

Leçon II. Lois de l'induction et application

Précédemment, nous avons vu qu'un courant électrique pouvait générer un champ magnétique. Nous allons voir l'effet réciproque : l'apparition d'un courant électrique induit par un champ magnétique, c'est ce qu'on nomme **le phénomène d'induction**.

Nous verrons qu'il y a deux façons de faire apparaître ce phénomène d'induction. Selon ces deux modalités, les applications de l'induction seront différentes.

Dans toute la leçon, nous précisons l'origine du champ magnétique \vec{B} homogène et extérieur au circuit.

II.1. Lois de l'induction

Le phénomène d'induction peut être décrit par deux lois. La grandeur physique sur laquelle repose ces deux lois est le champ magnétique, et plus précisément le flux de ce champ.

II.1.a Flux d'un champ magnétique

Considérons un champ magnétique homogène et extérieur \vec{B} passant par une spire de vecteur surface \vec{S} . Comme le champ et la spire n'ont pas de lien, il n'y a pas d'orientation privilégié du vecteur surface.

Considérons le cas où le vecteur surface \vec{S} de la spire et le champ magnétique \vec{B} forment un angle α comme illustré Figure 4.16.

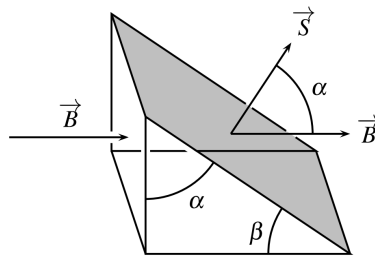


FIGURE 4.16 – Champ magnétique \vec{B} passant au travers d'une spire inclinée de vecteur surface \vec{S} .

♥ Définition

Le flux magnétique, noté φ , est la quantité algébrique correspondant à la surface effective offerte par une spire de vecteur surface \vec{S} au champ magnétique \vec{B} . Il est défini tel que

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S}.$$

Son unité correspond à $T \cdot m^2$, mais l'on préfère utiliser le Weber noté Wb.

Dans le cas de la Figure 4.16, le flux magnétique est

$$\varphi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \alpha.$$

Ainsi, lorsque le vecteur surface d'un circuit est orthogonal au champ magnétique, le flux magnétique est nul.

II.1.b Lois de Faraday

En 1831, Michael Faraday sait, grâce aux travaux d'Ampère, qu'un courant électrique permet de générer un champ magnétique. Il utilise alors ces champs au cours de plusieurs grâce auxquelles il démontre qu'un champ magnétique peut également générer un courant : il découvre le phénomène d'induction.

Il tire de ces expériences une loi phénoménologique.

♥ Définition

Selon la **loi de Faraday**, le courant induit par un champ magnétique \vec{B} dans un circuit électrique de vecteur surface \vec{S} est égal au courant induit par un générateur fictif de force électromotrice telle que

$$e = -\frac{d\varphi}{dt}$$

avec e la force électromotrice induite, ou f.é.m induite, et φ le flux du champ magnétique au travers du circuit.

👉 Nota bene

Comment placer le générateur fictif de f.é.m induite e sur un schéma ?

On utilise la convention générateur : la flèche de tension de e est dans le même sens que la flèche du courant i qui parcourt le circuit électrique. Le sens du courant i étant lui-même donné par le vecteur surface \vec{S} choisi pour le circuit et par la règle de la main droite.

Si on développe la loi de Faraday, il vient que

$$e = -\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d}{dt}(\vec{B} \cdot \vec{S}).$$

On constate alors qu'il y a plusieurs manières d'obtenir une f.é.m e non nul dans un circuit électrique en présence d'un champ magnétique.

On peut faire varier le champ magnétique \vec{B} en maintenant le vecteur surface \vec{S} : **le circuit est alors fixe et le champ variable**, et la f.é.m est

$$e = -\vec{S} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}.$$

On peut faire varier le vecteur surface \vec{S} en maintenant le champ magnétique \vec{B} constant : **le circuit est alors mobile ou se déforme et le champ stationnaire**, et la f.é.m est

$$e = -\vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt}.$$

On n'étudiera pas le cas où le champ magnétique \vec{B} et le vecteur surface \vec{S} sont tous deux variables.

Vérifions la loi de Faraday en étudions deux expériences qu'il a menées.

• **Circuit fixe et champ variable**

On choisit un vecteur surface \vec{S} normale aux spires de la bobine. On obtient alors un sens pour l'intensité du courant i pouvant parcourir la bobine. On branche un ampèremètre afin de mesurer positivement cette intensité.

On approche un aimant de moment magnétique \mathcal{M} orienté vers la bobine, il génère donc un champ magnétique \vec{B}_a orienté vers la bobine.

Calculons le flux de ce champ φ_a au travers des spires de la bobine. Ici, le circuit (la bobine) est fixe et le champ est mobile. On considère que le champ est homogène au niveau de la bobine, il vient que

$$\varphi_a = \vec{B}_a \cdot N\vec{S} = -B_a NS$$

avec N le nombre de spires de la bobine.

D'après la loi de Faraday, il vient que la f.é.m au bornes du circuit est

$$e = -\frac{d\phi_a}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B_a NS) = NS \frac{dB_a}{dt}.$$

Si la valeur du champ augmente, c'est-à-dire si on approche l'aimant, alors la f.é.m est positive ainsi que le courant induit $i = \frac{e}{R}$, avec R la résistance de la bobine.

Si la valeur du champ augmente, c'est-à-dire si on éloigne l'aimant, alors la f.é.m est négative ainsi que le courant induit $i = \frac{e}{R}$.

C'est bien ce qu'a constaté Michael Faraday comme cela est illustré Figure 4.17.

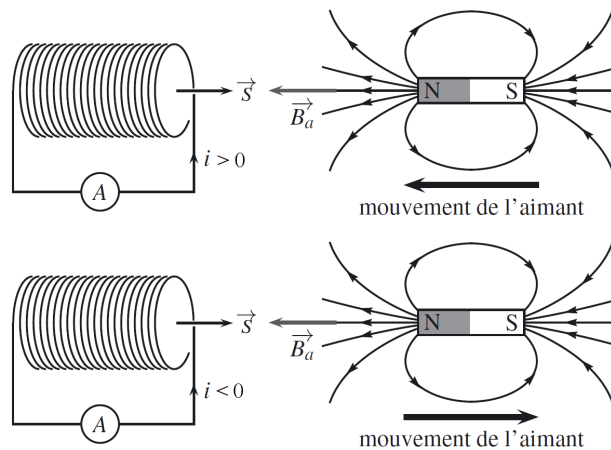


FIGURE 4.17 – Courant induit dans un circuit fixe par un champ mobile.

• Circuit mobile et champ fixe

On remplace l'aimant utilisé précédemment par une autre bobine parcourue par un courant stationnaire d'intensité I . D'après la leçon Le champ magnétique et ses actions, on sait que cette deuxième bobine produit donc un champ magnétique \vec{B}_b dont l'orientation est donné par le sens du courant I et la règle de la main droite.

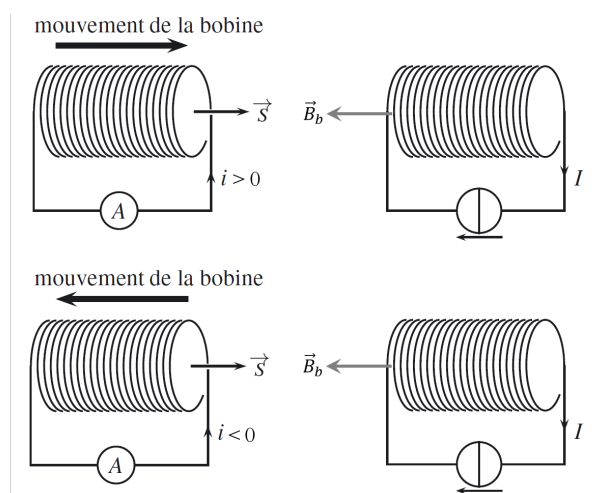


FIGURE 4.18 – Courant induit dans un circuit mobile par un champ fixe.

Calculons le flux de ce champ ϕ_b au travers des spires de la première bobine. Ici, le circuit (la bobine) est mobile et le champ \vec{B}_b est fixe. On considère que le champ est homogène au niveau de la bobine, il vient

que

$$\varphi_b = \vec{B}_b \cdot N \vec{S} = -B_b NS$$

avec N le nombre de spires de la bobine.

D'après la loi de Faraday, il vient que la f.é.m au bornes du circuit est

$$e = -\frac{d\varphi_b}{dt} = -\frac{d}{dt}(-B_b NS) = NS \frac{dB_b}{dt}.$$

Même si le circuit est mobile, le vecteur surface ne change pas quand on translate la première bobine : il conserve sa norme, son orientation et son sens. Ce qui varie est la valeur du champ magnétique \vec{B}_b au niveau de la première bobine, quand elle s'approche il augmente, quand elle s'éloigne il diminue.

Si la valeur du champ augmente, c'est-à-dire si on approche la première bobine, alors la f.é.m est positive ainsi que le courant induit $i = \frac{e}{R}$, avec R la résistance de la bobine.

Si la valeur du champ diminue, c'est-à-dire si on éloigne l'aimant, alors la f.é.m est négative ainsi que le courant induit $i = \frac{e}{R}$.

On constate dans cette deuxième expérience, que le courant induit i dans la première bobine est opposé au courant inducteur I , courant générant le champ magnétique au niveau de la deuxième bobine, lorsque les bobines se rapprochent.

De même, on constate que le courant induit i dans la première bobine est orienté dans le même sens que le courant inducteur I de la deuxième bobine lorsque les bobines s'éloignent.

À partir de ce constat, et d'autres issus de différentes expériences impliquant le phénomène d'induction, un physicien du nom Heinrich Lenz en a tiré une loi empirique qualitative.

II.1.c Loi de Lenz

♥ Définition

La loi de Lenz impose que les phénomènes d'induction s'opposent, par leur effets, aux causes qui leur ont donné naissance.

Dans l'exemple précédent, quand la première bobine s'approche de la deuxième, la norme du champ magnétique \vec{B}_b augmente au niveau de la première bobine, cette augmentation provoque l'apparition d'un courant induit i . Or on sait qu'un courant parcourant une bobine provoque un champ magnétique dans le sens est donné par la règle de la main droite. On constate ici que ce champ induit, dû au champ inducteur \vec{B}_b , lui est opposé.

Le champ magnétique total, somme des champ inducteur et champ induit, est alors plus faible que le champ inducteur \vec{B}_b seul : l'augmentation du champ inducteur \vec{B}_b est compensée par la présence du champ induit, donc le courant induit est de moins en moins important. **Le phénomène d'induction, la production d'un champ magnétique induit, s'oppose au champ inducteur qui lui a donné naissance.**

À partir des lois de l'induction, on va s'intéresser plus particulièrement aux phénomènes d'induction impliquant un circuit fixe dans un champ magnétique variable.

II.2. Circuit fixe dans un champ magnétique variable

Ce phénomène d'induction est le principe à la base des plaques de cuisson à induction ou de la recharge sans fil de téléphone.

11.2.a Auto-induction

Considérons un circuit simple, une spire parcourue par un courant d'intensité électrique i . On a vu qu'un tel circuit génère un champ magnétique \vec{B} dont le sens était donné par le sens du courant et la règle de la main droite comme illustré Figure 4.19

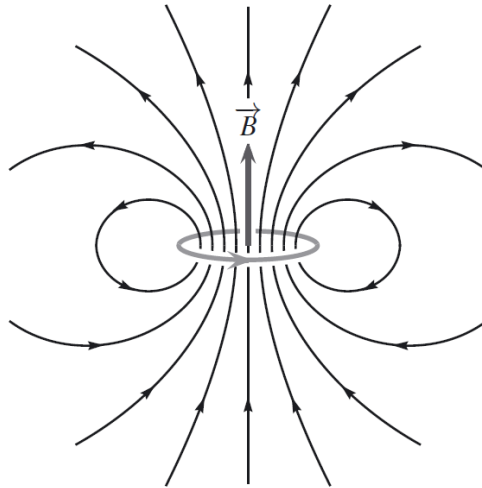


FIGURE 4.19 – Lignes de champ magnétique d'une spire de courant.

Or, ce champ magnétique, comme ces lignes de champ traverse la spire de vecteur surface \vec{S} , crée un flux magnétique au travers de la spire. On nomme ce flux, **le flux propre** du champ produit par le circuit noté φ_p .

L'expression de ce flux est complexe car le champ \vec{B} n'est pas nécessairement uniforme sur toute la surface de la spire, toute fois φ_p est proportionnel à la norme de \vec{B} , lui-même proportionnel au courant i .

♥ Définition

Le flux propre noté φ_p est le flux à travers un circuit de son propre champ magnétique, il est tel que

$$\varphi_p = Li$$

où i est l'intensité du courant parcourant le circuit et L **le coefficient d'auto-induction** ou **l'inductance propre** du circuit.

👉 Nota bene

Il s'agit de la même inductance L utilisée en électrocinétique. On constate que son unité, le Henry notée H est telle que

$$[\varphi_p] = [Li]$$

$$[BS] = H \times A$$

$$T \cdot m^{-2} = H \cdot A$$

soit $H = T \cdot A^{-1} \cdot m^{-2}$.

Comme le champ magnétique \vec{B} généré par un circuit est orienté dans le même sens que le vecteur surface du circuit \vec{S} , le flux propre φ_p est du même signe que le courant i , donc l'inductance est également positive.

Considérons une bobine de longueur l constituée de N spires parcourues par un courant d'intensité i .

On a vu, en négligeant les effets de bord, que le champ magnétique \vec{B} généré au centre de la bobine était

$$\vec{B} = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{l} i.$$

Le flux propre du champ produit par le circuit au travers d'une seule spire est

$$\varphi_1 = \vec{B} \cdot \vec{S} = \mu_0 \frac{N}{l} S i$$

et le flux propre, soit le flux du champ produit par le circuit au travers de toutes les spires est

$$\varphi_p = \vec{B} \cdot N \vec{S} = \mu_0 \frac{N^2}{l} S i.$$

Or on a défini l'inductance d'un circuit tel que

$$\varphi_p = L i$$

on identifie alors l'inductance d'une bobine telle que

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{l} S.$$

Nota bene

On constate que l'unité de la perméabilité du vide est liée à l'unité de l'inductance

$$[L] = [\mu_0] \cdot \left[\frac{N^2}{l} S \right]$$

$$H = [\mu_0] \cdot m$$

soit $[\mu_0] = H \cdot m^{-1}$. La perméabilité peut-être vue comme une inductance linéique.

Ainsi, n'importe quel circuit fermé et parcouru par un courant d'intensité i est sujet à un flux magnétique propre φ_p . Si cette intensité est variable, il vient que le flux propre est également variable, soit

$$\varphi_p(t) = L i(t).$$

D'après la loi de Faraday, il y a alors production d'une f.é.m e dans le circuit telle que

$$e = - \frac{d\varphi_p}{dt}$$

soit

$$e = -L \frac{di(t)}{dt}$$

en supposant que l'inductance L du circuit ne dépend pas du temps, soit que le circuit ne se déforme pas.

Si on adopte **la convention récepteur** pour le circuit plutôt que la convention générateur, c'est-à-dire, que l'on exprime la force contre-électromotrice, f.c.é.m noté e' , il vient

$$e' = -e = L \frac{di(t)}{dt}.$$

On retrouve la loi de la bobine.

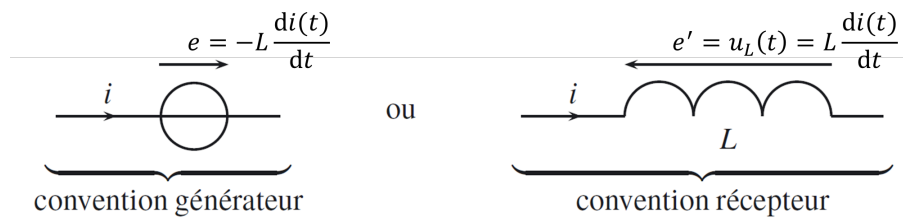


FIGURE 4.20 – Schéma électrique équivalent pour l’auto-induction.

Afin d’obtenir la puissance magnétique $\mathcal{P}_{mag}(t)$ stockée dans ce circuit, on multiplie la loi de la bobine par l’intensité du courant i , ainsi

$$\mathcal{P}_{mag}(t) = e' \times i(t) = L \frac{di(t)}{dt} \times i(t) = \frac{1}{2} L \frac{di^2(t)}{dt}$$

comme l’énergie magnétique $\mathcal{E}_{mag}(t)$ stockée dans le circuit est liée par la relation

$$\mathcal{P}_{mag}(t) = \frac{d\mathcal{E}_{mag}(t)}{dt}$$

il vient que

$$\mathcal{E}_{mag}(t) = \frac{1}{2} Li^2(t).$$

II.2.b Induction mutuelle

Dans la partie précédente, nous avons étudié l’influence d’un champ magnétique produit par un circuit sur lui même. Dans cette partie, nous allons étudier l’influence d’un champ magnétique produit par un premier circuit sur un second circuit.

Considérons un circuit 1 parcouru par un courant d’intensité i_1 . Il y a alors génération d’un champ magnétique \vec{B}_1 dont les lignes de champs sont illustrées Figure 4.21.

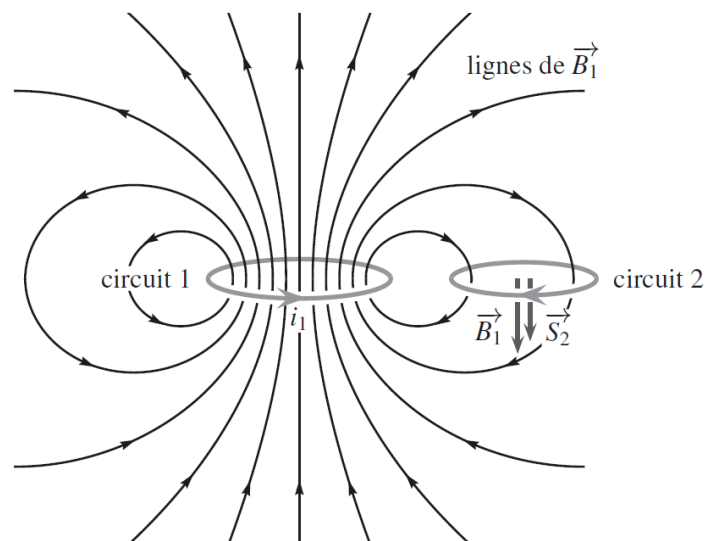


FIGURE 4.21 – Deux circuits magnétiquement couplés.

On place un autre circuit 2 dans la champ magnétique \vec{B}_1 . On oriente le vecteur surface \vec{S}_2 de ce circuit dans le même sens que le champ magnétique \vec{B}_1 . L'expression du flux du champ \vec{B}_1 au travers du circuit 2, noté $\varphi_{1 \rightarrow 2}$, est complexe car le champ n'est pas nécessairement uniforme sur toute la surface du circuit. Toute fois $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ est proportionnel à la norme de \vec{B}_1 , lui-même proportionnel au courant i_1 .

On peut donc affirmer que le flux $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ est proportionnel à i_1 ce qui s'écrit

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = M_{1 \rightarrow 2} i_1$$

avec $M_{1 \rightarrow 2}$ un coefficient qui s'exprime en Henry.

Et si le circuit 2 est lui-même parcouru par un courant d'intensité i_2 , il crée aussi un champ magnétique \vec{B}_2 qui a un flux au travers du circuit 1 noté $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ proportionnel à i_2 tel que

$$\varphi_{2 \rightarrow 1} = M_{2 \rightarrow 1} i_2.$$

♥ Définition

On admet que l'**inductance mutuelle** noté M entre deux circuits 1 et 2 est défini tel que

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \text{et} \quad \varphi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$$

avec $\varphi_{1 \rightarrow 2}$ et $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ les flux magnétiques envoyés réciproquement par les circuits 1 et 2 l'un à travers l'autre.

On constate, lorsque deux circuits sont magnétiquement couplés, que le flux magnétique au travers d'un des circuits est proportionnel à l'intensité du courant dans l'autre circuit.

Prenons l'exemple de deux bobines imbriquées l'une dans l'autre comme illustrés Figure 4.22.

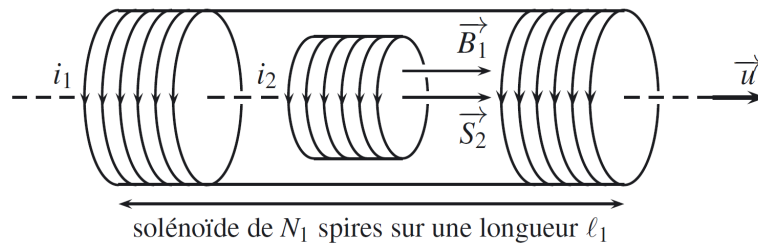


FIGURE 4.22 – Bobines imbriquées l'une dans l'autre (la partie centrale de la bobine 1 n'est pas représentée).

On néglige les effets de bords dans le cas des deux bobines. La bobine 1 génère un champ magnétique \vec{B}_1 tel que

$$\vec{B}_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1$$

avec N_1 et l_1 le nombre de spires et la longueur de la bobine 1.

Le flux magnétique de ce champ au travers de la bobine 2 est tel que

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = \vec{B}_1 \cdot N_2 \vec{S}_2$$

avec N_2 le nombre de spires de la bobine 2. Si on oriente le vecteur surface \vec{S}_2 dans le sens du champ \vec{B}_1 , il vient que

$$\varphi_{1 \rightarrow 2} = B_1 N_2 S_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} i_1 S_2.$$

on identifie alors l'inductance mutuelle des deux bobines telle que

$$M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l_1} S_2.$$

On constate que le signe de l'inductance mutuelle M est arbitraire : elle dépend de l'orientation relative des deux circuits.

On généralise les résultats précédents en considérant deux circuits 1 et 2 quelconque.

Si on recense les flux magnétiques traversant le circuit 1 il vient que le flux magnétique total au travers du circuit 1 noté φ_1 est

$$\varphi_1 = \varphi_{p,1} + \varphi_{2 \rightarrow 1}$$

avec $\varphi_{p,1}$ le flux propre du circuit 1 et $\varphi_{2 \rightarrow 1}$ le flux magnétique dû au circuit 2. Il vient alors que

$$\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2$$

avec L_1 l'inductance propre du circuit 1.

Si les deux intensités parcourant les circuits 1 et 2 sont variables, alors, d'après la loi de Faraday, la f.é.m aux bornes du circuit 1 notée e_1 est

$$e_1 = -\frac{d\varphi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}.$$

En effectuant la même étude pour le circuit 2, il vient que

$$\varphi_2 = \varphi_{p,2} + \varphi_{1 \rightarrow 2}$$

et

$$e_2 = -\frac{d\varphi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}.$$

On peut réaliser le schéma électrique du couplage magnétique entre les deux circuits, soit en convention générateur tel que représenté Figure 4.23

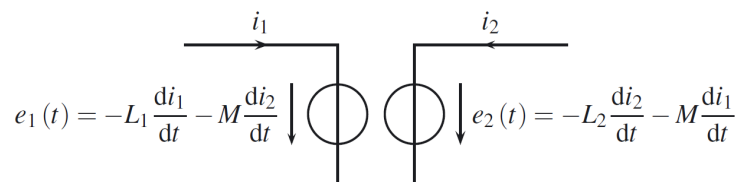


FIGURE 4.23 – Schéma électrique équivalent au couplage magnétique de deux circuits en convention générateur.

soit en convention récepteur tel que représenté Figure 4.24. Dans ce cas les tensions aux bornes des circuits correspond aux f.c.é.m u_1 et u_2 telles que

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}.$$

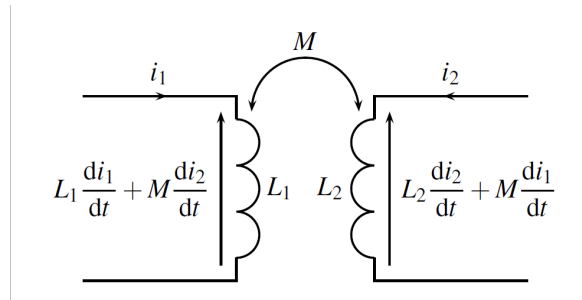


FIGURE 4.24 – Schéma électrique équivalent au couplage magnétique de deux circuits en convention récepteur.

Dans les deux cas on représente deux circuits couplés par mutuelle inductance par **un quadripôle** : composant relié par quatre fils.

Étudions deux bobines réelles schématisées par des résistances R_1 et R_2 et des bobines idéales d'inductances propres L_1 et L_2 , couplées par mutuelles induction comme cela est schématisés Figure 4.25. On impose aux bornes de la première bobine, une tension sinusoïdale $v_1(t) = V_0 \cos(\omega t)$.

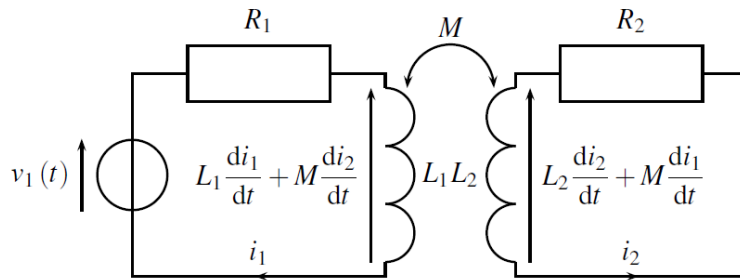


FIGURE 4.25 – Schéma électrique de deux bobines réelles en mutuelle inductions.

On applique la loi des mailles dans les deux circuits, il vient que

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases}.$$

Grâce à la méthode complexe, on peut étudier le circuit en régime permanent. Il vient que

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = R_1 \underline{i}_1 + j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2 \\ 0 = R_2 \underline{i}_2 + j\omega L_2 \underline{i}_2 + j\omega M \underline{i}_1 \end{cases}.$$

La deuxième équation nous permet d'obtenir une relation entre \underline{i}_1 et \underline{i}_2 , soit

$$\underline{i}_2 = -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \underline{i}_1.$$

On peut alors injecter cette relation dans la première équation, il vient que

$$\underline{v}_1 = R_1 \underline{i}_1 + j\omega L_1 \underline{i}_1 + j\omega M \left(-\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \underline{i}_1 \right)$$

soit

$$\underline{v}_1 = \left(R_1 + j\omega + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2} \right) \underline{i}_1.$$

On constate, dans le cas de deux bobines en mutuelle induction, que la bobine 1 est équivalente à un dipôle d'impédance \underline{Z} tel que

$$\underline{Z} = R_1 + j\omega + \frac{\omega^2 M^2}{R_2 + j\omega L_2}$$

soit un dipôle dont les caractéristiques dépendent à la fois de la bobine 1 et de la bobine 2.

On mène un bilan de puissance en utilisant les deux équations précédentes et en les multipliant par i_1 et i_2 respectivement, il vient que

$$\begin{cases} v_1 i_1 = R_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + M i_1 \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_2 \frac{di_1}{dt} \end{cases} .$$

Soit en faisant la somme des deux équations

$$v_1 i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M i_1 \frac{di_2}{dt} + M i_2 \frac{di_1}{dt}$$

soit

$$v_1 i_1 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{d}{dt} \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + M \frac{di_1 i_2}{dt} .$$

On peut interpréter les différents termes de cette équation comme des puissances et une énergie particulière :

- $\mathcal{P}_g = v_1 i_1$ est la puissance fournie par le générateur notée ;
- $\mathcal{P}_J = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2$ est la puissance perdue par effet Joule au travers des résistances des circuits ;
- $\mathcal{E}_{mag} = L_1 i_1^2 + L_2 i_2^2 + M i_1 i_2$ est l'énergie magnétique stockée par les deux circuits couplés par mutuelle induction.

II.3. Circuit mobile dans un champ magnétique stationnaire

Dans cette section nous allons étudier les circuits mobiles dans des champs magnétiques extérieurs stationnaires. Ces dispositifs sont considérés comme des générateurs lorsqu'ils transforment une puissance mécanique en puissance électrique, soit considérés comme des moteurs lorsqu'ils transforment une puissance électrique en puissance mécanique.

II.3.a Rails de Laplace générateur

On reprend l'étude des deux rails de Laplace parallèles OA et $O'A'$ sur lequel se trouve, en contact électrique, une tige \mathcal{S} de masse m . Le circuit électrique $OO'MN$ formé des rails et de la tige est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = B\vec{u}_y$ comme cela est illustré Figure 4.26.

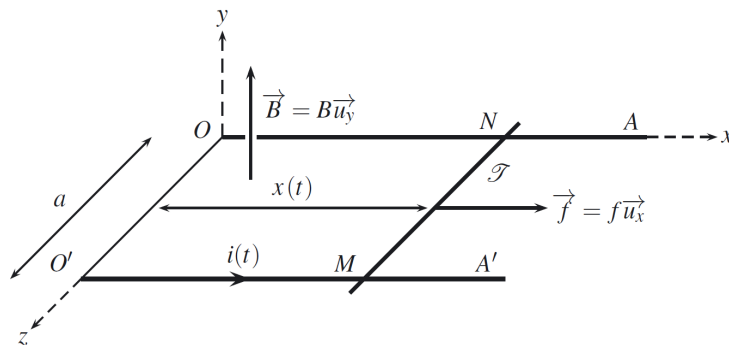


FIGURE 4.26 – Rails de Laplace générateur.

À l'aide des notions étudiées plus tôt, on peut prédire les phénomènes physiques qui apparaissent lorsqu'un opérateur applique une force de traction constante $\vec{f} = f\vec{u}_x$ sur la tige. On néglige ici les frottements entre la tige et les rails.

Si la tige \mathcal{T} bouge alors le vecteur surface \vec{S} du circuit augmente. Ce dernier est orienté dans le même sens que le champ magnétique d'après l'orientation du courant $i(t)$ choisi. Ainsi, d'après la loi de Faraday, la variation du flux magnétique dans le circuit est

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \vec{B} \cdot \frac{d\vec{S}(t)}{dt} = B \frac{dS(t)}{dt}.$$

Ainsi il apparaît une force électromotrice, f.é.m e dans le circuit qui est telle que

$$e = -\frac{d\varphi(t)}{dt} = -B \frac{dS(t)}{dt} = -B \frac{dax(t)}{dt} = -Ba\dot{x}.$$

♥ Définition

Afin d'obtenir l'équation du mouvement d'un objet impliqué dans un phénomène d'induction il faut exploiter **deux équations couplées, dont la première est l'équation électrique** que respecte le circuit impliqué.

Pour l'obtenir on applique la loi des mailles sur ce circuit afin de lier la f.é.m e et l'intensité $i(t)$ du circuit.

Dans notre **l'équation électrique** (EE) est

$$e(t) - Ri(t) = 0 \quad (EE)$$

soit

$$-Ba\dot{x} = Ri(t)$$

donc

$$i(t) = -\frac{Ba}{R}\dot{x}.$$

♥ Définition

Afin d'obtenir l'équation du mouvement d'un objet impliqué dans un phénomène d'induction il faut exploiter **deux équations couplées, dont la deuxième est l'équation mécanique** que respecte le circuit impliqué.

Pour l'obtenir on applique le PFD sur la partie mobile du circuit afin de relier le courant du circuit électrique i et la vitesse de la partie mobile.

Dans notre cas il vient que les forces exercés sur la tige \mathcal{T} sont la force appliquée par l'opérateur

$$\vec{f} = f\vec{u}_x$$

et la force de Laplace

$$\vec{f}_L = i\vec{MN} \wedge \vec{B}.$$

Grâce à l'équation électrique, on peut exprimer l'intensité i , il vient que

$$\vec{f}_L = iBa(-\vec{u}_z) \wedge \vec{u}_y = iBa\vec{u}_x$$

soit

$$\vec{f}_L = -\frac{(Ba)^2}{R} \dot{x} \vec{u}_x.$$

On constate que la force de Laplace induite s'oppose au mouvement de la tige \mathcal{T} : cela est **conforme à la loi de Lenz**, les phénomènes d'induction, ici le courant induit et la force de Laplace, s'oppose aux causes qui les ont produits, soit le mouvement de la tige qui modifie le circuit.

Il ne reste plus qu'à appliquer le PFD sur la tige \mathcal{T} , soit **obtenir l'équation mécanique (EM)**

$$m\ddot{x} \vec{u}_x = \vec{f}_L + \vec{f} \quad (EM)$$

soit

$$m\ddot{x} = -\frac{(Ba)^2}{R} \dot{x} + f \quad \text{ou} \quad \frac{mR}{(Ba)^2} \frac{d\dot{x}}{dt} + \dot{x} = \frac{fR}{(Ba)^2}.$$

On reconnaît l'expression d'une équation différentielle du second ordre d'inconnue \dot{x} . On a vu auparavant comment la résoudre afin d'obtenir la solution générale

$$\dot{x} = \frac{fR}{(Ba)^2} + Ke^{-t/\tau}$$

avec K une constante d'intégration qu'on obtient à partir de la condition initiale sur \dot{x} et τ le temps caractéristique de variation de \dot{x} telle que

$$\tau = \frac{mR}{(Ba)^2}.$$

Si la vitesse de la tige est nulle initialement, il vient que

$$0 = \frac{fR}{(Ba)^2} + Ke^{-0/\tau}$$

donc

$$K = -\frac{fR}{(Ba)^2}.$$

La vitesse de la tige est donc telle que

$$\dot{x} = \frac{fR}{(Ba)^2} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

On constate que lorsque $t \rightarrow \infty$, la tige atteint une vitesse limite notée v_∞ telle que

$$v_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \dot{x} = \frac{fR}{(Ba)^2}$$

on peut écrire

$$\dot{x} = v_\infty \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

On peut alors obtenir l'intensité du courant dans le circuit $OO'MN$

$$i = -\frac{Ba}{R} \dot{x}$$

soit

$$i = -\frac{f}{Ba} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

On peut effectuer le bilan de puissance du système.

Pour ce faire on considère les équations électrique et mécanique et on les multiplie respectivement par l'intensité $i(t)$ et la vitesse $\dot{x}(t)$, soit

$$\begin{cases} (EE) \times i \longrightarrow ei - Ri^2 = 0 \\ (EM) \times \dot{x} \longrightarrow m\dot{x}\ddot{x} = f_L\dot{x} + f\dot{x}. \end{cases}$$

soit, comme $e = -Ba\dot{x}$ et $f_L = iBa$, il vient que

$$\begin{cases} -iBa\dot{x} - Ri^2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}\right) = iBa\dot{x} + f\dot{x}. \end{cases}$$

On voit le terme de couplage $iBa\dot{x}$ qui apparaît dans les deux équations. On peut l'utiliser pour lier les deux équations en les sommant

$$\begin{cases} Ri^2 = -iBa\dot{x} \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}\right) = iBa\dot{x} + f\dot{x}. \end{cases}$$

ce qui donne

$$Ri^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}\right) = f\dot{x}.$$

On obtient alors l'équation explicitant tous les termes de puissances impliqués dans le problème.

- $\mathcal{P} = f\dot{x}$ est la puissance fournie par l'opérateur qui se répartit
- en puissance cinétique de la tige $\mathcal{T} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m\dot{x}\right) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}_c$
- et en puissance dissipée par effet Joule $\mathcal{P}_J = Ri^2$.

Le fait que la puissance mécanique fournie par l'opérateur se transforme, en partie, en puissance électrique utilisable (ici utilisé par la résistance du circuit) justifie le qualificatif **générateur** pour les rails de Laplace dans cette étude.

On remarque qu'en régime permanent soit, $\dot{x} = \text{cst}$ donc $\frac{d}{dt} \mathcal{E}_c = 0$, et $i = \text{cst}$, alors toute la puissance mécanique fournie par l'opérateur est transformée en puissance électrique.

11.3.b Freinage par induction

Si on reprend le cas précédent, on a mis en évidence que la force de Laplace se mettait sous la forme

$$\vec{f}_L = -\frac{(Ba)^2}{R} \dot{x} \vec{u}_x.$$

On voit que la force de Laplace est opposé au mouvement de la tige et qu'elle a la forme d'une force de frottements fluide $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$. Il s'agit d'une **force de freinage**.

Comme on l'a expliqué, il s'agit d'une manifestation de **la loi de Lenz** : la force magnétique qui apparaît à cause du phénomène d'induction s'oppose au mouvement du conducteur qui a été la cause du phénomène d'induction.

On retiendra que dans tous les dispositifs où il y a conversion de puissance mécanique en puissance électrique, l'action mécanique de Laplace est une action de freinage qu'on pourra généralement mettre sous la forme d'une force de frottements fluides.

Applications

- freinage par induction utilisé par les TGV et les camions
- récupération lors du freinage d'une énergie électrique.

11.3.c Alternateur

Un alternateur sert à transformer une puissance mécanique en une puissance électrique. Ce dispositif est par exemple utilisé sur les vélos, dont une roue entraîne en rotation l'alternateur qui alimente des ampoules ou une batterie. On peut aussi citer les centrales électriques, où l'alternateur est entraîné par de la vapeur (centrales thermiques), de l'eau sous pression (centrales nucléaires françaises), de l'eau en écoulement (centrales hydrauliques).

Nous allons modéliser un alternateur par une spire rectangulaire de surface S , conductrice de résistance R dont on néglige l'auto-induction. Cette spire constitue un **rotor** en liaison pivot considérée parfaite d'axe (Oy) par rapport au **stator** fixe. Elle est entraînée en rotation par une force extérieure (la roue d'un vélo, de la vapeur d'eau ou de l'eau en écoulement) avec une vitesse angulaire ω considérée constante. Le moment d'inertie de la spire est noté J .

On plonge alors cette spire tournant dans un champ magnétique uniforme et stationnaire extérieur \vec{B} perpendiculaire à l'axe (Oy) comme illustré ??.

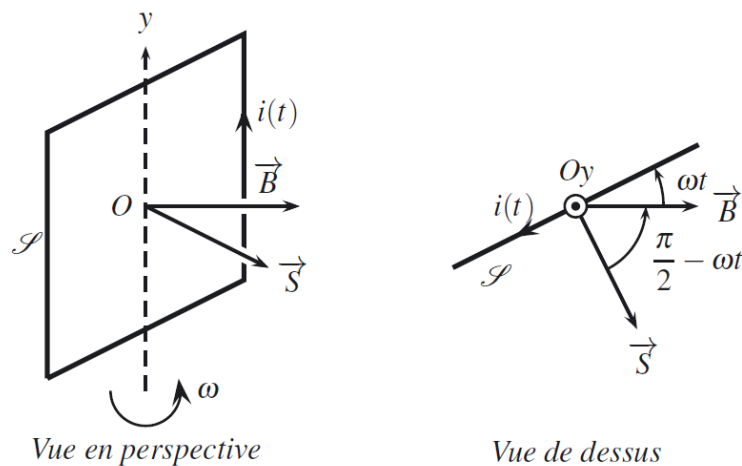


FIGURE 4.27 – Schéma de principe de l'alternateur

On a choisi arbitrairement le sens du vecteur surface \vec{S} et donc celui du courant qui la parcourt à l'aide de la règle de la main droite.

On peut alors exprimer le flux de champ magnétique qui traverse la spire, soit

$$\varphi(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) = BS \sin(\omega t)$$

en considérant qu'à l'instant initial de l'étude le vecteur surface de la spire est perpendiculaire au champ magnétique extérieur.

D'après la loi de Faraday, la f.é.m induite dans la spire est

$$e = -\frac{d\varphi(t)}{dt} = -BS\omega \cos(\omega t).$$

Comme on néglige l'auto-induction de la spire, on peut représenter la spire à l'aide d'un schéma électrique suivant.

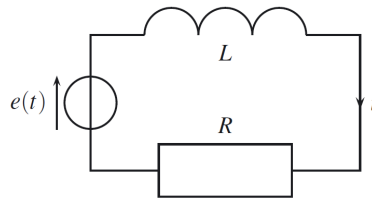


FIGURE 4.28 – Schéma électrique de l'alternateur

La f.é.m se comporte comme un générateur de tension aux bornes de la spire de résistance R . La loi des mailles appliquée sur ce schéma nous donne l'équation électrique de l'alternateur (EE), soit

$$e(t) = Ri(t)$$

donc

$$-BS\omega \cos(\omega t) = Ri(t) \quad (EE).$$

Il nous faut maintenant obtenir l'équation mécanique de l'alternateur (EM) à partir du théorème du moment cinétique, soit

$$J \frac{d\omega}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_{(Oy)}(\vec{F}_i).$$

Les moments des forces extérieures correspondent à deux couples de moments de forces, d'abord le couple dû à la force extérieure qui fait tourner la spire soit

$$\Gamma_{ext}(t)$$

et le couple de Laplace due aux forces de Laplace exercées sur les parties horizontales de la spire, dont on a vu que l'expression était

$$\Gamma_L = (\vec{\mathcal{M}} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_y$$

avec $\vec{\mathcal{M}}$ le moment magnétique de la spire telle que

$$\vec{\mathcal{M}} = i(t) \vec{S}.$$

Ainsi, il vient que

$$J \frac{d\omega}{dt} = \Gamma_{ext}(t) + i(t) (\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_y$$

et comme la vitesse angulaire est constante, il vient que

$$\Gamma_{ext}(t) = -i(t) (\vec{S} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_y$$

soit

$$\Gamma_{ext}(t) = -i(t) \left(BS \sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) \vec{u}_y \right) \cdot \vec{u}_y.$$

On obtient l'équation mécanique de l'alternateur (EM)

$$\Gamma_{ext}(t) = -i(t) BS \cos(\omega t) \quad (EM).$$

Si on étudie la moyenne temporelle du couple extérieur nécessaire pour entraîner la spire en produisant une intensité $i(t)$, il vient que

$$\langle \Gamma_{ext}(t) \rangle = \langle -i(t) BS \cos(\omega t) \rangle$$

or, d'après (EE), $i(t) = -\frac{BS}{R}\omega \cos(\omega t)$, il vient que

$$\langle \Gamma_{ext}(t) \rangle = \left\langle \frac{\omega}{R} (BS \cos(\omega t))^2 \right\rangle$$

soit

$$\langle \Gamma_{ext}(t) \rangle = \omega \frac{(BS)^2}{2R}.$$

On peut finalement effectuer le bilan de puissance concernant l'alternateur.

La puissance mécanique moyenne fournie à l'alternateur par l'extérieur est

$$\langle \mathcal{P}_{meca} \rangle = \langle \Gamma_{ext}(t) \omega \rangle = \frac{(BS\omega)^2}{2R}.$$

La puissance électrique moyenne produite par l'alternateur est

$$\langle \mathcal{P}_{elec} \rangle = \langle Ri(t)^2 \rangle = \left\langle R \frac{(BS\omega)^2}{R} \cos^2(\omega t) \right\rangle = \frac{(BS\omega)^2}{2R}.$$

On constate que l'intégralité de la puissance mécanique injectée dans l'alternateur est convertie en puissance électrique.

Synthèse

Connaissances

- Auto-induction.
- Flux propre et inductance propre.
- Étude énergétique pour un circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps.
- Cas de deux bobines en interaction. Inductance mutuelle entre deux bobines.
- Circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction en régime sinusoïdal forcé.
- Étude énergétique de deux bobines en interaction.
- Conversion de puissance mécanique en puissance électrique.
- Rail de Laplace.
- Spire rectangulaire soumise à un champ magnétique extérieur uniforme et en rotation uniforme autour d'un axe fixe orthogonal au champ magnétique.
- Freinage par induction.

Savoir-faire

- **Différencier** le flux propre des flux extérieurs. **Utiliser** la loi de modération de Lenz. **Évaluer et citer** l'ordre de grandeur de l'inductance propre d'une bobine de grande longueur.
- **Réaliser** un bilan de puissance et d'énergie dans un système siège d'un phénomène d'auto-induction en s'appuyant sur un schéma électrique équivalent.
- **Déterminer** l'inductance mutuelle entre deux bobines de même axe de grande longueur en "influence totale".
- **Citer** des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante de circuits électriques à une maille couplés par le phénomène de mutuelle induction.
- **Réaliser** un bilan de puissance et d'énergie pour deux bobines en interaction.
- **Interpréter** qualitativement les phénomènes observés dans le cas de conversion de puissance mécanique en puissance électrique.
- **Écrire** les équations électrique et mécanique en précisant les conventions de signe.
- **Effectuer** un bilan énergétique dans le cas de conversion de puissance mécanique en puissance électrique.
- **Citer** des applications dans le domaine de l'industrie ou de la vie courante de la conversion de puissance mécanique en puissance électrique.