

Première partie

Les caractéristiques de Jupiter

I.1 Observer Jupiter depuis la Terre

1. La troisième loi de Kepler dans le cadre du système { Jupiter et ses satellites } :

Le rapport du carré de la période de révolution des satellites et du cube du demi grand axe de l'ellipse décrite

par le centre de ces satellites est égale à $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J}$ où M_J désigne la masse de Jupiter soit $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J}$.

En s'appuyant sur la troisième loi de Kepler, on effectue par exemple la régression linéaire $T^2 = f(a^3)$:

$$T^2 = \underbrace{3,11 \cdot 10^{-16}}_{=\alpha} \times a^2 \text{ avec } R^2 = 0,999$$

Les résultats issus de l'observation s'accordent bien avec une telle loi et alors $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J} = \alpha$ soit $M_J = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}\alpha}$.

Application numérique : $M_J = 1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$ correspondant bien à la valeur indiquée dans le sujet.

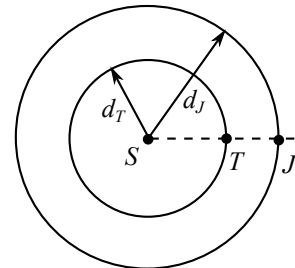
2. La masse volumique moyenne : $\rho = \frac{M_J}{\frac{4}{3}\pi R_J^3} = \frac{3M_J}{4\pi R_J^3}$.

Application numérique : $\rho = 1,32 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$.

3. La configuration Soleil - Terre - Jupiter pour laquelle Jupiter est vue sous un angle maximal est la suivante :

Alors dans l'approximation des petits angles $\alpha_{\max} \approx \frac{2R_J}{d_J - d_T}$ soit

Application numérique : $\alpha_{\max} \approx 2,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$.



4. En appliquant la troisième loi de Kepler au { système solaire } :

$\frac{T_J^2}{d_J^3} = \frac{T_T^2}{d_T^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_s}$ où M_s désigne la masse du Soleil donc $T_J = \left(\frac{d_J}{d_T}\right)^{3/2} T_T$.

La valeur de la période sidérale de Jupiter : **Application numérique :** $T_J = 4,33 \cdot 10^3 \text{ j}$.

La durée Δt séparant deux oppositions de Jupiter vérifie : $2\pi \frac{\Delta t}{T_T} - 2\pi \frac{\Delta t}{T_J} = 2\pi$ soit $\Delta t = \frac{T_T T_J}{T_J - T_T}$ soit

$\Delta t = 3,99 \cdot 10^2 \text{ j}$ (Terre et Jupiter décrivant leurs orbites respectives dans le même sens).

5. L'œil n'accomode pas lorsque l'objet examiné est situé au PR de l'œil c'est-à-dire pour un œil emmétrope **à l'infini**.

En assimilant légitimement Jupiter à un objet situé à l'infini, l'image définitive devant être rejetée à l'infini par la lunette astronomique pour une vision sans accommodation :

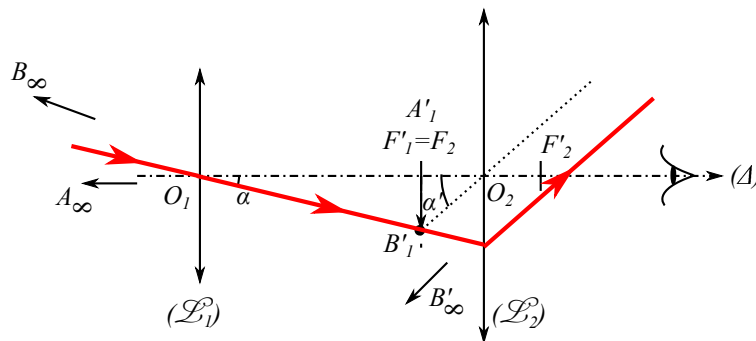
$$A_\infty \xrightarrow{\mathcal{L}_1} A'_1 = F'_1 = F_2 \xrightarrow{\mathcal{L}_2} A_\infty$$

Pour qu'il en soit ainsi, le foyer principal image de l'objectif $\mathcal{L}_1$ **doit être confondu** avec le foyer principal objet de l'oculaire $\mathcal{L}_2$ c'est-à-dire que la distance entre l'objectif et l'oculaire est $\ell = f'_1 + f'_2$.

Dans ce cas, les foyers de la lunette sont rejetés à l'infini et le système est qualifié de **système afocal**.

6. Les conditions de Gauss :

- les rayons lumineux sont peu inclinés par rapport à l'axe optique;
- les rayons lumineux sont peu écartés de l'axe optique.



7. Dans l'approximation des petits angles (non orientés) :

- $\tan \alpha \sim \alpha = \frac{A'_1 B'_1}{f'_1}$;
- $\tan \alpha' \sim \alpha' = \frac{A'_1 B'_1}{f'_2}$.

Alors $G = \frac{f'_1}{f'_2}$ soit **Application numérique :** $G = 10$.

Dans une configuration d'opposition de Jupiter : $\alpha_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-4}$ rad alors l'angle sous lequel est vue Jupiter à travers la lunette est $\alpha'_{\max} = G \alpha_{\max}$ soit $\alpha'_{\max} = 2,2 \cdot 10^{-3}$ rad.

Constatant que $\alpha'_{\max} \approx 5 \varepsilon_{\text{œil}}$ avec $\varepsilon_{\text{œil}} = 4,4 \cdot 10^{-4}$ rad, Jupiter pourra être discernée correctement avec cette lunette.

I.2 La trajectoire de la sonde Juno

I.2.1 S'échapper de la Terre

8. Le référentiel d'étude est le référentiel géocentrique supposé galiléen.

Le système étudié est { l'objet M de masse m } soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre.

Ce système est conservatif.

Par définition de la vitesse de libération de M, l'état considéré est un **état de diffusion** et la vitesse de M infiniment éloigné de la Terre est nulle. Donc dans cet état particulier, l'énergie mécanique de M est nulle.

Initialement, M est à la surface de la Terre.

Par conservation de l'énergie mécanique : $\frac{1}{2} m v_\ell^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_T} = 0$ soit $v_\ell = \sqrt{\frac{2 \mathcal{G} M_T}{R_T}}$.

Application numérique : $v_\ell = 11,2 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

I.2.2 Caractéristiques de la trajectoire

9. On peut approximer le mouvement du référentiel jupiterocentrique à un **mouvement de translation rectiligne uniforme** dans le référentiel héliocentrique si la période de révolution de la sonde Juno est **largement inférieure à la période de révolution sidérale de Jupiter**.

Ceci est bien vérifié puisque $53 \text{ j} \ll T_J = 4,33 \cdot 10^3 \text{ j}$.

L'affirmation précédente assure son caractère galiléen au référentiel jupiterocentrique, le référentiel héliocentrique étant lui-même considéré comme galiléen.

10. Le théorème du moment cinétique stipule que : $\left(\frac{d\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{O \rightarrow P})$ et comme $\vec{F}_{O \rightarrow P}$ est une **force**

centrale de pôle O $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_{O \rightarrow P}) = \vec{0}$.

Le moment cinétique $\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}}$ est alors conservé lors du mouvement de la sonde ce qui se traduit par :

$$\forall t, \quad \vec{L}_{O,M/\mathcal{R}}(t) = \vec{r}(t) \wedge (m \vec{v}_{P/\mathcal{R}}(t)) = \vec{r}_0 \wedge (m \vec{v}_0)$$

En supposant les vecteurs vitesse $\vec{v}_0$ à $t = 0$ et position $\vec{r}_0$ à $t = 0$ non colinéaires, on en déduit que quelque soit l'instant t considéré, les vecteurs position $\vec{r}(t)$ et vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}(t)$ sont orthogonaux à $\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}} = \vec{Cte} \neq \vec{0}$ garantissant que le mouvement est **plan**.

Il s'agit du plan $\mathcal{P}(O, \vec{r}_0, \vec{v}_0)$ de normale $\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}}$. Ce plan doit contenir le centre du champ de force.

11. On se place alors en paramétrage cylindrique de base $\mathcal{B}(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{u}_z$ soit colinéaire de même sens à $\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}}$.

Alors : $\vec{r} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt} \right)_{\mathcal{R}} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

12. On en déduit :

$$\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \wedge m \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ m r^2 \dot{\theta} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

Et donc $C \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\vec{L}_{O,M/\mathcal{R}}}{m} = r^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$.

$\vec{C}$ est donc un vecteur constant au cours du mouvement entraînant que la quantité $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z = r^2 \dot{\theta}$ soit conservée au cours du mouvement de la sonde.

13. Par définition, l'énergie mécanique (qui est **conservée** puisque $\vec{F}_{O \rightarrow P}$ est une force conservative dérivant de l'énergie potentielle d'interaction gravitationnelle $\mathcal{E}_p(P) = -\mathcal{G} \frac{mM}{r}$) a pour expression $\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_{C,P/\mathcal{R}} + \mathcal{E}_p(P)$

soit $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_{P/\mathcal{R}}^2 - \frac{\mathcal{G} m M}{r}$

et comme $v_{P/\mathcal{R}}^2 = (\dot{r})^2 + (r \dot{\theta})^2$ alors $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 + \frac{1}{2} m (r \dot{\theta})^2 - \mathcal{G} \frac{m M}{r}$.

Enfin l'expression de C permet de découpler les grandeurs r et θ selon : $r \dot{\theta} = \frac{C}{r}$.

On en déduit alors que $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m (\dot{r})^2 + \frac{m C^2}{2 r^2} - \mathcal{G} \frac{m M}{r}$.

On définit l'énergie potentielle effective de P par $U_{\text{eff}}(r) = \frac{m C^2}{2 r^2} - \mathcal{G} \frac{m M}{r}$.

14. On a $\lim_{r \rightarrow 0^+} U_{\text{eff}}(r) = +\infty$ et $\lim_{r \rightarrow +\infty} U_{\text{eff}}(r) = 0$. Voici alors l'allure du graphe de la fonction $r \mapsto U_{\text{eff}}(r)$ en page suivante.

- Dans le cas d'une **trajectoire circulaire** : une seule valeur de r est possible et correspond au minimum de U_{eff} : r_0 . Il s'agit d'un **état lié**.
- Pour $U_{\text{eff}, \min} < U_{\text{eff}} < 0$: $r \in [r_{\min}, r_{\max}]$: l'**état est lié** et la trajectoire décrite par P est une **ellipse** dont l'un des foyers est O.
- Pour $U_{\text{eff}, \min} = 0$: $r \in [r_0, +\infty[$: il s'agit d'un **état de diffusion** et la trajectoire décrite par P est une **parabole**.
- Pour $U_{\text{eff}, \min} > 0$: $r \in [r_1, +\infty[$: il s'agit d'un **état de diffusion** et la trajectoire décrite par P est une **branche d'hyperbole**.

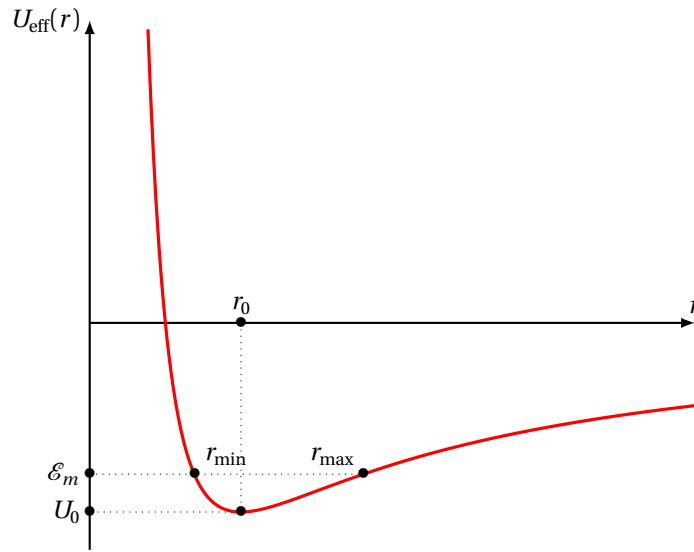


Figure 1: Tracé de la courbe d'énergie potentielle U_{eff}

15. En appliquant la troisième loi de Kepler au système { Jupiter - sonde }, le demi grand axe de l'ellipse décrite

par la sonde est estimée à $a = \left(\frac{\mathcal{G} M_J T^2}{4 \pi^2} \right)^{1/3}$ avec T la période de la sonde : $T = 53 \text{ j}$.

Application numérique : $a = 4,1 \cdot 10^9 \text{ m}$.

On rappelle l'expression de l'énergie mécanique de la sonde en fonction du demi grand axe de l'ellipse a :

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{G} \frac{m M_J}{2a} \text{ et donc } r_{\min} + r_{\max} = 2a.$$

À l'apogée A($r = r_{\max}$) et au périégée P($r = r_{\min}$) comme $\dot{r} = 0$, l'énergie mécanique prend la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{m C^2}{2 r^2} - \mathcal{G} \frac{m M_J}{r} \text{ donc } (r_{\min}, r_{\max}) \text{ solution de } 2 \mathcal{E}_m r^2 + 2 \mathcal{G} m M_J - m C^2 = 0$$

En utilisant une relation coefficients-racines d'un polynôme, on obtient : $r_{\min} r_{\max} = -\frac{m C^2}{2 \mathcal{E}_m}$.