Exercice 1

1. Le fer a une masse volumique de $7,9.10^3$ kg/m^3, une masse molaire de 56 g/mol et possède en moyenne 4 électrons libres par atome. Calculer la densité d'électrons libres et la charge libre par unité de volume.

2. Un courant électrique de 5 A circule dans un conducteur en fer de section 10 mm^2. Calculer la densité de courant (on admet qu'elle est uniforme dans le conducteur) ainsi que la vitesse de déplacement d'ensemble des électrons.

3. La conductivité du fer vaut $9,9.10^6 S.m^{-1}$. Calculer le temps de relaxation associé aux mouvements des électrons libres dans le fer.

4. Calculer la résistance d'un fil de fer de section 1 mm^2 et de longueur 15 m (dans l'approximation où le champ électrique est uniforme dans tout le conducteur).

1. $n^* = \dfrac{4\mu N_A}{M}$ A.N : $n^* = 3,4.10^{29}\ m^{-3}$

$\rho = -n^* e$ A.N : $\rho = -5,4.10^{10}\ C.m^{-3}$

2. $j = \dfrac{i}{S}$ A.N : $j = 5.10^5\ A.m^{-2}$

$v = \dfrac{j}{|\rho|}$ A.N : $v = 9,2.10^{-6}\ m.s^{-1}$

3. $\gamma = \dfrac{n^* e^2 \tau}{m}$ donc $\tau = \dfrac{m\gamma}{n^* e^2}$ A.N : $\tau = 10^{-15}\ s$

4. $R = \dfrac{l}{\gamma S}$ A.N : $R = 1,5\ \Omega$

Exercice 2

L'inductance L d'une bobine est définie par la relation $\phi = LI$, où ϕ est le flux au travers de la bobine du champ magnétique créé par elle-même et I le courant qui circule dans la bobine.

On considère un solénoide comportant N spires, de rayon R et de longueur L. On se place dans l'approximation du solénoide infini.

1. Etablir l'expression du champ magnétique à l'intérieur d'un solénoide infini.
1. Calculer le flux de ce champ au travers d'une spire du solénoide.
2. En déduire le flux au travers des N spires et conclure.

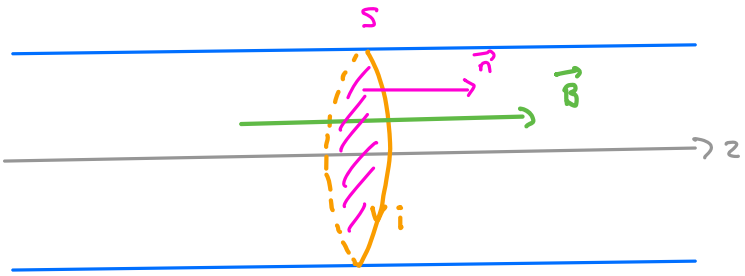
1. cf cours – on trouve $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \, \vec{e_z}$

2. $\vec{B} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \, \vec{e_z}$

$\Rightarrow \phi(\vec{B}/S) = \iint_S \vec{B} \cdot \vec{dS}$

flux de $\vec{B}$ au travers d'une spire $= \iint_S \left(\mu_0 \frac{N}{\ell} i \, \vec{e_z}\right) \cdot \left(dS \, \vec{e_z}\right)$

$= \mu_0 \frac{N}{\ell} i \iint_S dS = \mu_0 \frac{N}{\ell} i \, \pi R^2 \quad (S = \pi R^2)$



3. Pour N spires, on multiplie par N le flux au travers d'une spire, donc

$\phi = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi R^2 i$

Or, par définition, $\phi = Li$, donc

$$L = \frac{\mu_0 N^2 \pi R^2}{\ell}$$

Exercice 3

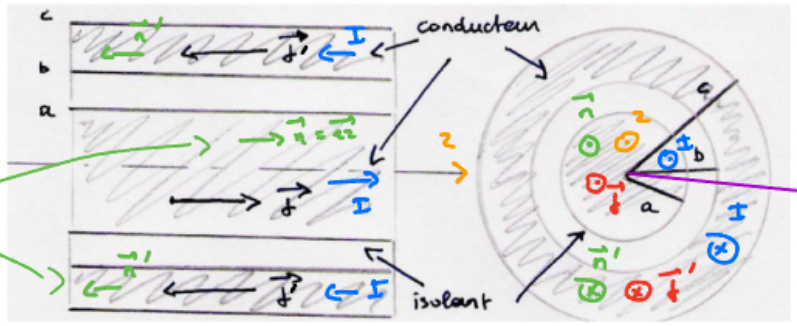
On considère un câble coaxial : Un fil conducteur rectiligne de rayon a est entouré par un matériau isolant (qui se comporte, du point de vue des propriétés magnétiques, comme du vide) entre $r = a$ et $r = b$; puis par un deuxième conducteur entre $r = b$ et r = c

L'ensemble est à géométrie cylindrique (symétrie de révolution autour de l'axe du fil).

Le conducteur central est le siège d'une densité de courant uniforme $\vec{j}$ et l'intensité qui le traverse est notée I. Le conducteur périphérique est traversé par la même intensité, mais dans l'autre sens. La densité de courant y est également considérée comme uniforme.

1. Donner le lien entre la densité de courant et l'intensité. En déduire la densité de courant $\vec{j'}$ dans le conducteur périphérique.

2. On considère le câble comme « infini » en longueur. Déterminer le champ magnétique créé (distinguer différents cas selon la distance par rapport à l'axe).



orientation choisie pour calculer le flux de $\vec{j}$ (ou $\vec{j'}$) au travers d'une surface (donc convention pour l'intensité)

1. $I = j \cdot \pi a^2$ dans le conducteur central

De même, $I = j' \cdot \pi \left(c^2 - b^2\right)$

donc $j' = \dfrac{I}{\pi (c^2 - b^2)}$

2. La géométrie est cylindrique, donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\,\vec{e_\theta}$

symétries, invariances et choix du contour d'Ampère sont les mêmes que pour le fil infini.

Plus en détails :

- symétries : tout plan qui contient (Oz) est plan de symétrie, et $\vec{B} \perp$ plan de sym $\Rightarrow \vec{B}$ selon $\vec{e_\theta}$
- invariances : par translation le long de (Oz) $\Rightarrow$ pas z
  et par rotation autour de (Oz) $\Rightarrow$ pas θ

On choisit comme contour d'ampère un cercle de rayon r, centré sur (Oz).

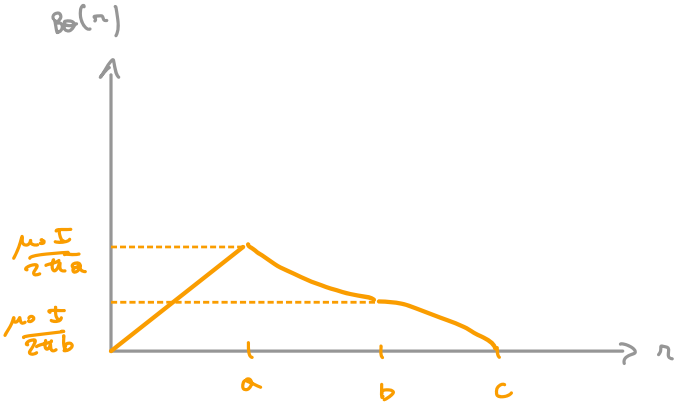
$$\oint_{ce} \vec{B} \cdot \vec{dl} = 2\pi r B_\theta(r)$$

Le courant enlacé dépend de r :

- $r \leq a$: $I_e = j \cdot \pi r^2 = I \dfrac{r^2}{a^2}$
- $a \leq r \leq b$: $I_e = I$
- $b \leq r \leq c$: $I_e = I - j' \pi \left(r^2 - b^2\right) = I \left(1 - \dfrac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)$
- $r \geqslant c$: $I_e = 0$

En appliquant le th d'Ampère, on obtient :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}\vec{e_\theta} & \text{si } r \leq a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{e_\theta} & \text{si } a \leq r \leq b \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\left(1 - \frac{r^2 - b^2}{c^2 - b^2}\right)\vec{e_\theta} & \text{si } b \leq r \leq c \\ \vec{0} & \text{si } r \geq c \end{cases}$$



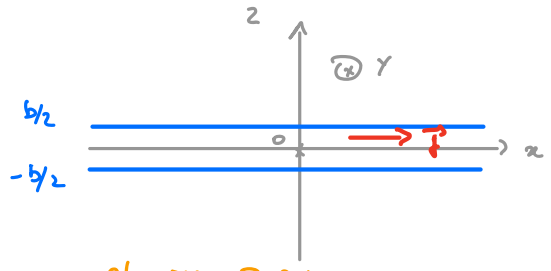
Exercice 4

On considère une nappe plane infinie de courants uniforme d'épaisseur a, en régime stationnaire :

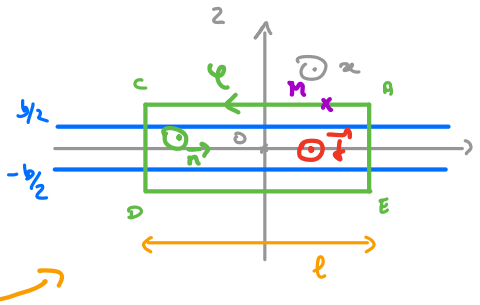
$$\begin{cases} \vec{j} = j_0 \vec{e_x} & \text{si } -a/2 \leq z \leq a/2 \\ \vec{j} = \vec{0} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. A partir des symétries et invariances, vérifier que $\vec{B} = B_y(z)\vec{e_y}$.
2. Calculer $\vec{B}$ (en tout point de l'espace) en utilisant le théorème d'Ampère.
3. On considère maintenant deux nappes (planes et infinies) avec des courants opposés. En s'appuyant sur ce qui précède, mais sans calculs supplémentaires, déterminer le champ magnétique en dehors des nappes.

1.
2.



On met ici l'origine O au milieu du plan chargé.



rotation d'1/4 de tour autour de (Oz)

On se place ici explicitement dans le cas z > 0 (M au dessus du plan (Oxy)).

Symétries : tout plan // (Oxz) est sym → champ selon $\vec{e_y}$

Invariances : translation $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$ → pas x et y

Conclusion : $\vec{B}(M) = B_y(z)\,\vec{e_y}$

Choix du contour d'Ampère : rectangle dans un plan // (Oyz), symétrique par rapport à (Oxy)

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_A^C \vec{B}\cdot\vec{dl} + \underbrace{\int_C^D \vec{B}\cdot\vec{dl}}_{=0} + \int_D^E \vec{B}\cdot\vec{dl} + \underbrace{\int_E^A \vec{B}\cdot\vec{dl}}_{=0}$$

$$\int_A^C \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_A^C \left(B_y(z)\,\vec{e_y}\right)\cdot\left(-dl\,\vec{e_y}\right) = -B_y(z)\int_A^C dl = -B_y(z)\,l$$

et $\int_D^E \vec{B}\cdot\vec{dl} = \int_A^C \vec{B}\cdot\vec{dl}$: à la fois $\vec{B}$ (symétrie / plan (Oxy)) et $\vec{dl}$ sont inversés.

finalement, $\oint \vec{B}\cdot\vec{dl} = -2\,B_y(z)\,l$

Pour le courant enlacé, on doit distinguer 2 cas :

- si $z \geq b/2$: $I_e = j\,b\,l$
- si $0 \leq z \leq b/2$: $I_e = 2\,j\,z\,l$

Donc pour $z \geq b/2$: $-2 B_y(z) \ell = \mu_0 j b \ell \Rightarrow B_y(z) = -\frac{\mu_0 j b}{2}$

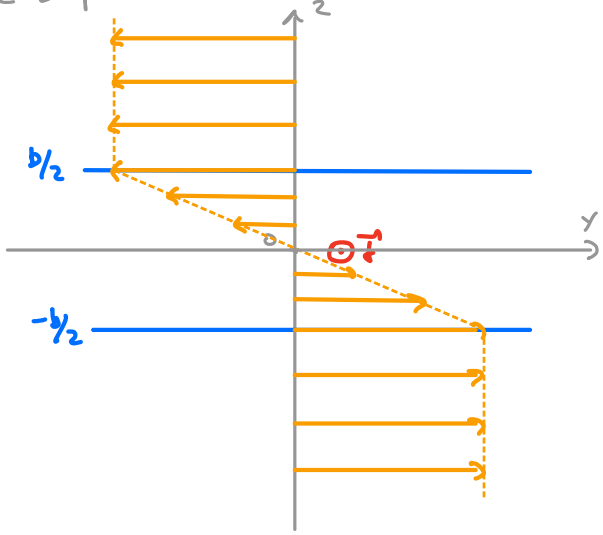
et donc $\vec{B}(M) = -\frac{\mu_0 j b}{2} \vec{e_y}$

pour $0 \leq z \leq b/2$: $-2 B_y(z) \ell = 2 \mu_0 j z \ell \Rightarrow B_y(z) = -\mu_0 j z$

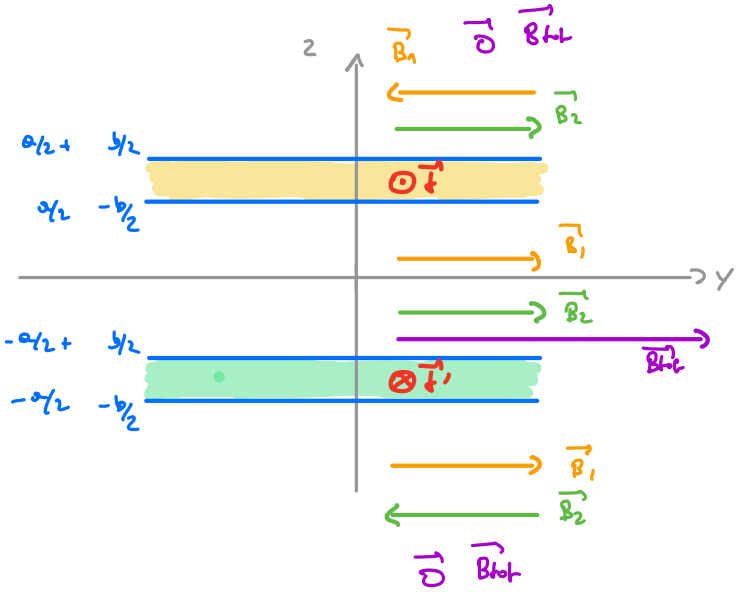
et donc $\vec{B}(M) = -\mu_0 j z \vec{e_y}$

On conclut en n'oubliant pas la symétrie de $\vec{B}$ par rapport à (Oxy) :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 j b}{2} \vec{e_y} & \text{si } z \geq b/2 \\ -\mu_0 j z \vec{e_y} & \text{si } -b/2 \leq z \leq b/2 \\ \frac{\mu_0 j b}{2} \vec{e_y} & \text{si } z \leq b/2 \end{cases}$$



2. On utilise le principe de superposition :



On note $\vec{B_1}$ le champ créé par les courants de la couche "supérieure" et $\vec{B_2}$ celui créé par ceux de la couche "inférieure".

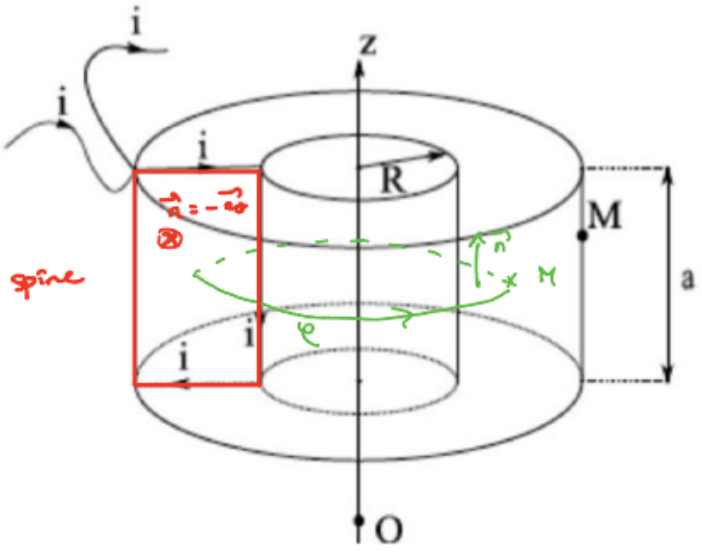
A l'extérieur des couches chargées :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} \mu_0 j b \vec{e_y} & \text{si } -\frac{a}{2} + \frac{b}{2} \leq z \leq \frac{a}{2} - \frac{b}{2} \\ \vec{0} & \text{si } |z| > a/2 + b/2 \end{cases}$$

Exercice 5

La bobine torique représentée ci-contre comporte N spires régulièrement bobinées sur un support torique à section carrée de coté a.

1. La bobine est parcourue par un courant i. Déterminer le champ magnétique.
2. Calculer l'inductance propre de cette bobine.



1. On utilise les coord - polaires

Tout plan qui contient l'axe (Oz) est plan de symétrie $\Rightarrow \vec{B}$ selon $\vec{e_\theta}$

Invariance par rotation autour de (Oz) $\Rightarrow$ pas θ

Donc $\vec{B}(M) = B_\theta(r,z)\,\vec{e_\theta}$

Contour d'Ampère : cercle de rayon r centré sur le fil.

$$\oint_{Ce} \vec{B}\cdot\vec{dl} = 2\pi r\, B_\theta(r,z)$$

Courant enlacé : - si M est à l'intérieur du tore : $I_e = -Ni$

- si M est à l'extérieur du tore : $I_e = 0$

On a donc :

$$\vec{B}(M) = \begin{cases} -\dfrac{\mu_0 N i}{2\pi r}\,\vec{e_\theta} & \text{à l'intérieur} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur} \end{cases}$$

2. Flux au travers d'une spire :

$$\Phi(1\text{spire}) = \iint \vec{B}\cdot\vec{dS} = \iint \left(-\frac{\mu_0 N i}{2\pi r}\vec{e_\theta}\right)\left(-dS\,\vec{e_\theta}\right) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi}\iint \frac{dS}{r}$$

On a $dS = dr\,dz$ donc $\iint \frac{dS}{r} = \int_R^{R+a}\frac{dr}{r}\times\int_0^a dz = \ln\left(\frac{R+a}{R}\right)a$

D'où $\Phi(1\text{spire}) = \frac{\mu_0 N i}{2\pi}\,a\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$

Pour les N spires, on multiplie par N : $\Phi = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right) i$

D'où, puisque $\Phi = Li$,

$$L = \frac{\mu_0 N^2 a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$$

Exercice 6

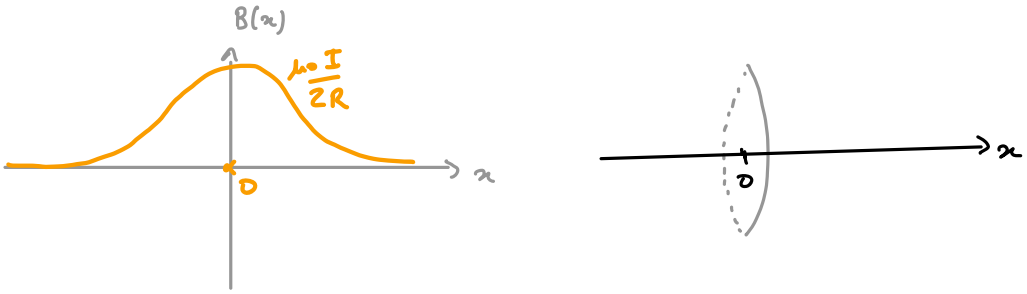
On rappelle l'expression du champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R et parcourue par un courant I sur son axe et à une distance x de son centre :

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

On s'intéresse à une bobine circulaire et plate, que l'on considère comme un ensemble de N spires concentriques dont les rayons sont régulièrement répartis entre deux valeurs extrêmes R_1 et R_2. Cette bobine est parcourue par un courant I.

1. Calculer le champ créé au centre de la bobine.
2. Faire l'application numérique avec $N = 10$; $I = 1A$; $R_1 = 19cm$ et $R_2 = 21cm$.
3. Estimer l'erreur relative commise en considérant cette bobine comme N spires de rayon égal à la moyenne de R_1 et R_2.

1.



Au centre, en $x = 0$, $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$ pour une spire.

On considère N spires entre R_1 et R_2, donc une densité radiale de spires égale à $\frac{N}{R_2 - R_1}$. Pour une épaisseur radiale dR, il y a donc $\frac{N\,dR}{R_2 - R_1}$ spires.

Donc $dB = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{N\,dR}{R_2 - R_1}$ et $B = \int_{bobine} dB = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{N\,dR}{R_2 - R_1} = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dR}{R}$

dB : contribution de l'épaisseur radiale dR au champ ; $\frac{N\,dR}{R_2 - R_1}$: nombre de spires ; $\frac{\mu_0 I}{2R}$: champ pour une spire

$$\Rightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 N I}{2(R_2 - R_1)}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

2. A.N : $B = 3{,}144 \cdot 10^{-5}\ T$

3. Dans ce cas, on peut considérer que les N spires ont toutes le rayon moyen $R = \frac{R_1 + R_2}{2}$

Alors, $B = \frac{\mu_0 N I}{2R}$ A.N : $B = 3{,}142 \cdot 10^{-5}\ T$

L'erreur relative est faible : $\frac{3{,}144 - 3{,}142}{3{,}142} = 6 \cdot 10^{-4}$ (0,06 %)

Exercice 7

On rappelle l'expression du champ magnétique créé par une spire circulaire de rayon R et parcourue par un courant I sur son axe et à une distance x de son centre :

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{x^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

On utilise un dispositif comportant deux bobines plates (assimilables à plusieurs spires confondues) de $N = 20$ spires et de rayon $R = 10cm$, de même axe (Ox) horizontal et dont les centres sont en $x = -R/2$ et $x = +R/2$.

1. Représenter les bobines ainsi que le sens du courant dans chaque bobine pour que le champ magnétique au centre du dispositif (point O, en $x = 0$) soit non nul et dirigé vers les x croissants.
2. Donner l'expression du champ $\overrightarrow{B_0}$ au centre. AN pour $I = 150mA$. Comparer avec l'ordre de grandeur du champ magnétique terrestre.

On place au centre une petite aiguille aimantée qui peut tourner sans frottements autour d'un axe vertical passant par O. On note m le moment magnétique de cette aiguille est notée et J son moment d'inertie.
L'axe (Ox) des bobines est aligné avec la composante horizontale du champ magnétique terrestre $\overrightarrow{B_T}$ (et dans le même sens).

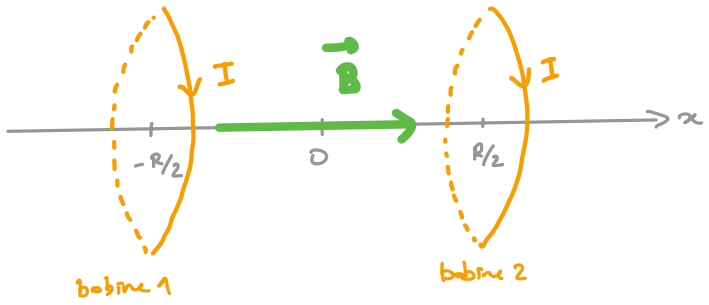
3. Quel est l'effet du champ magnétique sur l'aiguille aimantée ? Identifier la position d'équilibre stable.

4. Donner la période T_1 des petites oscillations de l'aiguille en fonction de J, m, B_0 et B_T.

5. En inversant le sens du courant dans les bobines, la période est modifiée et est notée T_2. Montrer que, connaissant B_0, on peut déduire B_T de la mesure de T_1 et T_2 :

$$B_T = B_0 \frac{T_2^2 - T_1^2}{T_2^2 + T_1^2}$$

1.



2. Contribution de la bobine 1 : $\frac{\mu_0 N I}{2R}\left(1 + \left(\frac{R/2}{R^2}\right)^2\right)^{-3/2} = \frac{\mu_0 N I}{2R}\left(1 + 1/4\right)^{-3/2} = \frac{\mu_0 N I}{2R}\left(\frac{5}{4}\right)^{-3/2}$

$= 0,72$

Contribution de la bobine 2 : $\frac{\mu_0 N I}{2R}\left(1 + \left(\frac{-R/2}{R^2}\right)^2\right)^{-3/2} = \frac{\mu_0 N I}{2R}\left(5/4\right)^{-3/2}$

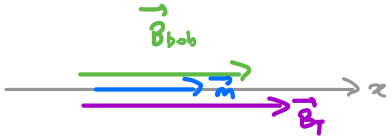
$B_0 = 2 \times \frac{\mu_0 N I}{2R}\left(5/4\right)^{-3/2} \Rightarrow B_0 = \frac{\mu_0 N I}{R}\left(5/4\right)^{-3/2}$

A.N : $B_0 = 2,7 \cdot 10^{-5}$ T

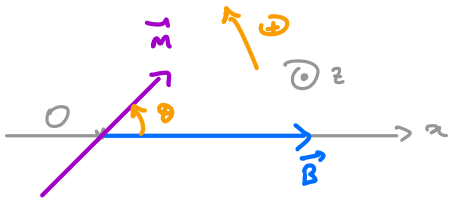
c'est de l'ordre du champ $\vec{B}$ terrestre.

3. Le dipôle a tendance à s'aligner sur le champ.

Equilibre stable : $\vec{m}$ parallèle à $\vec{B}$ (et dans le même sens)



4. Le champ $\vec{B}$ total vaut $\vec{B} = \vec{B}_{bob} + \vec{B}_T = (B_0 + B_T)\,\vec{e_x}$



On utilise le th du moment cinétique pour l'aiguille aimantée :

$\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{m} \wedge \vec{B}$ (pas d'autre moment que celui de la force magnétique, liaison pivot parfaite)

On, $\vec{m} \wedge \vec{B} = -mB\sin\theta\ \vec{e_z}$

On projette sur $\vec{e_z}$: $\frac{dL_{Oz}}{dt} = -mB\sin\theta$

Et $L_{Oz} = J\omega_z = J\dot{\theta}$ $\Rightarrow$ $\frac{dL_{Oz}}{dt} = J\ddot{\theta}$

D'où $J\ddot{\theta} + mB\sin\theta = 0$

Pour de petites oscillations, $\sin\theta \simeq \theta$ $\Rightarrow$ $\boxed{J\ddot{\theta} + mB\theta = 0}$

Soit $\ddot{\theta} + \omega_0^2\,\theta = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{mB}{J}}$ et $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ $\Rightarrow$ $T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}}$

Et donc $\boxed{T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B_0+B_T)}}}$

5. En inversant le sens du courant, $\vec{B}_{bob}$ et $\vec{B}_T$ sont en sens inverse (avec toujours la même direction), donc $\vec{B} = (B_T - B_0)\,\vec{e_x}$.

Admettons que $B_T > B_0$ (pas évident, ça dépend de où on se situe, le champ $\vec{B}$ terrestre, et encore plus sa projection sur un plan horizontal dépend de la latitude).

Alors la position d'équilibre est la même que précédemment,

et $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m(B_T - B_0)}}$

D'où $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{B_T - B_0}{B_T + B_0}$ $\Rightarrow$ $B_0\left(T_1^2 + T_2^2\right) = B_T\left(T_2^2 - T_1^2\right)$

$\Rightarrow$ $\boxed{B_T = B_0\,\frac{T_1^2 + T_2^2}{T_2^2 - T_1^2}}$

Exercice 8

On s'intéresse au champ magnétique créé par une spire de centre O et de rayon R parcourue par un courant I en un point M situé en dehors de l'axe de la spire, mais proche de cet axe. L'axe de la spire est l'axe (Oz) et on repère la position du point M en coordonnées cylindriques $(\mathrm{r}, \theta, \mathrm{z})$.

On rappelle l'expression du champ sur l'axe :

$$B(z) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$$

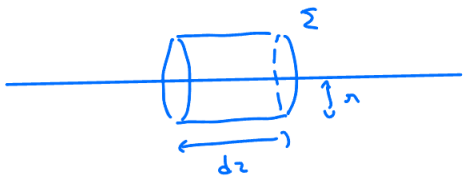
1. Montrer, en utilisant les symétries et invariances, que le champ magnétique en dehors de l'axe n'a pas de composante orthoradiale et que sa norme ne dépend pas de θ.

2. On considère que, pour M proche de l'axe, la composante parallèle à (Oz) du champ magnétique est la même que sur l'axe. Montrer, en utilisant la propriété relative au flux du champ magnétique au travers d'une surface fermée, que $\mathrm{B_r} = -\mathrm{r}/2\ \mathrm{dB_z}/\mathrm{dz}$ et en déduire l'expression complète du champ au voisinage de l'axe.

1- en dehors de l'axe : $\vec{B}(M) = B_r(r,z)\,\vec{u} + B_z(r,z)\,\vec{e_z}$

$= \frac{\mu_0 i}{2R}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-3/2}$

2.



$\phi(\vec{B}/\Sigma| = 0$ donc $B_r(r,z)\cdot 2\pi r\,dz + \left(B_z(r,z+dz) - B_z(r,z)\right)\cdot \pi r^2 = 0$

donc $B_r(r,z) = -\frac{r}{2}\frac{dB_z}{dz} = \frac{3}{4}\frac{\mu_0 i}{R^3} r z \left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)^{-5/2}$