DS3 - correction problème 1

CHAMP DE MAREE

2p **1.** Avec une répartition de masses à symétrie sphérique, le champ de gravitation créé par l'astre est le même que si toute la masse était concentrée au centre.

$$\overrightarrow{g_A}(M) = -Gm_A\frac{\overrightarrow{OM}}{OM^3} = -\frac{Gm_A}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

2p **2.** Tout plan qui contient O est plan de symétrie de la distribution de masses, donc contient le champ, d'où $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(M)\overrightarrow{e_r}$.
La distribution de masses est invariante pour toute rotation de centre O, $g_A(M)$ est donc indépendant des coordonnées angulaires, on peut donc écrire $g_A(M) = g_A(r)$.

3p **3.** En electromagnétisme, $\phi(\overrightarrow{E}/S) = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$ et en gravitation $\phi(\overrightarrow{g}/S) = -4\pi G m_{\text{int}}$. On applique le th de Gauss en prenant une sphère de rayon r (avec $r > R_A$) et de centre O comme surface fermée. Comme $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(r)\overrightarrow{e_r}$, le flux est égal à $4\pi r^2 g_A(r)$ tandis que m_{int} est la masse de l'astre, d'où $4\pi r^2 g_A(r) = -4\pi G m_A$ et donc $g_A(r) = -\frac{Gm_A}{r^2}$. D'où $\overrightarrow{g_A}(M) = g_A(r)\overrightarrow{e_r} = -\frac{Gm_A}{r^2}\overrightarrow{e_r}$.

2p **4.** Mouvement de translation (quasi) circulaire. Les référentiels géocentrique et héliocentrique ont les mêmes axes, donc pas de rotation. Force d'inertie d'entrainement sur une masse m dans un cas de translation seule, donc $\overrightarrow{f_{ie}} = -m\overrightarrow{a}_{T/R_h}$, $\overrightarrow{a}_{T/R_h}$ étant bien l'accélération du référentiel non galiléen (géocentrique) par rapport à un référentiel galiléen (héliocentrique).

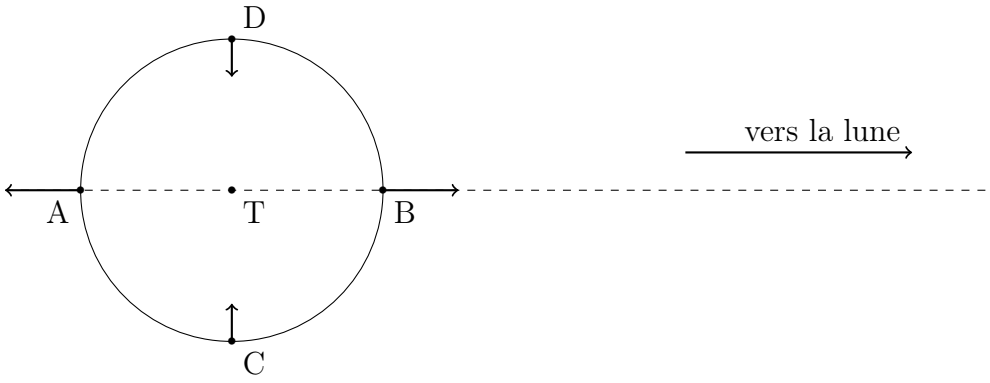
2p **5.** On applique la 2ème loi de Newton à la terre dans le référentiel héliocentrique (galiléen), ce qui donne $m_T\overrightarrow{a}_{T/R_h} = \overrightarrow{f}_{soleil\to terre}$, et compte tenu de l'hypothèse de l'énoncé, $\overrightarrow{f}_{soleil\to terre} = m_T\overrightarrow{g_S}(T)$, d'où $\overrightarrow{a}_{T/R_h} = \overrightarrow{g_S}(T)$.

2p **6.** En rassemblant les résultats précédents, $\overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_{ie}} = m\overrightarrow{g_S}(M) - m\overrightarrow{g_S}(T)$, d'où

$$\overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_{ie}} = m\left(-Gm_S\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \left(-Gm_S\frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)\right) = -mGm_S\left(\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)$$

et en posant $\overrightarrow{f_g} + \overrightarrow{f_{ie}} = m\overrightarrow{C_S}(M)$ on obtient $\overrightarrow{C_S}(M) = -Gm_S\left(\frac{\overrightarrow{SM}}{SM^3} - \frac{\overrightarrow{ST}}{ST^3}\right)$.

2p **7.** La force de gravitation est dirigée vers la lune et est plus ou moins intense, tandis que la force d'inertie est partout la même.



2p **8.** Marée haute en A et B, basse en C et D. On retrouve la même situation que pour C et D (donc marée basse) pour tous les points situés dans le plan orthogonal à la direction terre lune et qui contient T.

2p **9.** La troisième loi de Kepler donne $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 {d_L}^3}{Gm_T}}$, et numériquement $T \simeq 27,3$jours.

2p **10.** Environ 24h pour la rotation propre de la terre, on peut donc considérer en première approximation que la lune reste immobile pendant une rotation propre de la terre, ce qui conduit à une périodicité des marées de l'ordre de $12h$.

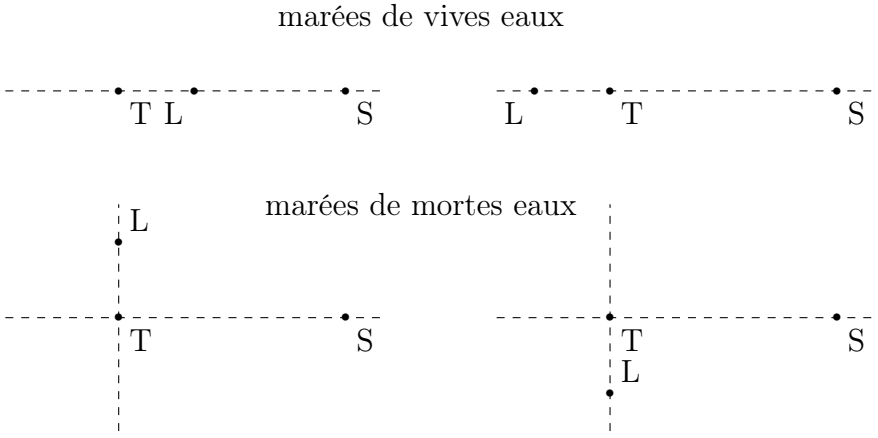
3p **11.** $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LT} + \overrightarrow{TM} = -d_L\overrightarrow{e_z} + r\overrightarrow{e_r}$. On développe le carré scalaire :
$LM^2 = LT^2 + TM^2 + 2\overrightarrow{LT}.\overrightarrow{TM} = {d_L}^2 + r^2 - 2d_L r\cos(\theta)$, soit
$LM^2 = {d_L}^2\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos(\theta) + \left(\frac{r}{d_L}\right)^2\right)$ et donc au premier ordre en $\frac{r}{d_L}$ on a
$LM^2 = {d_L}^2\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos(\theta)\right)$, soit $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{{d_L}^3}\left(1 - 2\frac{r}{d_L}\cos(\theta)\right)^{-\frac{3}{2}}$.

On utilise ensuite le DL au premier ordre $(1+u)^\alpha = 1+\alpha u$ avec $\alpha = -3/2$ et $u = -2\frac{r}{d_L}\cos(\theta) << 1$, ce qui donne $\frac{1}{LM^3} = \frac{1}{{d_L}^3}\left(1+\frac{3r\cos(\theta)}{d_L}\right)$.

3p **12.** En utilisant les résultats des questions B6 et B11, on a :
$\overrightarrow{C_L}(M) = -Gm_L\left((-d_L\overrightarrow{e_z}+r\overrightarrow{e_r})\frac{1}{{d_L}^3}\left(1+\frac{3r\cos(\theta)}{d_L}\right)-(-d_L\overrightarrow{e_z})\frac{1}{{d_L}^3}\right)$
En simplifiant et en éliminant le terme du deuxième ordre en $\frac{r}{d_L}$, cela donne :
$\overrightarrow{C_L}(M) = -\frac{Gm_L}{{d_L}^3}\left(-d_L\overrightarrow{e_z}\frac{3r\cos(\theta)}{d_L}+r\overrightarrow{e_r}\right) = \frac{Gm_Lr}{{d_L}^3}(3\cos(\theta)\overrightarrow{e_z}-\overrightarrow{e_r})$.

2p **13.** On peut remarquer que les caractéristiques de la lune interviennent dans son champ de marée via un facteur $\frac{m_L}{{d_L}^3}$, de manière analogue on aura $\frac{m_S}{{d_S}^3}$ pour le soleil. On a donc $\frac{\text{influence de la lune}}{\text{influence du soleil}} = \left(\frac{m_L}{{d_L}^3}\right)/\left(\frac{m_S}{{d_S}^3}\right) = \frac{m_L\,{d_S}^3}{m_S\,{d_L}^3}$, ce qui donne numériquement environ 2,25.

4p **14.**

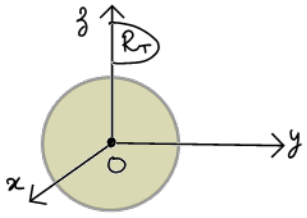


Les marées de vives-eaux correspondent à la pleine lune et à la nouvelle lune ; tandis que les marées de mortes-eaux correspondent aux premier et dernier quartier. La périodicité est donc de l'ordre de 29 jours.

2025 - CCINP - MP - Physique

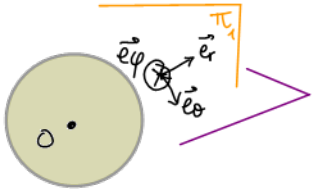
Partie I - Etude du mvt d'un satellite

I.1.



Q1 - * Réf. géocentrique : centre au centre de masse de la Terre
axes dirigés vers 3 étoiles fixes.

* Un référentiel est dit "galiléen" si le mouvement d'un point matériel isolé ou pseudo-isolé, repéré dans ce référentiel, est une translation rectiligne et uniforme.



Q2 - * Symétries de la distribution de masse $\mathcal{D}$ que constitue la Terre :

$\pi_1 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$
$\pi_2 = (M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi)$
} plans de sym. de $\mathcal{D}$ donc de $\vec{\mathcal{G}} \Rightarrow \vec{\mathcal{G}} \in \pi_1 \cap \pi_2 \Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{G}} = \mathcal{G}(M)\vec{e}_r}$

* Invariance de $\mathcal{D}$: par rotation d'angles θ et φ autour de O $\Rightarrow \|\vec{\mathcal{G}}\|$ ne dépd que de r

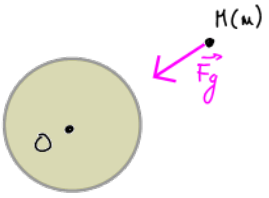
↳ $\boxed{\vec{\mathcal{G}}(M) = \mathcal{G}(r)\vec{e}_r}$

* th de Gauss gravitationnel : $\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = -4\pi G M_{int}$

surface de Gauss choisie = sphère centrée en O, passant par M, avec ici M extérieur à la Terre

↳ $\oiint \vec{\mathcal{G}} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 \mathcal{G}(r) = -4\pi G M_T$ ($r > R_T$ ici) $\Rightarrow \boxed{\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GM_T}{r^2}\vec{u}}$ ($r > R_T$) ($\vec{u} = \vec{e}_r$)

* Force de gravitation ressentie par le mobile de masse m : $\boxed{\vec{F}_g = m\vec{\mathcal{G}}(r) = -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{u}}$



Q3 - TMC appliqué au mobile (m) dans R_T : $\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(M)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_g)$ ← seule force subie par M

$= \vec{OM} \wedge \vec{F}_g = \vec{0}$ car $\vec{OM}$ et $\vec{F}_g$ colinéaires

↳ $\boxed{\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \text{cste}} = \vec{OM} \wedge m\vec{v} \Rightarrow \forall t, (\vec{OM}, \vec{v}) \in$ plan $\perp \vec{\mathcal{L}}_O$ (plan qui reste toujours le même)

$\Rightarrow$ le mouvement de M reste contenu dans ce plan

Q4 - On cherche $\mathcal{E}_p$ t.q. $\boxed{\vec{F}_g = -\text{grad}(\mathcal{E}_p)} \Leftrightarrow -\frac{GmM_T}{r^2}\vec{e}_r = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dr}\vec{e}_r \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(r) = -\frac{GmM_T}{r}}$ (+cste)

↓ prise nulle parce que $\mathcal{E}_p \xrightarrow[r\to+\infty]{} 0$

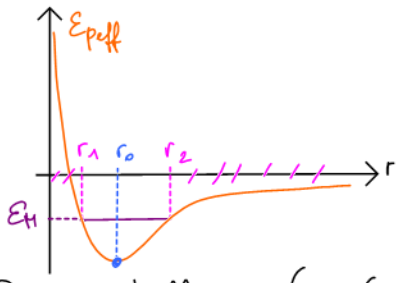
Q5 - La seule force ($\vec{F}_g$) subie par M étant conservative, d'après le TEM, on a $\boxed{\mathcal{E}_M = \text{cste}}$

$\mathcal{E}_M = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{r} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{GmM_T}{r}$

Or $\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v} = mr^2\dot{\theta}\vec{e}_z = \text{cste} \Rightarrow \boxed{r^2\dot{\theta} = \text{cste} = \frac{\mathcal{L}_O}{m}} \Rightarrow \mathcal{E}_M = \boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\mathcal{L}_O^2}{2mr^2} - \frac{GmM_T}{r}}_{\mathcal{E}_{p,eff}(r)}}$

Q6 - $\mathcal{E}_M = \text{cste} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}$ où $\boxed{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geqslant 0} \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_M \geqslant \mathcal{E}_{p,eff}}$ forcément

Q7 -



E_M d'un état lié telle que la trajectoire reste bornée
donc $E_M < 0$ forcément (sinon on peut avoir $r \to +\infty$)
Ici $r > r_2$ et $r < r_1$ interdits (car $E_{peff} > E_M$).

Q8 - * Pour un mvt elliptique (associé à un état lié), on a $E_M = E_{peff}$ aux positions extrêmes (la ⊕ proche : périgée, et la ⊕ lointaine : apogée) de la trajectoire.

* Quand on a $E_M = \min(E_{peff}) = E_{peff}(r_0)$ on a alors forcément $r = r_0$ ($\forall t$) : mvt circulaire

Q9 - Sur l'orbite altimétrique de référence (circulaire de rayon R) :

d'après le PFD appliqué au satellite (m) dans $\mathcal{R}_T$: $m\vec{a} = \vec{F_g} \Rightarrow -m\frac{v^2}{R} = -\frac{GmM_T}{R^2}$ (selon $\vec{e_r}$)

$\Rightarrow$ $\boxed{v_{alt} = \sqrt{\frac{GM_T}{R}}}$

D'où $\boxed{E_{M\,alt} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GmM_T}{R} = -\frac{1}{2}\frac{GmM_T}{R}}$

Q10 - La période de révolution du satellite est alors : $\boxed{T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM_T}}} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}}$ 3e loi de Kepler

Q11 - ⚠ Je pense que cette question n'est pas dans l'esprit du programme, car l'énoncé ne précise pas que l'expression reliant E_M et R obtenue à Q9 reste valable dans le cas d'une orbite elliptique, en remplaçant 2R par 2a (grand-axe de l'ellipse)

* En admettant cela, $\boxed{E_{M\,tra} = -\frac{GmM_T}{2a}}$ où $\boxed{2a = R + R_C}$

* Sinon, on peut utiliser les 2 positions particulières auxquelles $\dot{r} = 0$: en $r = R$ et $r = R_C$

$$\begin{cases} E_{M\,tra} = 0 + \frac{L_0^2}{2mR^2} - \frac{GmM_T}{R} \Rightarrow \frac{L_0^2}{2m} = R^2\left[E_{M\,tra} + \frac{GmM_T}{R}\right] \\ E_{M\,tra} = 0 + \frac{L_0^2}{2mR_C^2} - \frac{GmM_T}{R_C} = \frac{R^2}{R_C^2}\left[E_{M\,tra} + \frac{GmM_T}{R}\right] - \frac{GmM_T}{R_C} \Rightarrow E_{M\,tra}\left[1 - \frac{R^2}{R_C^2}\right] = \frac{GmM_T}{R_C^2}\left[R - R_C\right] \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{E_{M\,tra} = -\frac{GmM_T}{R + R_C}}$

Q12 - $\Delta E_M = E_{M\,tra} - E_{M\,alt} = -GmM_T\left[\frac{1}{R+R_C} - \frac{1}{2R}\right] = -\frac{GmM_T}{2R(R+R_C)}\frac{R-R_C}{} < 0$ car $R > R_C$ $\Rightarrow$ il faut que $E_M \downarrow$

donc, comme au lieu A de ce chgt d'orbite, $E_p = E_p(R)$ reste la même, on a : $\Delta E_M = \Delta E_c < 0$

$\Rightarrow$ il faut donc que $v_{A,tra} < v_{A,alt}$ donc il faut freiner le satellite.

Q13 - De même en P : $\boxed{\Delta E'_M = E_{M\,cim} - E_{M\,tra} = -GmM_T\left[\frac{1}{2R_C} - \frac{1}{R+R_C}\right] = \frac{-GmM_T}{2R_C(R+R_C)}\frac{R-R_C}{} < 0}$ idem

donc par le même raisonnement qu'à Q12, on prévoit que $\Delta E'_c < 0$

$\Rightarrow$ là encore, en P, il faut freiner le satellite pour le faire passer de l'orbite de transfert à l'orbite cimetière.

PROBLÈME 3
Un modèle simplifié de sismographe

Q1. λ représente le coefficient de frottement fluide.

Il s'exprime en kgs^{-1} ou en $Nm^{-1}s$.

Q2. La masse est soumise à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la force de rappel de ressort $\overrightarrow{T}$.

La masse étant en équilibre, le Principe Fondamental de la Dynamique s'écrit : $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$ avec $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_{z'}}$ et $\overrightarrow{T} = -k(\ell_1 - \ell_0)\overrightarrow{u_{z'}}$.

on obtient alors $\ell_1 = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$.

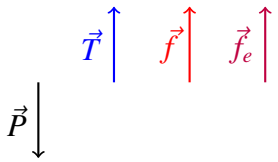
Q3. force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_e} = -m\overrightarrow{a_e} = -m\overrightarrow{a_s}$

force d'inertie de Coriolis $\overrightarrow{f_c} = -m\overrightarrow{a_c} = -2m\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{v_r}$.

comme $\mathcal{R}'$ est animé d'un mouvement de translation par rapport à $\mathcal{R}$, la force d'inertie de Coriolis est nulle car $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$.

Q4. bilan des forces : poids $\overrightarrow{P}$, force de rappel de ressort $\overrightarrow{T}$, force d'inertie d'entraînement $\overrightarrow{f_e}$, force de frottement $\overrightarrow{f}$.

Représentation des forces avec les contraintes de l'énoncé :



Q5. PFD : $\overrightarrow{P}+\overrightarrow{T}+\overrightarrow{f_e}+\overrightarrow{f}=m\overrightarrow{a'}$.

projection : $mg - k(l_1 - l_0 + z') - m\ddot{z}'_s - \lambda\dot{z}' = m\ddot{z}'$

comme $l_1 - l_0 = \dfrac{mg}{k}$ et $\ddot{z}'_s = -E_m\omega^2 cos(\omega t + \Phi)$,

on obtient : $\ddot{z}' + \dfrac{\lambda}{m}\dot{z}' + \dfrac{k}{m}z' = E_m\omega^2 cos(\omega t + \Phi)$

Q6. Par identification on trouve $\omega_0 = \dfrac{k}{m}$ et $Q = \dfrac{\sqrt{km}}{\lambda}$.

ω_0 représente la pulsation propre et Q la facteur de qualité.

Q7. Le terme en $\dfrac{1}{Q}$ devient négligeable et on obtient $\ddot{z}' + \omega_0^2 z' = E_m\omega^2 cos(\omega t + \Phi)$.

Q8. En notation complexe, on pose $\underline{z'} = Z_m exp(j\Phi')exp(j\omega t)$ et $\underline{z'_s} = E_m exp(j\Phi)exp(j\omega t)$.

L'équation précédente permet alors après simplification par $exp(j\omega t)$ et passage au module de trouver $Z_m = E_m \frac{\omega^2}{|\omega_0^2 - \omega^2|}$.

Q9. L'expression précédente s'écrit $Z_m = E_m \frac{u^2}{|1 - u^2|}$.

On vérifie les trois propriétés suivantes :
lorsque $u \longrightarrow 0$, $Z_m \longrightarrow 0$
lorsque $u \longrightarrow \infty$, $Z_m \longrightarrow E_m$
lorsque $u \longrightarrow 1$, $Z_m \longrightarrow +\infty$

Q10. Le phénomène est la résonance.

La zone de fonctionnement du sismographe est la zone III car le mouvement de la masse doit avoir la même amplitude que celui du sol.

Zone III (celle non encore envisagée) : les oscillations sont très amorties. Cela correspond aux amortisseurs des véhicules.