

Exercice 1

1. Donner un ordre de grandeur de la force électrique qui s'exercerait entre deux personnes se tenant à un mètre de distance l'une de l'autre si chacune, au lieu d'être parfaitement neutre électriquement, contenait un pour cent d'électrons de plus que de protons.

2. Dans une expérience célèbre, Millikan a pu maintenir immobiles de minuscules gouttelettes d'huile chargées grâce à un champ électrique (la force électrique compensant le poids). Sachant que le rayon des gouttelettes était de quelques dixièmes de micromètres, que la masse volumique de l'huile était voisine de celle de l'eau, et que chaque gouttelette ne comportait que quelques charges élémentaires en excès, de quel ordre était le champ électrique ?

3. Dans le modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène, l'électron suit une trajectoire circulaire de rayon 53pm (dans l'état fondamental, les états excités correspondent à des rayons supérieurs). Calculer la valeur du champ électrique ressenti par l'électron.

4. Calculer le flux du champ créé par une charge ponctuelle q à travers une surface carrée de côté a , la charge étant placée à une distance $a/2$ de son centre perpendiculairement à la surface.

1. Nombre de protons approximatif dans un être humain : $N \sim \frac{1}{2} \frac{60}{1,7 \cdot 10^{-27}} \sim 2 \cdot 10^{23}$ (kg)
 → masse humain (kg)
 → masse proton / neutron (kg)
 On a donc $\sim 2 \cdot 10^{26}$ électrons supplémentaires, donc une charge (en valeur absolue) égale à $q = Ne$
 Soit $q \sim 2 \cdot 10^7 \text{ C}$
 force de Coulomb : $f = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ donc $f \sim \frac{(2 \cdot 10^7)^2}{1^2} \cdot 10^{-10} \sim 5 \cdot 10^{25} \text{ N}$
 c'est plus que la force soleil → terre qui est de l'ordre de $4 \cdot 10^{22} \text{ N}$
 grossièrement la moitié de protons (et la moitié de neutrons)

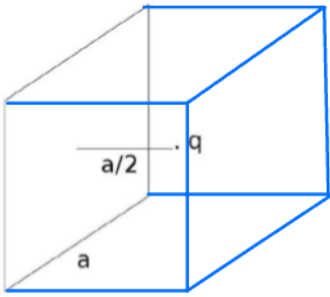
2. $\vec{f}_{el} = q\vec{E}$, donc il y a 2 possibilités :
 $\uparrow \vec{E}$ et $q > 0$
 (ou)
 $\downarrow \vec{E}$ et $q < 0$

$f_{el} = p$, donc $qE = \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) \rho$ avec $q \sim e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
 $\rho \sim 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
 $r \sim 10^{-7} \text{ m}$
 $g \sim 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

donc $E \sim \frac{10^3 \cdot 4 \cdot (10^{-7})^3 \cdot 10}{1,6 \cdot 10^{-19}} \sim 300 \text{ V/m}$

3. $E = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r^2}$ donc $E \sim \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{10}}{(5 \cdot 10^{-11})^2}$
 $\sim \frac{1,6 \cdot 10^{-9}}{25 \cdot 10^{-22}}$
 $\sim 6 \cdot 10^{11} \text{ V/m}$

4.



On complète le cube de manière à ce que q en soit le centre. Alors, par raisons de symétries, le flux est le même au travers de toutes les faces du cube, donc $\Phi_{\text{face}} = \frac{1}{6} \Phi_{\text{cube}}$

Mais le cube est une surface fermée, donc avec le th de Gauss : $\Phi_{\text{cube}} = \frac{q}{\epsilon_0}$

finallement, $\Phi_{\text{face}} = \frac{q}{6\epsilon_0}$

Exercice 2

On considère un cylindre infini de rayon R et d'axe (Oz) uniformément chargé avec une charge volumique ρ_0 :

$$\begin{cases} \rho = \rho_0 & \text{si } r \leq R \\ \rho = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier les symétries et invariances.
2. Calculer le champ électrique en tout point de l'espace.

C'est essentiellement une question de cours -

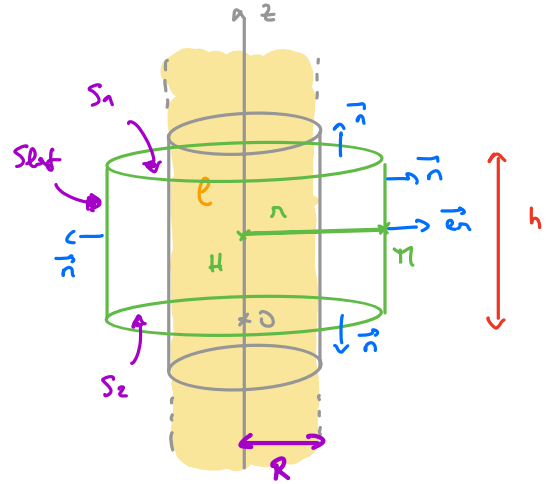
1. tout plan $\perp (Oz)$ et tout plan $\parallel (Oz)$ sont π pour les champs, donc pour $\vec{E}$ (ppc Cuié).

Donc $\vec{E}(r) = E(r) \vec{u}$

invariance translation $\vec{e}_z$ et rotation autour de (Oz)

$\Rightarrow E(r) = E(r)$

donc $\vec{E}(r) = E(r) \vec{e}_r$



2. On choisit comme surface de Gauss (fermée) un cylindre de hauteur h centré sur (Oz) , passant par M (donc de rayon r) fermé par 2 disques: $\Sigma = S_1 + S_2 + S_{lat}$

$$\begin{aligned} \Phi(\vec{E}/\Sigma) &= \underbrace{\Phi(\vec{E}/S_1)}_{=0} + \underbrace{\Phi(\vec{E}/S_2)}_{=0} + \Phi(\vec{E}/S_{lat}) \quad \text{et} \quad \Phi(\vec{E}/S_{lat}) = \iint_{S_{lat}} (\vec{E}(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_r) \\ &= E(r) \cdot \iint_{S_{lat}} dS \\ &= E(r) \cdot 2\pi r h \end{aligned}$$

car $\vec{E} \perp \vec{n}$
selon $\vec{e}_r$ selon $\vec{e}_z$

Pour la charge intérieure, on distingue 2 cas :

- Si $r \leq R$ (M à l'intérieur du cylindre chargé) : $Q_{int} = \rho_0 \cdot \underbrace{\pi r^2 h}_{\text{volume chargé à l'intérieur de } \Sigma}$

Alors $E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho_0 \cdot \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0}$

- Si $r > R$ (M à l'extérieur du cylindre chargé) : $Q_{int} = \rho_0 \cdot \pi R^2 h$

Alors $E(r) \cdot 2\pi r h = \frac{\rho_0 \cdot \pi R^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r}$

Finalement :

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r & \text{si } r \leq R \\ \frac{\rho_0 R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r & \text{si } r > R \end{cases}$$

Exercice 3

1. Donner l'expression du champ électrique créé par un « plan infini » uniformément chargé en surface (σ). Que vaut le champ en un point situé sur le plan des charges ($z = 0$) ?
2. Pour améliorer ce modèle, on considère que la charge est en fait uniformément répartie en volume (ρ) sur une petite épaisseur a . Quel est le lien entre ρ et σ ?
3. Calculer le champ électrique créé, en distinguant plusieurs cas.
4. Retrouve-t-on, à l'extérieur des charges, le même champ qu'avec la modélisation en surface ? Que vaut le champ en $z = 0$?

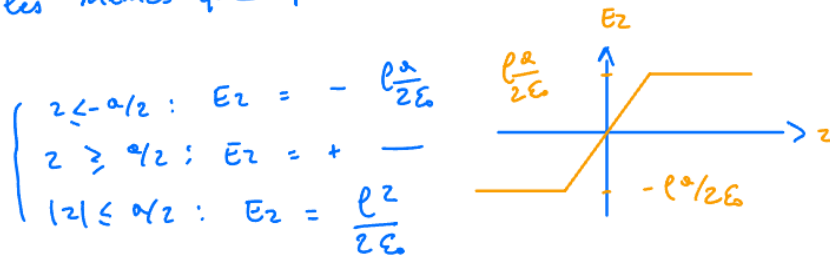
1. voir cours .

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{z} & \text{si } z > 0 \\ \vec{E} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{z} & \text{si } z < 0 \end{cases}$$

en $z = 0$, le champ n'est pas défini
(mais on peut raisonnablement prendre $\vec{E} = \vec{0}$, ce que confirme la suite)

2.  $\sigma = \rho a$ (voir cours)

3. Les symétries et invariances, ainsi que le choix de la surface de gauss (cylindre ou pavé, symétrique par rapport au plan des charges) sont exactement les mêmes que pour le plan de charges infini.



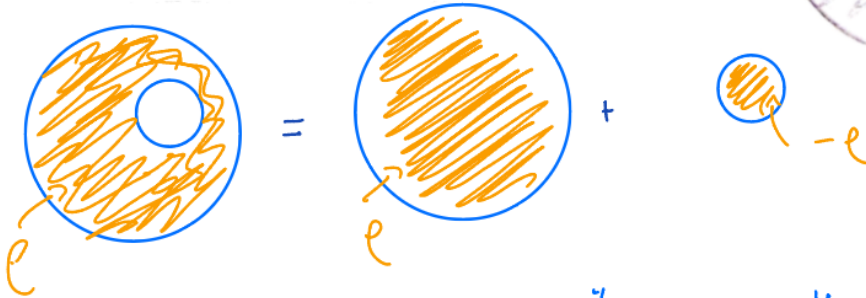
4. ou, via $\sigma = \rho a$. le champ est nul en $z = 0$ -

Exercice 4

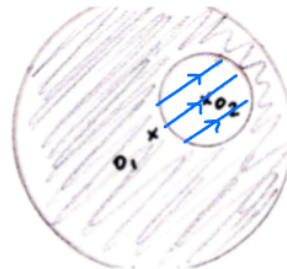
Une sphère de rayon a et de centre O_1 uniformément chargée en volume possède une cavité non chargée de rayon b et de centre O_2 (ρ n'est donc uniforme qu'à l'extérieur de la cavité). Calculer le champ dans la cavité.



On s'appuie sur le principe de superposition, en considérant la distribution de charges proposée comme la sphère de centre O_1 chargée $+q$ et celle de centre O_2 chargée $-q$.



A l'intérieur de la "petite sphère", on est "à l'intérieur" pour les deux distributions - $\vec{E}(r) = \rho \frac{\vec{O_1 r}}{3\epsilon_0} + (-\rho) \frac{\vec{O_2 r}}{3\epsilon_0} = \rho \frac{\vec{O_1 O_2}}{3\epsilon_0}$ (uniforme)



Exercice 5

1. Rappeler le théorème de Gauss pour la gravitation.
2. On assimile une planète à une sphère de masse volumique uniforme. Etudier les symétries et invariances.
3. Calculer le champ de gravitation à l'intérieur et à l'extérieur de la planète.
4. Comparer les champs de gravitation à la surface de la terre, mars et jupiter.

planète	mercure	venus	terre	mars	jupiter	saturne	uranus	neptune
Rayon ($\times 10^6$ m)	2,44	6,05	6,37	3,39	69,9	58,2	25,4	24,6
Masse ($\times 10^{24}$ kg)	0,328	4,87	5,97	0,639	1899	568	86,8	102

Le champ $\vec{g}$ créé à l'extérieur d'une distribution de masses à symétrie sphérique vaut $\vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$ donc $g = \frac{GM}{r^2}$.

En effet : $\vec{g}(r) = g(r) \vec{e}_r$ (symétries et invariances pour la symétrie sphérique) et on choisit comme surface de gauss une sphère de rayon r ($r \geq R$, où R est le rayon de la planète).

$$\Phi(\vec{g}/\Sigma) = \oint_{\Sigma} (g(r) \vec{e}_r) \cdot (dS \vec{e}_r) = 4\pi r^2 g(r)$$

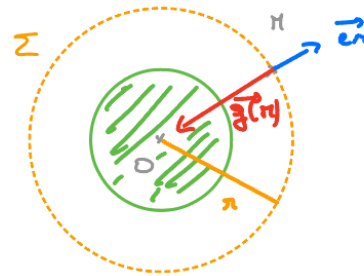
$$M_{int} = M \text{ (masse de la planète)}$$

$$\text{th de gauss : } \Phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}$$

$$\text{donc } 4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M, \text{ soit } g(r) = -\frac{GM}{r^2} \text{ et donc } \vec{g} = -\frac{GM}{r^2} \vec{e}_r$$

On trouve, en $m \cdot s^{-2}$ (ou $N \cdot kg^{-1}$...) les valeurs ci-dessous :

3,67 8,87 9,81 3,71 25,8 11,2 8,97 11,2



Exercice 7

Une planète de rayon R , de masse M et de centre O est composée d'un noyau liquide de masse volumique μ_0 uniforme et de rayon R_1 et d'une coque solide de masse volumique $\mu = \alpha r$ où α est une constante positive.

- 1) Exprimer la masse de la planète en fonction de R , R_1 , μ_0 et α .
- 2) Déterminer le champ de gravitation.

Exercice 6

Une planète de rayon R , de masse M et de centre O est composée d'un noyau liquide de masse volumique μ_0 uniforme et de rayon R_1 et d'une coque solide de masse volumique $\mu = \alpha r$ où α est une constante positive.

1. Exprimer la masse de la planète en fonction de R, R_1, μ_0 et α .
2. Déterminer le champ de gravitation.

1. $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 = \mu_0 \cdot \frac{4}{3} \pi R_1^3$ et $M_2 = 4\pi \int_{R_1}^R \underbrace{\mu(r)}_{\alpha r} r^2 dr$
 (noyau) (coque)

soit $M_2 = 4\pi \alpha \int_{R_1}^R r^3 dr = \frac{4\pi \alpha}{4} (R^4 - R_1^4)$

2. Symétrie sphérique $\Rightarrow g(r) = g_r(r) \vec{e}_r$
 sphère (O, r)

$\phi(\vec{g}/\Sigma) = 4\pi r^2 g_r(r)$

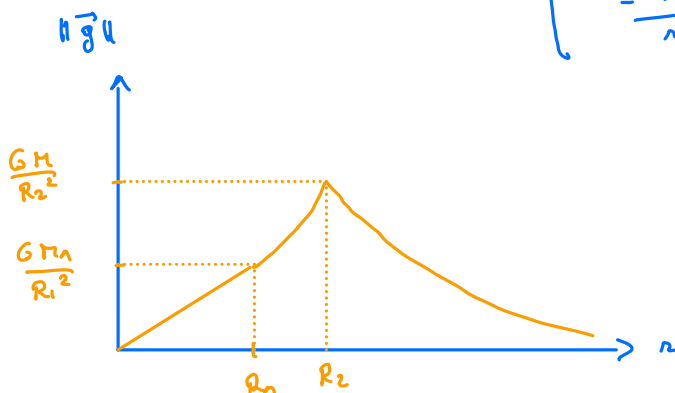
th de Gauss : $\phi(\vec{g}/\Sigma) = -4\pi G M_{int}$

$\Rightarrow g_r(r) = -\frac{G M_{int}}{r^2}$

avec $M_{int} = \begin{cases} r \leq R_1 : M_{int} = \mu_0 \cdot \frac{4}{3} \pi r^3 \\ R_1 \leq r \leq R : M_{int} = M_1 + \pi \alpha (r^4 - R_1^4) \\ r > R : M_{int} = M \end{cases}$

On obtient donc :

$$\vec{g}(r) = \begin{cases} -\frac{4\pi G \mu_0 r}{3} \vec{e}_r & \text{si } r \leq R_1 \\ -\frac{G}{r^2} (M_1 + \pi \alpha (r^4 - R_1^4)) \vec{e}_r & \text{si } R_1 \leq r \leq R \\ -\frac{G M}{r^2} \vec{e}_r & \text{si } r \geq R \end{cases}$$



Exercice 7

Déterminer la distribution de charge nécessaire pour avoir un champ électrique radial d'intensité constante à l'intérieur d'une sphère de rayon R .

Un champ radial (et dont la norme est indépendante de la direction) est associé à une symétrie sphérique - Donc la distribution de charges doit déjà être à symétrie sphérique -

On peut noter $\vec{E}(r) = E_0 \vec{e}_r$ (pour $r \leq R$).

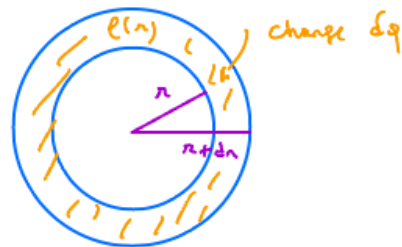
Le th de Gauss donne $Q_{\text{int}}(r) = 4\pi\epsilon_0 r^2 E_0$: charge contenue à l'intérieur d'une sphère de rayon r .

On considère ensuite la charge Δq contenue dans une coquille sphérique entre r et $r+dr$:

$$\Delta q = Q_{\text{int}}(r+dr) - Q_{\text{int}}(r)$$

et, en notant $\rho(r)$ la densité de charge entre r et $r+dr$ (que l'on peut considérer comme uniforme entre r et $r+dr$) :

$$\Delta q = \rho(r) \cdot \underbrace{4\pi r^2 dr}_{\text{volume de la coquille sphérique}}$$



$$\text{On a donc } Q_{\text{int}}(r+dr) - Q_{\text{int}}(r) = \rho(r) \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$\text{soit } \rho(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{Q_{\text{int}}(r+dr) - Q_{\text{int}}(r)}{dr}$$

$$= \frac{dQ_{\text{int}}}{dr}$$

$$\text{Or, } \frac{dQ_{\text{int}}}{dr} = 8\pi\epsilon_0 r E_0, \text{ donc } \rho(r) = \frac{8\pi\epsilon_0 r E_0}{4\pi r^2} \text{ et donc } \boxed{\rho(r) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r}}$$

Exercice 8

On modélise un nuage de surface $S = 2\text{km}^2$ et de hauteur $h = 8\text{km}$ par la distribution de charges suivante : la charge volumique ne dépend que de l'altitude z , et varie linéairement avec z , en vérifiant :

$$\begin{cases} \rho(z=0) = -\rho_0 \\ \rho(z=h) = \rho_0 \end{cases}$$

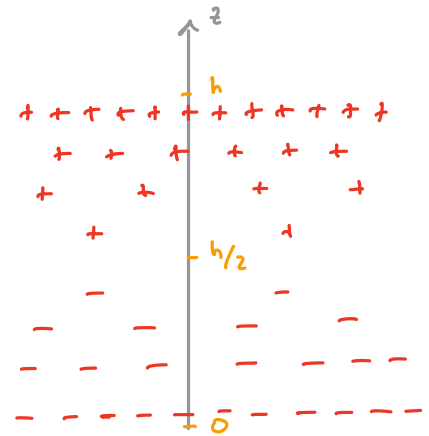
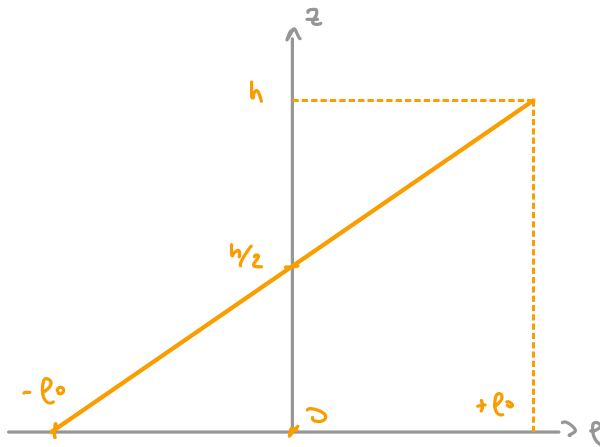
On néglige les effets de bord : on calcule le champ électrique comme si la distribution était infinie selon (Ox) et (Oy) . La base du nuage est en $z = 0$.

1. Faire un schéma indiquant sommairement comment sont réparties les charges positives et négatives dans le nuage.
2. Donner l'expression de ρ en fonction de z dans le nuage.
3. Vérifier que $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$.
4. Montrer que, à l'extérieur du nuage, $\vec{E}$ est uniforme.
5. Calculer $\vec{E}$ à l'intérieur du nuage (en admettant qu'il est nul à l'extérieur).
6. Pour quelle valeur de z ce champ est-il maximal ? Vérifier que son expression est : $h/2$

$$E_{\max} = \frac{\rho_0 h}{4\epsilon_0}$$

7. Calculer ρ_0 pour $E_{\max} = 200\text{kV/m}$. 1e-9C/m^3

1.



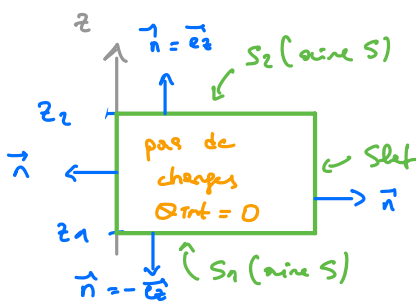
2. $\rho = -\rho_0 + \frac{2\rho_0}{h}z$

3. Extension infinie en x et y , donc tout plan $//(Oz)$ est plan de symétrie des charges, et donc du champ $\vec{E}$ (principe de Curie) $\Rightarrow \vec{E}$ selon $\vec{e}_z$

Invariance par translation $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y \Rightarrow \vec{E}$ ne dépend que de z .

Donc $\vec{E} = E(z)\vec{e}_z$ (exactement comme pour le plan de charges infini)

4.



On se place en dehors du nuage ($z_2 > z_1 > h$ ou $z_1 < z_2 < 0$), et on choisit une surface fermée de forme parallélépipède d'aire S et de hauteur $z_2 - z_1$: $\Sigma = S_1 + S_2 + S_{\text{lat}}$.
Il n'y a pas de charges à l'intérieur : $Q_{\text{int}} = 0$

Le flux (sortant) s'écrit: $\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \Phi(\vec{E}/S_1) + \Phi(\vec{E}/S_2) + \Phi(\vec{E}/S_{lat})$

Or, $\Phi(\vec{E}/S_{lat}) = 0$ car $\vec{E} \perp \vec{n}$.

$$\Phi(\vec{E}/S_2) = \iint_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_{S_2} (E(z_2) \vec{e}_z) \cdot (dS \vec{e}_z) = E(z_2) \iint_{S_2} dS = E(z_2) S$$

De même, $\Phi(\vec{E}/S_1) = -E(z_1) \cdot S$

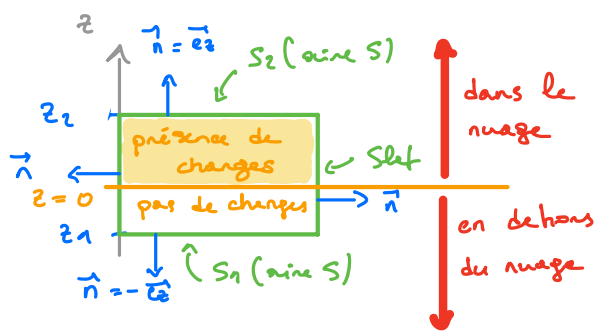
D'où $\Phi(\vec{E}/\Sigma) = S(E(z_2) - E(z_1))$

On utilise le th de Gauss: $\Phi(\vec{E}/\Sigma) = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$.

Comme $Q_{int} = 0$ (en dehors du nuage, pas de charges) alors $E(z_2) = E(z_1)$

Donc $\vec{E}$ est uniforme en dehors du nuage.

5. On procède de la même manière, mais avec $z_1 < 0 < z_2$ (surface S_2 à l'intérieur du nuage).



L'expression du flux est la même:

$$\Phi(\vec{E}/\Sigma) = S(E(z_2) - E(z_1))$$

Mais on admet que le champ est nul à l'extérieur du nuage, donc $E(z_1) = 0$

$$\Rightarrow \Phi(\vec{E}/\Sigma) = S E(z_2)$$

Entre $z = 0$ et $z = z_2$, pour une surface S , il y a une charge:

$$Q_{int} = \iiint_{\text{volume entouré par } \Sigma} \rho \, dV = \int_0^{z_2} \rho S \, dz = S \int_0^{z_2} \left(-\rho_0 + \frac{2\rho_0 z}{h} \right) dz$$

$$= \rho_0 S \left(-z_2 + \frac{2}{h} \frac{z_2^2}{2} \right) = \rho_0 S z_2 \left(\frac{z_2}{h} - 1 \right)$$

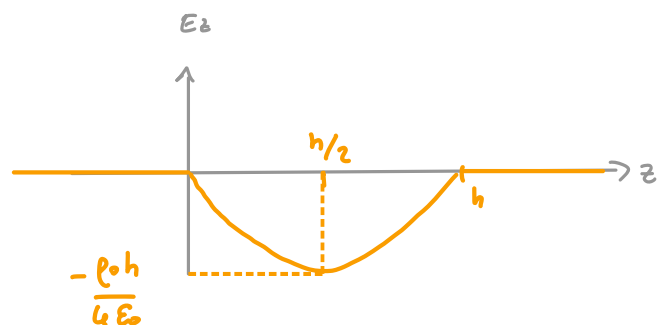
Alors le th de Gauss donne $\cancel{E(z_2)} = \frac{\rho_0 \cancel{S}}{\epsilon_0} z_2 \left(\frac{z_2}{h} - 1 \right)$

Ainsi, d'une manière générale, le champ $\vec{E}$ à l'abscisse z à l'intérieur du nuage

s'écrit: $\boxed{\vec{E} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \left(\frac{z}{h} - 1 \right) \vec{e}_z}$

$$\frac{z}{h} - 1 + \frac{1}{h} \cdot z = -1$$

$$\frac{z^2}{h} - z \rightarrow \frac{2z}{h} - 1$$

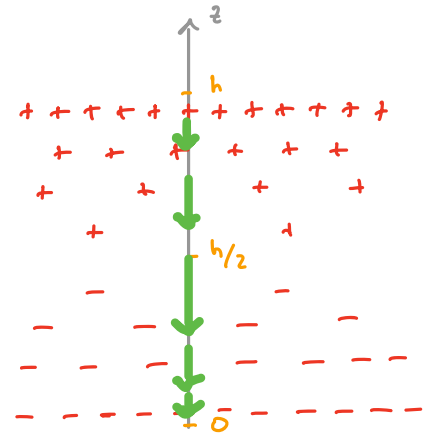


$$6. E_z = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} z \left(\frac{z}{h} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{2z}{h} - 1 \right)$$

$$\text{Donc } \frac{dE_z}{dz} = 0 \text{ pour } z = \frac{h}{2}$$

$$\text{Et alors } E_{\max} = \left| E_z \left(z = \frac{h}{2} \right) \right| = \frac{\rho_0 h}{4 \epsilon_0}$$



$$7. \text{ A.N : } \rho_0 = \frac{4 \epsilon_0 E_{\max}}{h} = \frac{4 \times 9 \cdot 10^{-12} \times 2 \cdot 10^5}{8 \cdot 10^{-3}} = 9 \cdot 10^{-10} \text{ C.m}^{-3}$$