \omega_T - \omega_M$

$\Rightarrow \omega_{T/M} = \frac{2\pi}{T_T} - \frac{2\pi}{T_M} = 2\pi \cdot \frac{T_M - T_T}{T_M \cdot T_T}$

La terre fait, dans ce référentiel, un tour en un temps $T_{T/M} = \frac{2\pi}{\omega_{T/M}} = \frac{T_M \cdot T_T}{T_M - T_T}$

A.N : $T_{T/M} = 2,1 \text{ an}$



4. Lors d'une opposition, la distance terre-mars vaut $d_{TM} = \pi_M - \pi_T = 8 \cdot 10^{10} \text{ m}$

$\alpha = \frac{D}{d_{TM}}$ $\alpha = 18,2 \times \frac{1}{3600} \times \frac{2\pi}{360} = 8,8 \cdot 10^{-5} \text{ rad}$
valeur en °
valeur en rad



A.N : $D = 7 \cdot 10^6 \text{ m}$ (donc rayon de 3500 km, environ 2 fois + petit que la terre)

5. Troisième loi de Kepler avec mars comme attracteur : $\frac{T_{\text{deimos}}^2}{\pi_{\text{deimos}}^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{\text{mars}}}$

A.N : $M_{\text{mars}} = 6,4 \cdot 10^{23} \text{ kg}$ ($\sim 1/10$ masse de la terre). A.N : $\mu_{\text{mars}} = 3800 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

Exercice 2

Une météorite arrive au voisinage de la terre avec une vitesse « à l'infini » v_0 et un paramètre d'impact b . Le référentiel géocentrique est considéré comme galiléen, et on néglige le frottements avec l'atmosphère (la météorite passe suffisamment loin de la terre...).

On prendra numériquement : $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$; $m = 10^5$ kg; $M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg; $v_0 = 10^4$ m/s et $b = 10^7$ m.

1. Est-ce un état lié ou un état de diffusion ? Quelle est la nature de la trajectoire ? Faire un schéma.
2. Calculer la distance minimale entre la météorite et le centre de la terre.

$$1. \quad e_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{G M_T m}{r}$$

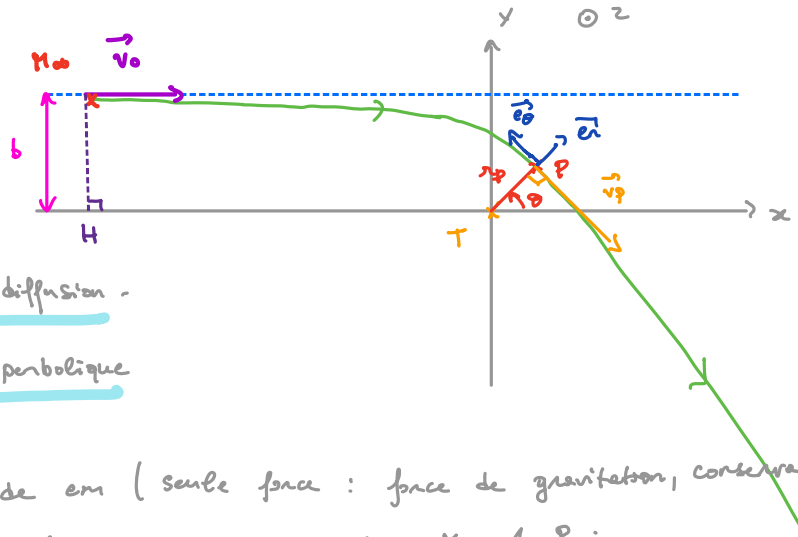
dans la situation initiale,

$v = v_0$ et $r \rightarrow \infty$

$$\text{donc } e_m = \frac{1}{2} m v_0^2$$

donc $e_m > 0$: c'est un état de diffusion.

la trajectoire est hyperbolique



2. On exploite la conservation de e_m (seule force : force de gravitation, conservative) et celle du moment cinétique (force centrale) entre M_0 et P :

$$e_{m0} = e_{mp} \quad \text{donne} \quad \boxed{\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_p^2 - \frac{G M_T m}{r_p}} \quad (1)$$

Pour le moment cinétique (par rapport à T) :

$$\vec{L}_{T0} = m \vec{T M_0} \wedge \vec{v_0} \quad \text{et on décompose } \vec{T M_0} = \vec{T H} + \vec{H M_0}$$

$$\text{D'où } \vec{L}_{T0} = m (\vec{T H} + \vec{H M_0}) \wedge \vec{v_0} = m \vec{H M_0} \wedge \vec{v_0} \quad (\text{car } \vec{T H} \parallel \vec{v_0})$$

$$\text{Et donc } \vec{L}_{T0} = m (b \vec{e_y}) \wedge (v_0 \vec{e_x}) = -m b v_0 \vec{e_z}$$

$$\vec{L}_{Tp} = m \vec{T P} \wedge \vec{v_p} = m (r_p \vec{e_r}) \wedge (-v_p \vec{e_\theta}) = -m r_p v_p \vec{e_z}$$

$$\text{Alors } \vec{L}_{T0} = \vec{L}_{Tp} \quad \text{donne : } \boxed{m b v_0 = m r_p v_p} \quad (2)$$

en effet : $\vec{v} = \dot{r} \vec{e_r} + r \dot{\theta} \vec{e_\theta}$
 en général, mais en P
 (point de la trajectoire le + proche de T) r est
 extrême et donc $\dot{r} = 0$
 $\Rightarrow \vec{v_p} = r \dot{\theta} \vec{e_\theta}$

Si on note $v_p = \|\vec{v_p}\|$,

$$\text{on a } \vec{v_p} = -v_p \vec{e_\theta}$$

$$\text{car } \dot{\theta} < 0$$

En combinant (1) et (2) de manière à éliminer v_p , on obtient

l'équation vérifiée par r_p :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m \left(\frac{b v_0}{r_p} \right)^2 - \frac{G M_T m}{r_p} \quad \text{soit} \quad r_p^2 v_0^2 = b^2 v_0^2 - 2 G M_T r_p$$

$$\text{soit } r_p^2 + \frac{2 G M_T}{v_0^2} r_p - b^2 = 0$$

$$\text{solution : } \boxed{r_p = -\frac{G M_T}{v_0^2} + \sqrt{\frac{G M_T}{v_0^2} + b^2}}$$

on garde la solution
positive !

Exercice 3

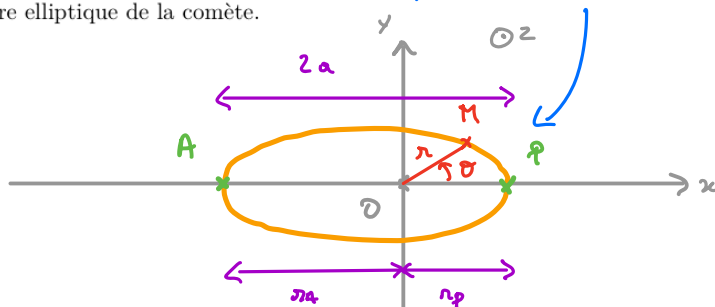
La comète de Halley décrit autour du soleil une orbite elliptique avec une période $T = 76$ ans. La plus courte distance au soleil (périgée) est de 88 millions de km. La terre, elle, décrit une orbite quasi-circulaire de rayon 150 millions de km en 1 an.

Pour une orbite elliptique, les coordonnées polaires (r, θ) suivent l'équation :

$$r = p / (1 + e \cos(\theta))$$

1. Calculer les valeurs du 1/2 grand axe et de l'excentricité de la trajectoire elliptique de la comète.
2. Calculer les vitesses au périgée et à l'apogée

l'allure réelle de la trajectoire de la comète est "beaucoup plus elliptique"



1. Pour calculer le 1/2 grand axe, on utilise la 3^e loi de Kepler :

$$\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \quad \text{donc} \quad a_H = a_T \cdot \left(\frac{T_H}{T_T} \right)^{2/3}$$

pour la comète de Halley

pour la terre

$$\text{A.N. : } a_H = 1,5 \cdot 10^{11} \cdot \left(\frac{76}{1} \right)^{2/3} = 2,69 \cdot 10^{12} \text{ m}$$

comme c'est un rapport, on peut laisser les périodes en années !

Pour calculer l'excentricité, on reprend l'équation polaire de la trajectoire : $r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$

Au point P, $\theta = 0$, et donc $r_P = \frac{p}{1+e}$ $r_P = 8,8 \cdot 10^{10} \text{ m}$

Au point A, $\theta = \pi$, et donc $r_A = \frac{p}{1-e}$

en 3^e, c'est $\cos(\theta - \theta_0)$, ici on a choisi $\theta_0 = 0$

on voit facilement que $r_P + r_A = 2a$, ce qui donne $\frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = 2a$,

$$\text{soit} \quad \frac{p(1-e) + p(1+e)}{(1+e)(1-e)} = 2a \Rightarrow \frac{2p}{(1+e)(1-e)} = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{p}{(1+e)(1-e)}}$$

On combine cette relation avec $r_P = \frac{p}{1+e}$; $a = \frac{r_P}{1-e}$, donc $e = 1 - \frac{r_P}{a}$

$$\text{A.N. : } e = 0,967$$

2. On utilise $e_m = \frac{h}{2a} = -\frac{GM_S}{2a}$

$$\text{et comme } e_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_S}{r}, \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{GM_S}{r} = -\frac{GM_S}{2a}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{v = \sqrt{GM_S \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}}$$

A.N. : on peut déduire GM_S de $\frac{T_T^2}{a_T^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$; $GM_S \approx 1,3 \cdot 10^{20} \text{ s}^2$

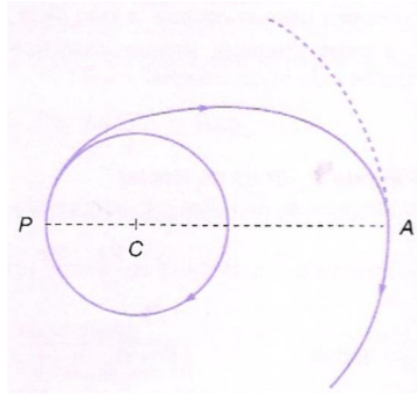
on peut calculer r_A par $r_A = 2a - r_P$: $r_A = 5,3 \cdot 10^{12} \text{ m}$

$$\underline{v_P = 55 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \quad \text{et} \quad \underline{v_A = 910 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Rem : La valeur de v_A est délicate, car $2/a$ et $1/a$ sont très proches : c'est très sensible aux arrondis. Ayant déjà v_P , on peut plutôt faire $r_A v_A = r_P v_P$, conséquence de la conservation du moment cinétique (en P et A, r est extrême, donc $\dot{r} = 0$, donc $\vec{v} \perp \vec{or}$)

Exercice 4

On souhaite transférer un satellite d'une orbite circulaire de rayon $r_1 = 10000$ km à une autre orbite circulaire de rayon $r_2 = 15000$ km. Pour cela, en un point P de l'orbite inférieure, on lui communique (par l'intermédiaire des fusées du satellite) une vitesse supplémentaire colinéaire à la vitesse déjà existante. La trajectoire est alors elliptique (le point P est le périégée de l'ellipse), jusqu'à un point A (apogée de l'ellipse, donc une 1/2 ellipse "plus tard » ..) où l'on communique à nouveau une vitesse supplémentaire au satellite, lui faisant retrouver une orbite circulaire.

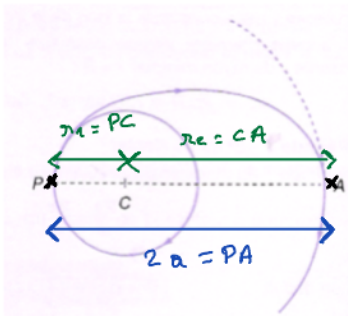


1. En utilisant la conservation de l'énergie mécanique montrer que, au cours du mouvement elliptique :

$$v^2 = (K/m)(1/a - 2/r)$$

2. Déterminer les vitesses en P juste avant et juste après l'apport de vitesse
3. Même question au point A.
4. Commenter les variations d'énergie mécanique au cours de cette opération.
5. Combien de temps dure le transfert ?

1.



$$\begin{aligned} 2a &= r_1 + r_2 \\ a &= 12500 \text{ km} \\ &= 1,25 \cdot 10^7 \text{ m} \end{aligned}$$

1. cf cours. On utilise $em = \frac{K}{2a}$ et $em = ec + ep = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{K}{r}$

$$\text{On a alors: } \frac{1}{2}mv^2 = \frac{K}{2a} - \frac{K}{r} = \frac{K}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)$$

$$\text{et donc } v^2 = \frac{K}{m} \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{r} \right)$$

$$\text{et avec } K = -GmM_T : v^2 = G M_T \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

2. Au point P: - avant l'apport de vitesse; on est sur la trajectoire circulaire, $em = \frac{K}{2r}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } ec &= em - ep \\ &= \frac{K}{2r} - \frac{K}{r} = -\frac{K}{2r} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{K}{2r} = \frac{GmM_T}{2r}$$

$$\text{et donc } v^2 = \frac{G M_T}{r}$$

$$\text{A.N: } v_p = \sqrt{\frac{G M_T}{r_1}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \times 6 \cdot 10^{24}}{10^7}}$$

$\Rightarrow v_p \approx \sqrt{40} \times 10^3 \approx 6,3 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

- après l'apport de vitesse: on est sur la trajectoire elliptique - on utilise l'expression trouvée au 1) : $v_p' = \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_1} - \frac{1}{a} \right)}$

A.N. : $v_p' = 6,9 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$

3. Au point A :

- juste avant l'apport de vitesse: trajectoire elliptique

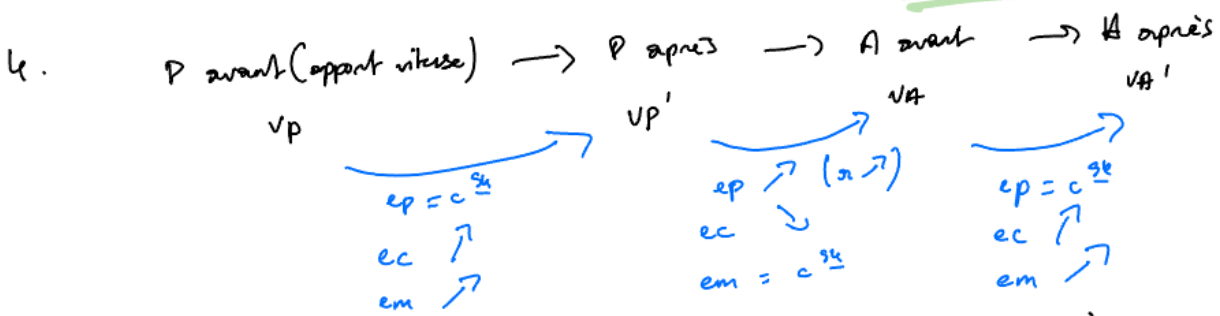
$$v_A = \sqrt{GM_T \left(\frac{2}{r_2} - \frac{1}{a} \right)}$$

A.N. : $v_A = 4,6 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

- juste après l'apport de vitesse:
circulaire r_2

$$v_A' = \sqrt{\frac{GM_T}{r_2}}$$

A.N. : $v_A' = 5,2 \cdot 10^3 \text{ m.s}^{-1}$



5. 3^e loi de Kepler (on connaît a et on cherche T)

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{donc} \quad T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_T}}$$

et $t_{\text{transfert}} = \frac{T}{2}$ (1/2 ellipse ...)

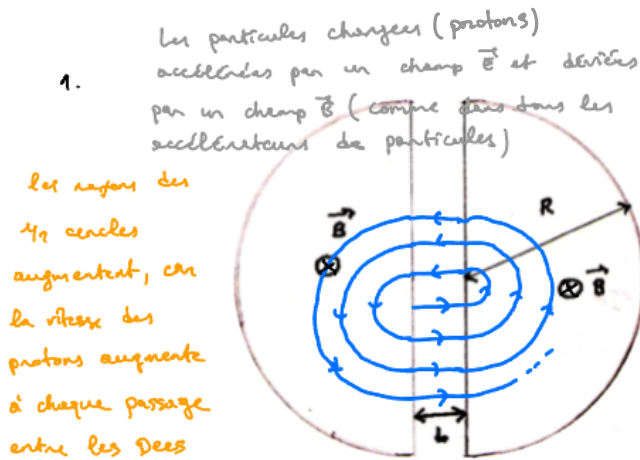
A.N. : $t_{\text{transfert}} \approx 6940 \text{ s}$ ($\approx 1 \text{ h } 55 \text{ min}$)

Exercice 5

Un cyclotron a pour but d'accélérer des particules chargées avec un encombrement minimal. Il est constitué (schéma page suivante) de deux demi-cylindres (appelés Dees) où règne un champ magnétique constant et uniforme. Entre les Dees, sur une largeur L très inférieure au rayon R des Dees, on applique une ddp alternative $u(t) = U_m \cos(\omega t)$.

1. Donner une explication qualitative du fonctionnement du Cyclotron.
2. En admettant que le temps de passage d'un proton entre les Dees est très inférieur à la période de la ddp, quelle est l'énergie cinétique acquise à chaque passage ?
3. Quelle est la trajectoire d'un proton dans un Dee ? Quel temps met-il pour ce parcours ? Ce temps dépend-il de sa vitesse ? AN.
4. Quelle doit-être la période de la ddp alternative ?
5. Quelle est la vitesse des protons maximale pour ce cyclotron ? En combien de 1/2 tours sera-t-elle atteinte ?

Données : $R = 0,5 \text{ m}$; $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $U_m = 100 \text{ kV}$ et $B = 2 \text{ T}$.



Dans chaque Dee (1 Dee est un demi-cylindre dans lequel règne un champ magnétique constant et uniforme), les protons ont une trajectoire en 1/2 cercle. Entre les Dees, ils sont accélérés par un champ électrique qui change périodiquement de sens, de manière à ce que les protons soient accélérés à chaque passage.

2) $\Delta \epsilon = W(\vec{F}_e) = q(\Delta V) = e U_m$

3) 1/2 cercle $t_{1/2} = T/2$ avec $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{eB}$ donc $t_{1/2} = \frac{\pi m}{eB}$

A.N : $t_{1/2} = 1,64 \cdot 10^{-8} \text{ s}$ ($\sim 16 \text{ ns}$) indépendante de la vitesse

4) $T_{\text{alternative}} = 2 t_{1/2} \dots$

5) La vitesse est limitée par le rayon : $R = \frac{mv}{eB}$, donc $v_{\text{max}} = \frac{eB R_{\text{max}}}{m}$

A.N : $v_{\text{max}} = 9,6 \cdot 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

A chaque passage on gagne $e U_m$ d'énergie cinétique, il faut donc $N = \frac{e v_{\text{max}}^2}{2 e U_m}$

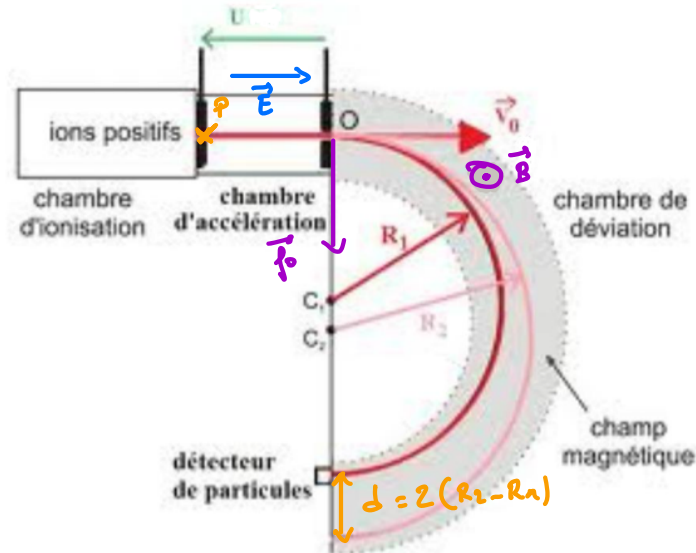
A.N : $N \approx 479$ passages.

$\downarrow$
 ~ 240 tours

Exercice 6

Le but d'un spectrographe de masse est de séparer des ions appartenant à différents isotopes d'un même élément. Les cations qui pénètrent dans la chambre d'accélération sont ici ${}^6_3\text{Li}^+$ et ${}^7_3\text{Li}^+$. La tension accélératrice vaut $U = 10\text{kV}$ et l'intensité du champ magnétique est $B = 0,2\text{ T}$.

1. Expliquer le principe et préciser le signe de U ainsi que la direction et le sens de $\vec{B}$.
2. Quelle distance sépare ${}^6_3\text{Li}^+$ et ${}^7_3\text{Li}^+$ quant ils arrivent sur le détecteur ?



1. Les particules à accélérer sont chargées $\oplus$, donc il faut un champ $\vec{E}$ de P vers O et comme $\vec{E}$ est dirigé vers les potentiels décroissants ($\vec{E} = -\vec{\text{grad}}(V)$), il faut $V_P > V_O$ donc $U > 0$.
Au point O, on veut une force $\vec{f}_0$ dirigée vers le bas (mouvement circulaire, la force doit être dirigée vers le centre). Or, $\vec{f}_0 = q \vec{v}_0 \wedge \vec{B}$ donc $\vec{B}$ est $\odot$.
2. On voit sur le schéma que $d = 2(R_2 - R_1)$.
En notant m_1 la masse des ${}^6\text{Li}$ et v_1 leur vitesse à sortie de la chambre d'accélération ; m_2 et v_2 pour les ${}^7\text{Li}$: $R_1 = \frac{m_1 v_1}{eB}$ et $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{m_1}} \Rightarrow R_1 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_1 U}{e}}$
et $R_2 = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2m_2 U}{e}}$
D'où $d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2U}{e}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$ et comme $m_2 = 7m$ et $m_1 = 6m$, où m est la masse d'un nucléon, on obtient $d = \frac{2}{B} \sqrt{\frac{2mU}{e}} (\sqrt{7} - \sqrt{6})$
A.N : $m = 1,67 \cdot 10^{-27}\text{ kg}$ et $e = 1,6 \cdot 10^{-19}\text{ C}$. $d = 2,86\text{ cm}$

Exercice 7

On considère une particule chargée soumise à l'action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique constants et uniformes, orthogonaux entre eux. Quel est le mouvement d'une particule chargée initialement immobile ?

On écrit l'équation du mouvement en cartésiennes :

$$m \vec{a} = q \vec{E} + q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{E} = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} v_y \\ v_z \\ v_x \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B v_y \\ -B v_x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les projections donnent :

$$\begin{cases} m \dot{v}_x = q E + q B v_y & (1) \\ m \dot{v}_y = -q B v_x & (2) \\ m \dot{v}_z = 0 & (3) \end{cases}$$

(3) donne $v_z = 0$ puis $z = 0 \Rightarrow$ mouvement plan dans le plan (Oxy)

(1) et (2) sont des équ. diff. couplées, on commence par poser $\omega_c = \frac{qB}{m}$ et $v_0 = \frac{E}{B}$

Alors :

$$\begin{cases} \dot{v}_x = \omega_c v_0 + \omega_c v_y & (1) \\ \dot{v}_y = -\omega_c v_x & (2) \end{cases}$$

on voit que E/B a la dimension d'une vitesse

Pour résoudre, on peut utiliser une variable complexe $u = v_x + i v_y$:

$$\dot{u} = \dot{v}_x + i \dot{v}_y = \omega_c v_0 + \omega_c v_y + i(-\omega_c v_x) = \omega_c v_0 - i \omega_c (v_x + i v_y) = \omega_c v_0 - i \omega_c u$$

D'où $\dot{u} + i \omega_c u = \omega_c v_0$

Solutions : $u = \underbrace{\lambda e^{-i \omega_c t}}_{Sh} + \underbrace{-i v_0}_{sp}$ et $u(t=0) = 0 \Rightarrow 0 = \lambda - i v_0 \Rightarrow \lambda = i v_0$

D'où $u = i v_0 (e^{-i \omega_c t} - 1) \Rightarrow \begin{cases} v_x = \operatorname{Re}(u) = v_0 \sin(\omega_c t) \\ v_y = \operatorname{Im}(u) = v_0 (\cos(\omega_c t) - 1) \end{cases}$

D'où, en intégrant et puisque l'on part du point O :

$$\begin{cases} x = \frac{v_0}{\omega_c} (-\cos(\omega_c t) + 1) \\ y = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t) - v_0 t \end{cases}$$

Ce mouvement peut être interprété comme la superposition d'un mouvement rectiligne uniforme et d'un mouvement circulaire uniforme (comme le mouvement d'un point sur une roue de vélo). On l'appelle cycloïde -



Exercice 8

Une bille descend, à partir d'une vitesse initiale nulle, sur un plan incliné. On envisage deux cas :

- la bille glisse sans frottements
- la bille roule sans glisser

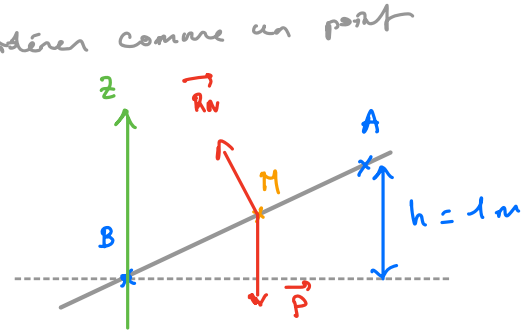
Que vaut, après que l'altitude a diminué de 1m , la vitesse de la bille dans chacun des deux cas ?

On donne le moment d'inertie d'une sphère de masse m et de R : $J = \frac{2}{5}mR^2$

- Si la bille glisse sans frottements, on peut la considérer comme un point matériel. Les 2 forces qui interviennent sont

$\vec{P}$ (conservative, $e_f = mgh$) et $\vec{R}_N$ (ne travaille pas).

$$\text{Donc } e_m = e_c + e_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = e_{\text{mec}}$$



D'où, appliqué entre A et B :

$$e_{cA} + e_{pA} = e_{cB} + e_{pB} \Rightarrow 0 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B \quad (e_{cA} = 0 \text{ car vitesse initiale nulle})$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 2gh(z_A - z_B) = 2gh \Rightarrow \underline{v_B = \sqrt{2gh}} \quad \text{A.N : } \underline{v_B = 4,5 \text{ m.s}^{-1}}$$

- Si la bille roule sans glisser, rien ne change sur le niveau de l'énergie potentielle (c'est le centre de la bille qui descend de $h = 1\text{m}$) mais l'énergie cinétique se décompose en 2 termes, associés respectivement à la translation et à la rotation :

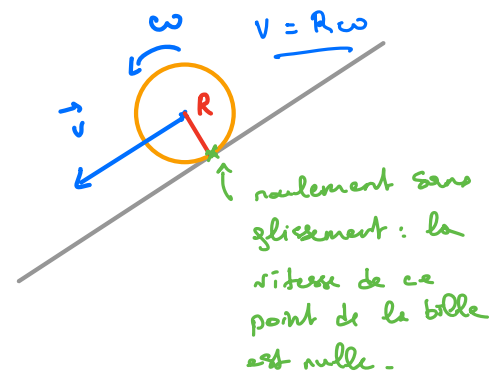
$$e_c = e_{\text{trans}} + e_{\text{rot}} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$\text{Or, } J = \frac{2}{5}mR^2 \text{ et } \omega = \frac{v}{R}, \text{ d'où :}$$

$$e_c = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{2}mv^2 \left(1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2}mv^2$$

Avec le même calcul que dans le 1^{er} cas, on obtient alors $\frac{7}{5} \cdot \frac{1}{2}v_B^2 = gh$

$$\Rightarrow v_B^2 = \frac{10gh}{7} \Rightarrow \underline{v_B = \sqrt{\frac{10gh}{7}}}$$



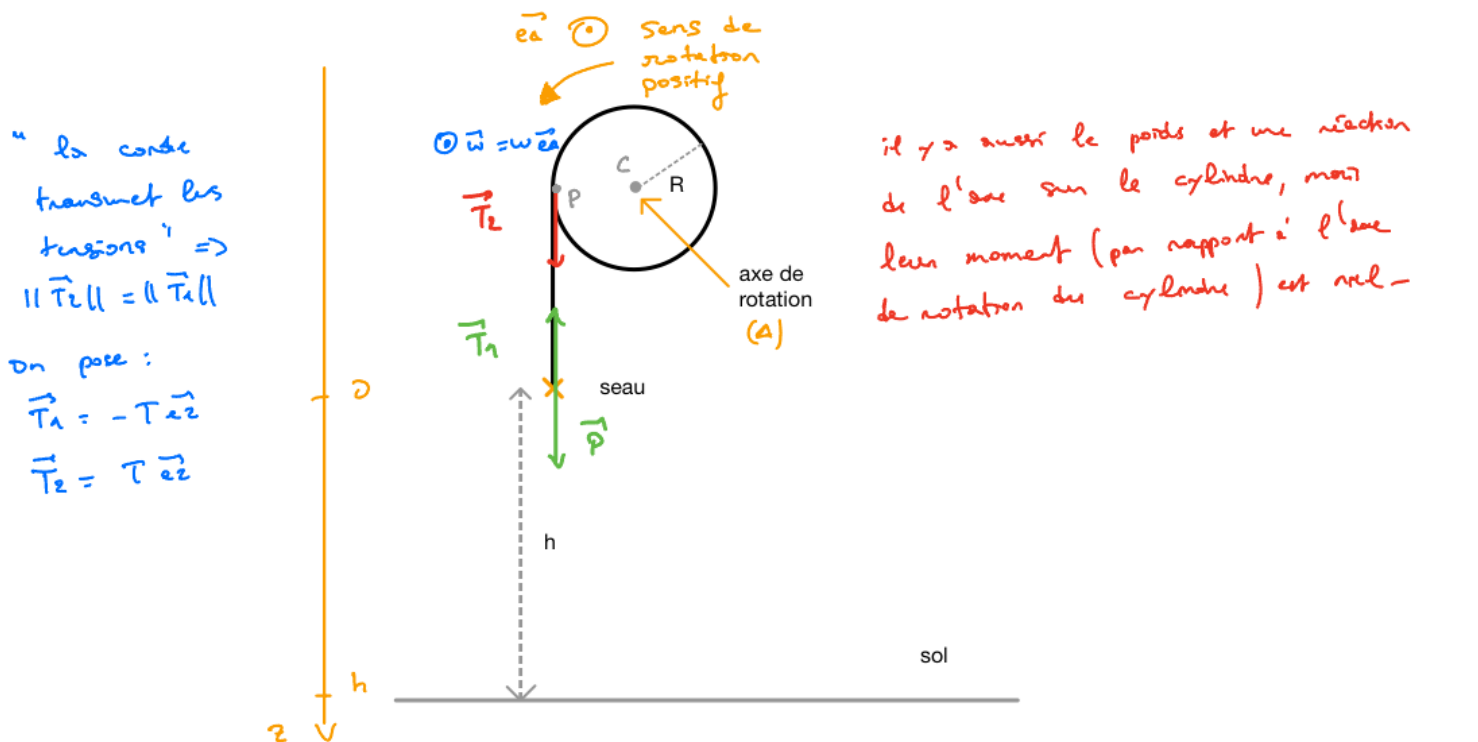
$$\text{A.N : } \underline{v_B = 3,8 \text{ m.s}^{-1}}$$

vitesse moins élevée que dans le 1^{er} cas car l'op "disponible" n'est pas entièrement convertie en ec translation, il y a aussi ec rotation

Exercice 9

Un seau est suspendu à une corde qui s'enroule sur un cylindre dont l'axe de rotation est horizontal. On note m_C et R la masse et le rayon du cylindre, l'expression de son moment d'inertie est $J = 1/2 m_C R^2$; la rotation s'effectue sans frottements. La corde est inextensible, et on néglige sa masse. On note m_S la masse du seau. On prend $m_C = 50\text{kg}$; $m_C = 10\text{kg}$ et $R = 20\text{cm}$.

Le seau chute sans vitesse initiale d'une hauteur $h = 50\text{m}$. Au bout de combien de temps et avec quelle vitesse touche-t-il le sol? Comparer avec le cas où il tombe en chute libre (sans être retenu par la corde).



1^{re} méthode : PFD + th moment cinétique

• PFD pour le seau : $m_S \vec{a} = \vec{P} + \vec{T}_1$

on projette : $m_S a_z = m_S g - T$ (1)

• th mc pour le cylindre : $\frac{dL_A}{dt} = M_A$

avec $L_A = J\omega$ et $M_A = (\vec{CP} \wedge \vec{T}_2) \cdot \vec{e}_z$

$(\vec{CP} \wedge \vec{T} \text{ est selon } \vec{e}_z) \Rightarrow = RT$

il n'y a que le moment de $\vec{T}_2$.
 il y a d'autres forces sur le cylindre (poids, réaction de l'axe), mais elles passent par l'axe de rotation et donc leur moment est nul.

à l'instant $J \frac{d\omega}{dt} = RT \quad (2)$

• En combinant (1) et (2), on obtient :

$$ms a_z = ms g - \frac{J}{R} \frac{d\omega}{dt}$$

Or, $v_z = R \omega$ (quand on tourne le cylindre d'un angle $d\theta$, le seau descend de $dz = R d\theta \Rightarrow v_z = R \omega$)
et donc $a_z = R \frac{d\omega}{dt}$

$$\text{donc } ms a_z + \frac{J}{R} \frac{a_z}{R} = ms g \Rightarrow a_z \left(ms + \frac{J}{R^2} \right) = ms g$$

$$\text{or, } J = \frac{1}{2} mc R^2, \text{ donc } \frac{J}{R^2} = \frac{mc}{2}$$

$$\text{finalement, } a_z = \frac{ms g}{ms + mc/2}$$

En intégrant, avec $v_z(t=0) = 0$ et $z(t=0) = h$, on obtient :

$$v_z = \frac{ms g}{ms + mc/2} t \quad \text{et} \quad z = \frac{ms g}{2ms + mc} t^2$$

Le seau touche le sol pour $z = h$, donc $t_1 = \sqrt{\frac{h(2ms + mc)}{ms g}}$

et sa vitesse est alors $v_1 = v_z(t_1) = \sqrt{\frac{2 h ms g}{ms + mc/2}}$

A.N : $t_1 = 5,9 \text{ s}$ $v_1 = 16,9 \text{ m.s}^{-1}$

Par comparaison, pour la chute libre :

$\hookrightarrow$ ça va évidemment plus vite que quand on doit entraîner le cylindre ---

$$\begin{cases} v_z = gt \\ z = \frac{1}{2}gt^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_1 = \sqrt{2gh} = 33 \text{ m.s}^{-1} \\ t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3,3 \text{ s} \end{cases}$$

2^e méthode : "méthode énergétique"

$$\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = 0$$

- en prenant comme système le seau + le cylindre (+ la corde qui les relie)
- pas de forces non conservatives

Donc, $e_m = e_{c\text{seau}} + e_{p\text{seau}} + e_{c\text{cylindre}}$ ($e_{p\text{cylindre}} = 0$ car elle ne vient pas, on peut la choisir nulle)

avec $e_{c\text{seau}} = \frac{1}{2} m_s v_z^2$

$e_{p\text{seau}} = -m_s g z$

$e_{c\text{cylindre}} = \frac{1}{2} J \omega^2 = \frac{1}{2} J \left(\frac{v_z}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m_c}{2} v_z^2$

donc $e_m = \frac{1}{2} \left(m_s + \frac{m_c}{2} \right) v_z^2 - m_s g z$

ainsi, $\frac{d e_m}{d t} = 0$ donc $\frac{1}{2} \left(m_s + \frac{m_c}{2} \right) \cdot 2 v_z \frac{d v_z}{d t} - m_s g \frac{d z}{d t} = 0$

$$\Rightarrow \left(m_s + \frac{m_c}{2} \right) \underbrace{\frac{d v_z}{d t}}_{= a_z} = m_s g \Rightarrow a_z = \frac{m_s g}{m_s + \frac{m_c}{2}}$$

On a bien retrouvé la même accélération qu'avec la première méthode - on conclut de la même manière ---