MP2 DS 3 Physique

La durée est de 4 heures.
Les calculatrices sont autorisées.

Problème 1 Phénomènes de marées

Données :

— distance Terre Lune : $d_L = 3,8.10^8\ m$
— distance Terre Soleil : $d_S = 1.5.10^{11}\ m$
— rayon de la Terre : $R_T = 6,4.10^6\ m$
— masse du Soleil : $m_S = 2.10^{30}\ kg$
— masse de la Terre : $m_T = 6.10^{24}\ kg$
— masse de la Lune : $m_L = 7,3.10^{22}\ kg$
— constante de gravitation universelle : $G = 6,7.10^{-11}\ kg^{-1}.m^3.s^{-2}$

Lexique :

— pleine mer : hauteur maximale de la marée
— basse mer : hauteur minimale de la marée
— marnage : différence de hauteurs entre une pleine mer et une basse mer consécutives
— vive-eau : marée pendant laquelle le marnage est maximal

Champ de marée

Les marées sont dues aux champs de gravitation au niveau de la Terre des différents astres du système solaire, principalement la Lune et le Soleil. On considérera que les astres ont une distribution de masse à symétrie sphérique.

1. Donner sans justification l'expression du champ de gravitation $\overrightarrow{g_A}(M)$ créé par l'astre A, de masse m_A et de centre O, en un point M en dehors de l'astre. On pourra noter $r = OM$ la distance entre O et M et $\overrightarrow{e_r}$ un vecteur unitaire dirigé de O vers M.

On cherche maintenant à établir cette expression.

2. Montrer par des considérations de symétrie que $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(r)\overrightarrow{e_r}$.

3. Enoncer le théorème de Gauss dans le cadre de l'électromagnétisme, puis le transposer au cas de la gravitation. Utiliser ce résultat pour retrouver l'expression de la question 1. Préciser quelle est la simplification dans l'expression du champ de gravitation en dehors de l'astre apportée par la symétrie sphérique de la distribution de masses.

L'influence d'un astre sur les marées découle d'une petite différence entre la force de gravitation qu'il exerce et la force d'inertie dont il est responsable dans le référentiel géocentrique . On établit ici l'expression du champ de marée en prenant le Soleil comme exemple (dans les trois questions qui suivent, on ne considère que les forces de gravitation dues au soleil), mais le résultat est valable pour n'importe quel astre. Dans toute la suite, on considérera le référentiel héliocentrique (R_h) comme galiléen.

4. Décrire le mouvement du référentiel géocentrique par rapport au référentiel héliocentrique et en déduire l'expression de la force d'inertie d'entrainement sur un point matériel M de masse m dans le référentiel géocentrique. On notera $\overrightarrow{a}_{T/R_h}$ l'accélération de T (centre de la Terre) dans le référentiel héliocentrique.

5. Etablir que $\overrightarrow{a}_{T/R_h} = \overrightarrow{g_S}(T)$, où $\overrightarrow{g_S}(T)$ est le champ de gravitation créé par le Soleil au centre de la terre T. La Terre sera supposée avoir une distribution de masse à symétrie sphérique, ce qui fait que la force de gravitation exercée par le Soleil sur la Terre est assimilable au produit de la masse de la terre par le champ de gravitation du Soleil en son centre.

6. En déduire que la résultante de la force de gravitation et de la force d'inertie d'entrainement dans le référentiel géocentrique dues au Soleil sur un point matériel M de masse m s'écrit :

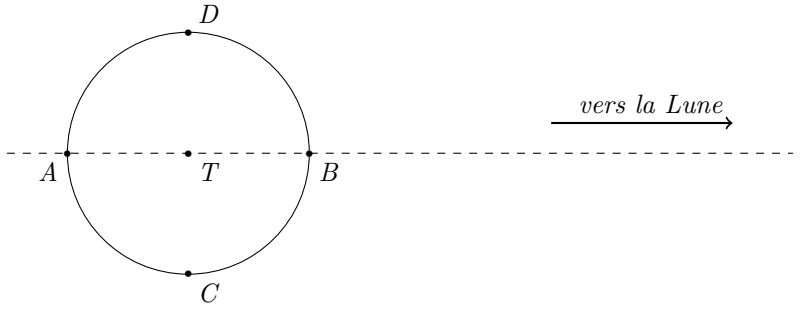
$$m\,\overrightarrow{C_S}(M) \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{C_S}(M) = -Gm_S\left(\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)$$

où S désigne le centre du Soleil, m_S sa masse, et G la constante de gravitation universelle.
$\overrightarrow{C_S}(M)$ est appelé *champ de marée* du Soleil au point M.

Les marées sont essentiellement dues à l'influence de la Lune, celle du Soleil se traduisant par une plus ou moins grande amplitude (marées de vives eaux et de mortes eaux). Dans la suite on ne considère que l'influence de la Lune. Le résultat de la question B6 est transposable à n'importe quel astre, l'expression du champ de marée dû à la Lune est donc (L désignant le centre de la Lune) :

$$\overrightarrow{C_L}(M) = -Gm_L\left(\frac{\overrightarrow{LM}}{LM^3} - \frac{\overrightarrow{LT}}{LT^3}\right)$$

Sur le schéma ci-dessous on indique quelques points particuliers à la surface de la Terre, relativement à la position de la Lune.



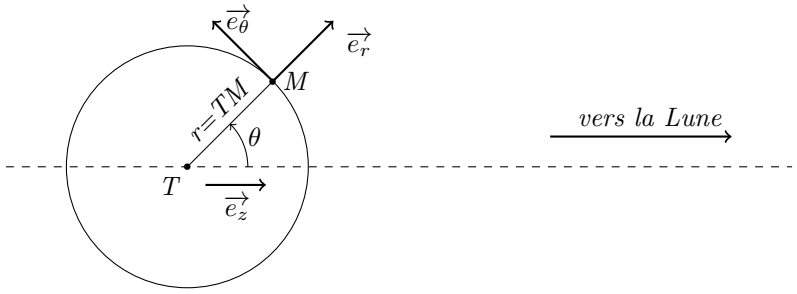
7. Reprendre le dessin précédent et représenter en A, B, C et D la force gravitationnelle et la force d'inertie dues à la lune, ainsi que leur résultante (proportionnelle au champ de marée).

8. Indiquer les points (parmis A, B, C et D) de marée haute et de marée basse. Dans quel plan sont situés tous les points de marée basse ?

9. En utilisant la troisième loi de Kepler, donner un ordre de grandeur de la période de révolution de la Lune dans le référentiel géocentrique.

10. Donner un ordre de grandeur de la période de rotation propre de la Terre. Conclure sur la périodicité (approximative) des marées.

On cherche à simplifier l'expression du champ de marée, en tenant compte du fait que, pour un point M à la surface de la terre, $TM << TL$ et en effectuant un développement limité au premier ordre en $\frac{TM}{TL}$. On posera $TM = r$ et $TL = d_L$, et on repérera la position de M, dans le plan contenant L, T et M, en coordonnées polaires (voir la figure ci-dessous).



11. Montrer que $\overrightarrow{LM} = -d_L\overrightarrow{e_z}+r\overrightarrow{e_r}$. En déduire que, au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$, on a $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{{d_L}^3}\left(1+\frac{3r\cos(\theta)}{d_L}\right)$.

12. En déduire que, toujours au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$:

$$\overrightarrow{C_L}(M) = \frac{G m_L r}{{d_L}^3}\left(3\cos(\theta)\overrightarrow{e_z} - \overrightarrow{e_r}\right)$$

En projetant $\overrightarrow{e_z}$ sur la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$, on obtient finalement :

$$\overrightarrow{C_L}(M) = \frac{G m_L r}{{d_L}^3}\left(\left(3\cos^2(\theta)-1\right)\overrightarrow{e_r} - 3\sin(\theta)\cos(\theta)\overrightarrow{e_\theta}\right)$$

13. Montrer que le l'influence de la Lune sur les marées est de l'ordre de 2 fois plus importante que celle du soleil.

14. Préciser les positions relatives de la Terre, de la Lune et du Soleil pour les marées de vives eaux (amplitude maximale, les effets de la Lune et du Soleil s'ajoutent) et pour les marées de mortes eaux (amplitude minimale, les effets de la Lune et du Soleil se compensent partiellement). Attention à bien indiquer deux configurations distinctes pour chaque cas. Indiquer le lien avec les phases de la Lune et donner un ordre de grandeur de la périodicité de l'alternance vives-eaux / mortes-eaux.

Problème 2 - Étude du mouvement d'un satellite

Les systèmes d'observation des océans par satellite ont été imaginés et développés au début des années 70. Depuis, plus d'une quinzaine de satellites d'observation embarquant des altimètres radars ont été lancés dans le but d'observer le comportement des océans (**figure 2**).

Issues d'une coopération du CNES et de la NASA, la série des satellites Topex-Poséidon, initiée en 1992, puis celle des satellites Jason, ont permis de mesurer l'élévation moyenne des mers avec précision : $(3,6 \pm 0,1)\ \mathrm{mm/an}$ durant ces trente dernières années.

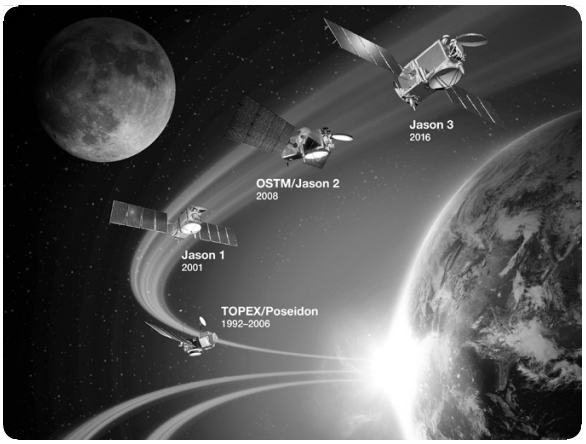


Figure 2 - Satellites altimétriques lancés depuis 1992. Vue d'artiste. Crédit : CNES

On se propose dans cette partie d'étudier le mouvement d'un tel satellite, en orbite autour du centre O de la Terre, modélisée par un corps de répartition de masse à symétrie sphérique, de rayon R_T et de masse M_T.

I.1 - Force centrale conservative

On commence par étudier le mouvement d'un mobile quelconque, de masse m et assimilé à un point matériel M, dans le référentiel géocentrique $(\mathcal{R}_T)$ considéré comme galiléen. Le mobile n'est soumis qu'à la seule action de la Terre.

Q1. Rappeler la définition du référentiel géocentrique et celle d'un référentiel galiléen.

Q2. Après avoir justifié la direction du champ de gravitation terrestre $\overrightarrow{\mathcal{G}}(M)$ et les invariances de sa norme, établir l'expression de celui-ci en un point M extérieur à la Terre en fonction de la constante de gravitation universelle G, de la masse M_T, de la distance $r = OM$ et du vecteur unitaire $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{OM}/r$. En déduire l'expression $\overrightarrow{F_g}$ de la force de gravitation exercée par la Terre sur le mobile de masse m.

Q3. Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ du mobile par rapport au point O est une constante du mouvement. En déduire que la trajectoire du mobile est plane.

Dans la suite, on associera au référentiel $(\mathcal{R}_T)$ le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$ de façon à ce que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}$ soit aligné avec $\overrightarrow{e_z}$. On posera $\overrightarrow{\mathcal{L}_O} = \mathcal{L}_0 \overrightarrow{e_z}$ et on se placera en coordonnées polaires (r, θ), de centre O, pour décrire le mouvement du mobile (**figure 3**).

Q4. Montrer que la force gravitationnelle s'exerçant sur le mobile dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$. Établir l'expression de celle-ci en la prenant, par convention, nulle à l'infini.

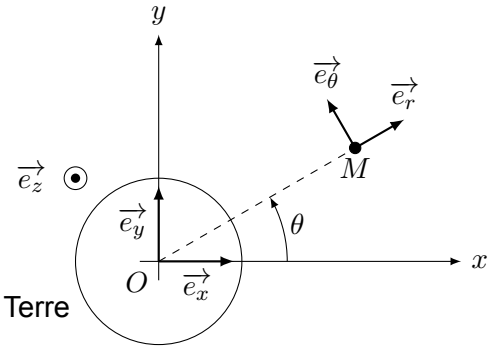


Figure 3 - Description du mouvement du mobile dans le système de coordonnées polaires

Q5. Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ est une constante du mouvement et qu'elle peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \quad (1)$$

où $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ est un terme, appelé *énergie potentielle effective*, que l'on exprimera en fonction de G, m, M_T, $\mathcal{L}_0$ et de r.

Q6. Expliquer pourquoi l'énergie mécanique du mobile est nécessairement supérieure ou égale à son énergie potentielle effective.

Q7. Représenter graphiquement, pour une valeur donnée de $\mathcal{L}_0$, l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ du mobile en fonction de r. Faire apparaître sur le graphique l'énergie mécanique d'une trajectoire associée à un état lié. On rappelle que, pour une force centrale en $1/r^2$, la trajectoire d'un état lié est elliptique.

Q8. Pour un mouvement elliptique quelconque, indiquer à quelles positions particulières l'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle effective. Caractériser le mouvement du mobile dans le cas où l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle effective.

La plupart des mesures effectuées par les satellites altimétriques se font à partir de l'orbite altimétrique de référence, que l'on considérera ici comme une orbite circulaire de rayon R. Dans la suite, le mobile étudié correspond à un satellite altimétrique de masse m, assimilable à un point matériel.

Q9. Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ du satellite situé sur l'orbite altimétrique de référence, en fonction de G, M_T, m et de R.

Q10. Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier d'une orbite circulaire, en utilisant les paramètres liés à l'orbite altimétrique.

On admettra que la troisième loi de Kepler est valable plus généralement pour un mouvement elliptique. Son expression peut se déduire de l'équation obtenue pour le mouvement circulaire, en remplaçant le rayon R de l'orbite circulaire par le demi-grand axe a de la trajectoire elliptique.

I.2 - Jason-2 : un exemple pour la fin de vie des satellites

En fin de vie, pour que ne soit pas laissé un objet non contrôlé sur l'orbite altimétrique de référence, le satellite Jason-2 a été dirigé vers une orbite dite « cimetière », d'altitude légèrement moins haute que celle de l'orbite altimétrique de référence, avant d'être définitivement abandonné. On se propose dans cette sous-partie d'étudier le cas d'une manœuvre de ce type dans le cas très simplifié, illustré **figure 4**, d'un transfert entre deux orbites circulaires coplanaires sous la seule action de l'attraction terrestre. L'orbite de transfert, appelée orbite de Hohmann, correspond à une ellipse dont l'un des foyers est le centre O de la Terre, dont l'apogée A est situé sur l'orbite altimétrique de référence (rayon R) et dont le périgée P est sur l'orbite cimetière (rayon R_c).

Pour modifier l'orbite du satellite, il faut l'accélérer ou le freiner en commandant le fonctionnement et la direction de ses moteurs. On considérera que la poussée générée par ceux-ci s'exerce pendant une durée tellement courte que les changements d'orbites se font instantanément.

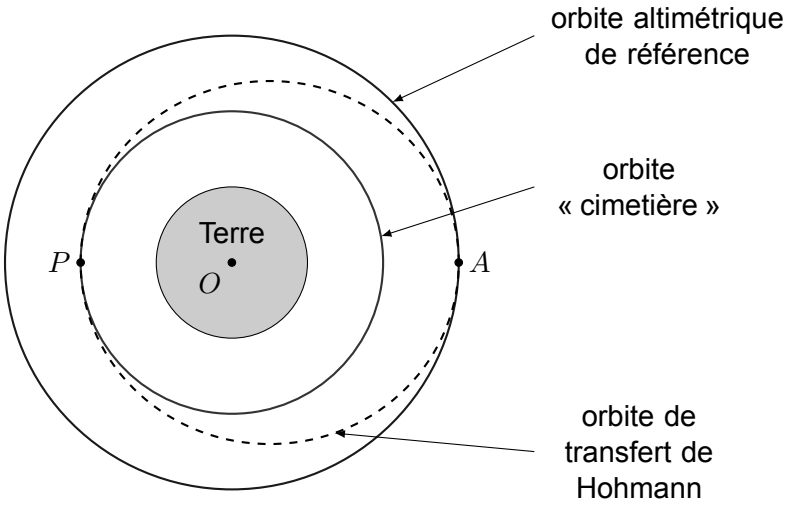


Figure 4 - Tracé des différentes orbites du satellite

Q11. En utilisant l'équation (1), montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_{m,\text{tr}}$ du satellite sur l'orbite de transfert peut se mettre sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,\text{tr}} = -\frac{GM_T m}{R + R_c}.$$

Q12. Exprimer la variation d'énergie mécanique $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,\text{tr}} - \mathcal{E}_{m,\text{alt}}$ nécessaire pour passer de l'orbite initiale à l'orbite de transfert. Commenter le signe de $\Delta\mathcal{E}_m$.

Q13. En justifiant la réponse, indiquer s'il faut accélérer ou freiner le satellite pour le transférer en P de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.

PROBLÈME 3

Un modèle simplifié de sismographe

Le sismographe est un instrument chargé d'enregistrer les mouvements de l'écorce terrestre par rapport au référentiel du laboratoire supposé galiléen.

Il peut être modélisé par un ressort de constante de raideur *k* dont l'extrémité supérieure est solidaire d'un boîtier posé sur le sol.**(Voir Figure 1)**

Une masse *m* de centre d'inertie *G*, attachée à l'autre extrémité du ressort est reliée à un amortisseur exerçant une force de frottement visqueux que l'on écrira $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Une partie non représentée permet d'enregistrer les mouvements de la masse.

Lorsque l'appareil détecte un tremblement de terre, le boîtier est animé d'un mouvement de translation rectiligne par rapport au référentiel du laboratoire.

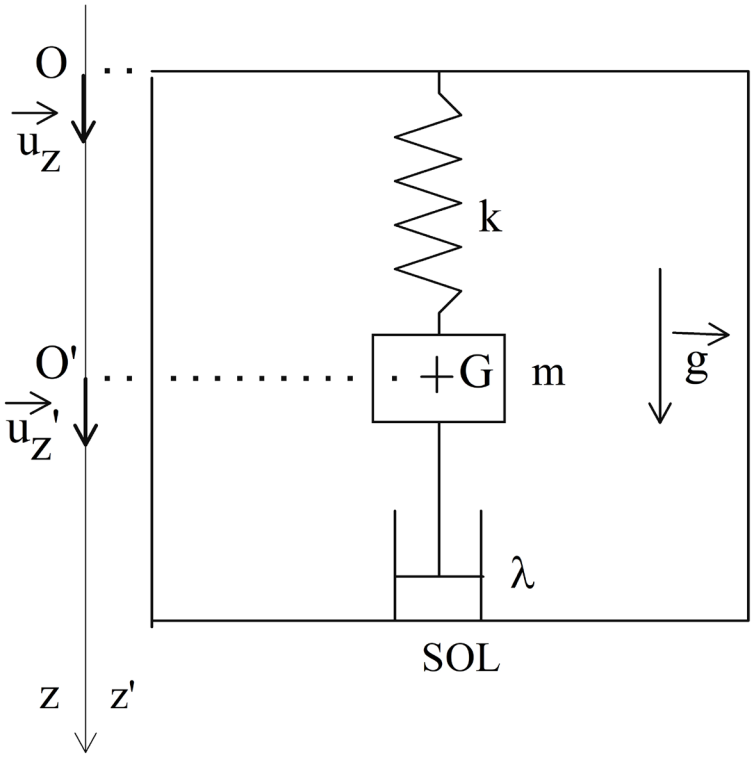


Figure 1 - Modèle du sismographe

L'axe **(Oz)** est un axe fixe lié au référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$.

L'axe **(O'z')** est un axe mobile lié au référentiel boîtier $\mathcal{R}'$.

La cote de l'origine **O'** du repère $\mathcal{R}'$ représentée sur le schéma correspond à la position d'équilibre du centre d'inertie de la masse lorsque le boîtier est immobile, c'est-à-dire en absence de mouvement de l'écorce terrestre.

Q1. Que représente le coefficient λ dans l'expression de $\overrightarrow{f}$? Quelle est son unité ?

Q2. La longueur à vide du ressort est notée ℓ_0. On considère dans cette question que le sol ne vibre pas.
Appliquer la seconde loi de Newton à la masse m dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au boîtier qui est alors galiléen.
Quelle est la longueur à l'équilibre ℓ_1 du ressort en fonction des données ?

Q3. Lorsque le sol vibre, le référentiel lié au boîtier n'est plus galiléen.
Rappeler les expressions des forces d'inertie à prendre alors en compte et donner leurs expressions dans le cas du sismographe étudié.

Q4. Effectuer le bilan des forces s'exerçant sur la masse dans $\mathcal{R}'$ et les représenter en supposant que les valeurs de l'allongement du ressort, de la vitesse du point G et de l'accélération d'entraînement sont positives.

Q5. Appliquer la seconde loi de Newton à la masse dans le référentiel $\mathcal{R}'$ lié au boîtier.
On notera z'_G la cote du point G dans le repère $\mathcal{R}'$.
Projeter cette relation sur l'axe vertical.
On supposera que l'expression de $z_s(t)$ décrivant le mouvement du sol est :

$$z_s(t) = E_m \cos(\omega t + \phi).$$

Q6. On écrit cette relation sous la forme suivante :

$$\frac{d^2 z'_G}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dz'_G}{dt} + \omega_0^2 z'_G = E_m \omega^2 \cos(\omega t + \phi).$$

Comment appelle-t-on ω_0 et Q ? Donner leurs expressions littérales.

Q7. Pour un sismographe, le facteur de qualité est toujours très élevé.
Quelle est alors l'équation obtenue en simplifiant la relation précédente si on se place dans le cas idéal où le facteur de qualité est infini ?

Q8. En régime permanent, la solution de cette équation s'écrit $z'_G(t) = Z_m \cos(\omega t + \phi')$ avec $Z_m > 0$.
Quelle est l'expression de Z_m ?

Q9. On donne la représentation graphique de $Z_m(u)$ avec $u = \frac{\omega}{\omega_0}$.**Figure 2**)
Justifier l'allure de cette courbe à partir des résultats de la question précédente.

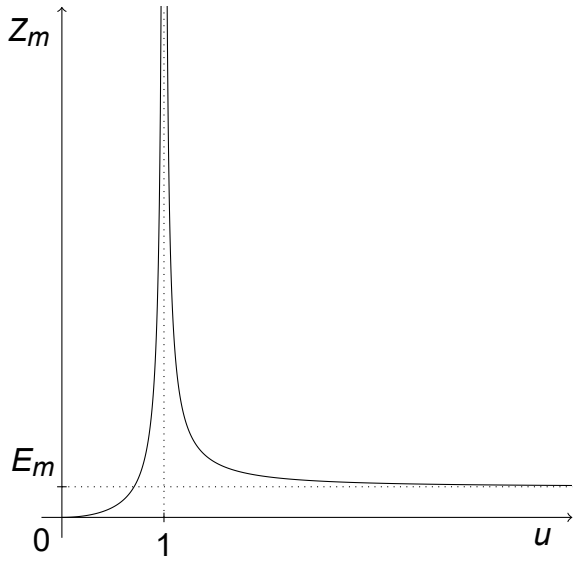


Figure 2 - Représentation graphique de $Z_m(u)$

Q10. Il faut distinguer trois zones sur cette courbe : zone I (u << 1), zone II (*u tend vers 1*) et zone III (u >> 1)
Comment appelle-t-on le phénomène mis en évidence pour $u = 1$?
À quelle partie de la courbe correspond la zone de fonctionnement du sismographe ?
Citer un exemple de la vie courante correspondant à la zone restante de cette courbe.