Chapitre 3 : Nombres complexes

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est, à l'aide notamment de figures, de donner une solide pratique des nombres complexes, à travers les aspects suivants :

- l'étude algébrique de l'ensemble $\mathbb{C}$ et la notion d'équation algébrique.
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane.
- l'exponenetielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Question 1 *Quelle est la différence entre les équations algébriques du second degrés suivantes ?*

$$\begin{array}{cc} (1) & x^2 - 1 = 0 \\ (2) & x^2 - 2x + 1 = 0 \\ (3) & x^2 + 1 = 0 \end{array}$$

Ce qui distingue ces équations est leur nombre de solutions. En effet l'équation (1) a deux solutions distinctes $x = -1$ et $x = 1$ tandis que la seconde équation possède une unique solution égale à $x = 1$. Enfin l'équation (3) n'a pas de solutions réelles puisque pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geq 0$ et donc $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. L'ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$ étend l'ensemble des nombres réels de façon à permettre à l'équation (3) d'avoir des solutions. Ainsi, on note $-i$ et i les deux solutions de $x^2 + 1 = 0$ et $\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

Au XIX$^{\text{ième}}$ siècle les nombres complexes ont été introduits en géométrie grâce à la notion d'affixe. Ce point de vue est riche d'applications puisqu'il permet de manipuler des points du comme des nombres munis de leurs opérations classiques $+, -, \times$ ainsi que la division.

Dans ce chapitre nous allons commencer par faire des rappels de classe de terminale puis nous les approfondirons notamment dans le but de faire de la géométrie plane et de résoudre des équations algébriques.

2 Nombres complexes

2.1 Définition

Définition: Ensemble des nombres complexes

L'ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ est l'ensemble :

$$\mathbb{C} = \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

où i, appelé **nombre imaginaire**, vérifie la relation :

$$i^2 = -1$$

Tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}$ se décompose sous la forme $z = x + iy$ qu'on appelle **forme algébrique** où :

- x est appelée la **partie réelle de** z
- y est appelée la **partie imaginaire de** z

On définit ainsi naturellement deux fonctions dans $\mathbb{C}$:

la fonction partie réelle $$\mathfrak{Re} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z = x + iy & \longmapsto & x \end{array}$$

la fonction partie imaginaire $$\mathfrak{Im} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ z = x + iy & \longmapsto & y \end{array}$$

Exemple

Soit $1 + 2i \in \mathbb{C}$, on a $\mathfrak{Re}(1 + 2i) = 1$ et $\mathfrak{Im}(1 + 2i) = 2$.

2.2 Opérations sur les nombres complexes

Les opérations existant dans $\mathbb{R}$ se prolongent naturellement dans $\mathbb{C}$ le point nouveau ici étant que $i^2 = -1$.

Définition: Règles opératoires dans $\mathbb{C}$

On a les règles opératoires suivantes dans l'ensemble des nombres complexes.
Pour tous $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$:

1. $z_1.(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (**distributivité**)
2. $z_1.(z_2.z_3) = (z_1.z_2).z_2$ (**associativité**)
3. $z_1.z_2 = z_2.z_1$ **(commutativité)**
4. si $z_1 \neq 0$, $\dfrac{1}{z_1} \in \mathbb{C}$ **(inversibilité d'un élément non nul)**

Remarque 1 *On note, tout comme pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{N}$, l'ensemble $\mathbb{C}^\star$ l'ensemble des nombres complexes différents de* 0.

Proposition

Opérations et écriture sous forme algébrique :
Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ deux nombres complexes. La somme $z_1 + z_2$, la différence $z_1 - z_2$, le produit $z_1 \times z_2$et le quotient $\frac{z_1}{z_2}$ (si $z_2 \neq 0$) sont des nombres complexes et on a :

- $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$
- $z_1 \times z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(y_1x_2 + x_1y_2)$
- $\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right) + i\left(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}\right)$

Démonstration :

La partie imaginaire et réelle d'un nombre complexe se préserve par somme mais non par produit.

Corollaire

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, on a :

1. $\mathfrak{Im}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Im}(z_1) + \mathfrak{Im}(z_2)$
2. $\mathfrak{Re}(z_1 + z_2) = \mathfrak{Re}(z_1) + \mathfrak{Re}(z_2)$
3. $\mathfrak{Re}(z_1z_2) = \mathfrak{Re}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2) - \mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Im}(z_2)$
4. $\mathfrak{Im}(z_1z_2) = \mathfrak{Im}(z_1)\mathfrak{Re}(z_2) + \mathfrak{Im}(z_2)\mathfrak{Re}(z_1)$

On introduit une opération dite de conjugaison d'un nombre complexe dont nous verrons une interprétation géométrique simple plus loin.

Définition: Conjugaison

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on appelle **conjugué** de z, que l'on note $\overline{z}$, le nombre complexe :

$$\overline{z} = x - iy$$

Remarque 2 *Cette opération de conjugaison est **involutive** c'est-à-dire que*

$$\overline{\overline{z}} = z$$

La conjugaison se comporte d'une manière simple avec les opérations classiques sur les nombres complexes.

Proposition

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$
3. $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
4. $\mathfrak{Im}(z) = \dfrac{1}{2i}(z - \overline{z})$ et $\mathfrak{Re}(z) = \dfrac{1}{2}(z + \overline{z})$

Démonstration :

Méthode

Pour montrer qu'un nombre complexe est réel ou imaginaire pur, on exploite parfois la méthode suivante :

1. Si on veut montrer que $Z \in \mathbb{R}$, on montre que $\overline{Z} = Z$.
2. Si on veut montrer que $Z \in i\mathbb{R}$ (Z est imaginaire pur), on montre que $\overline{Z} = -Z$.

Exercice 1 *Application*

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = 1 + iz$.
Montrer que Z est réel si et seulement si z est imaginaire pur.

Les formules suivantes, connues dans $\mathbb{R}$, sont valables dans $\mathbb{C}$:

Théorème : Somme géométrique

Soit $x \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k$ est égale à :

1. $n + 1$ si $x = 1$
2. $\dfrac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$ sinon

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a, b deux nombres complexes.
On a :

- $a^n - b^n = (a - b) \times \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$
- si n est impair, $a^n + b^n = (a + b) \times \sum\limits_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$

Théorème : Bînome de Newton

Soient $n \in \mathbb{N}$, x et y deux nombres complexes. Alors :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

2.3 Représentation géométrique des nombres complexes

On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct que l'on appelle le "plan complexe".

Définition: Affixe

Soit $P(x,y)$ un point ou un vecteur $\vec{u} = \binom{x}{y}$ du plan usuel . On appelle **affixe** du point P ou du vecteur $\vec{u}$ le nombre complexe $z_P = x + iy$.

Remarque 3 *Les fonctions $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$ s'interprêtent géométriquement comme respectivement la projection orthogonale sur l'axe des abscisses et celle sur l'axe des ordonnées.*

Dessin :

Proposition

Soit P un point du plan d'affixe z_P. Alors le conjugué $\overline{z_P}$ est l'affixe du symétrique du point P par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration :

On peut également représenter dans le plan la somme de deux vecteurs $\vec{u} = \binom{x_1}{y_1}$ et $\vec{v} = \binom{x_2}{y_2}$ et en donner une interprétation en terme d'affixes.

Dessin :

3 Module d'un nombre complexe

3.1 Définitions

On sait qu'un vecteur du plan $\vec{u} = \binom{x}{y}$ possède une norme donnée par la formule $||u|| = \sqrt{x^2 + y^2}$. On définit le module d'un nombre complexe comme la norme du vecteur $\vec{u}$ dont il est l'affixe $z_{\vec{u}}$. Mathématiquement, cela se traduit par :

Définition: Module d'un nombre complexe

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$. On appelle **module de** zn que l'on note $|z|$, le nombre :

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Dessin :

Remarque 4 *Pour tout nombre réel $x = x + i.0$, le module de x est sa valeur absolue.*

Exemple

- $|1 + i| = \sqrt{2}$
- pour tout $r > 0$, $|ri| = r$

Le module d'un nombre complexe peut s'exprimer à l'aide de la conjugaison.

Proposition

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|z|^2 = z.\overline{z}$.

Démonstration :

Grâce aux règles vues précédemment sur les conjugués et le fait que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$, on peut en déduire facilement le module d'un produit ou d'un quotient de nombres complexes z_1 et z_2 une fois les modules $|z_1|$ et $|z_2|$ connus.

Proposition

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. On a :

1. $|z_1| = 0 \Leftrightarrow z_1 = 0$.
2. $|z_1.z_2| = |z_1|.|z_2|$.

3. si $z_2 \in \mathbb{C}^\star$ alors $|\frac{z_1}{z_2}| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Démonstration :

3.2 Inégalités triangulaires

Au chapitre 1 nous avons rencontré l'inégalité pour les réels :

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad |x+y| \leq |x| + |y|$$

Cette dernière s'étend à l'ensemble des nombres complexes :

Théorème: Inégalité triangulaire

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Inégalité triangulaire)
- $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ (Cas d'égalité) si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_2 = \lambda.z_1$ ou $z_1 = \lambda.z_2$

Démonstration :

Interprétation géométrique de l'inégalité triangulaire :

3.3 Lieux géométriques

On décrit à l'aide des affixes les points décrivants certains lieux géométriques de référence.

Proposition

Soit P un point du plan d'affixe z et $\mathcal{C}(w_0, r)$ (respectivement $\mathcal{D}(w_0, r)$) le cercle (respectivement le disque) de centre $w_0(x_0, y_0)$ d'affixe z_0 et de rayon $r \geq 0$. Alors :

- $P \in \mathcal{C} \iff |z - w_0| = r$
- $P \in \mathcal{D} \iff |z - w_0| \leq r$

Démonstration :

Proposition

Soient P et Q deux points du plan d'affixes respective z_1 et z_2. Alors la distance dans le plan entre les points P et Q vaut :

$$d(P, Q) = |z_1 - z_2|$$

Démonstration :

Exercice 2 *Déterminer si les points $P(1 + 3i)$ et $M(2 - 4i)$ appartiennent :*

1. *Au cercle $\mathcal{C}(1 + i, 2)$.*
2. *Au disque $\mathcal{D}(i, 4)$.*

4 Nombres complexes de module un et trigonométrie

Dans la partie précédente nous avons vu que les cercles avaient pour équation $|z - z_0| = r$ où z_0 est l'affixe du centre et r sont rayon. On en déduit aisément que le cercle trigonométrique qui est le cercle de centre $O(0, 0)$ et de rayon 1 est formé de l'ensemble des points du plan d'affixe z qui vérifient l'équation

$$|z| = 1$$

4.1 Définition

Définition: Ensemble $\mathbb{U}$

L'ensemble des nombres complexes de module 1 se note $\mathbb{U}$ (pour unité)

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Remarque 5 *On a aussi* $z \in \mathbb{U} \iff z\overline{z} = 1$. *Ce qui allège parfois les calculs en évitant de poser une racine carrée.*

Exemple

- $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + i\dfrac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{U}$
- $-i \in \mathbb{U}$
- $-0,5 + i.0,5 \notin \mathbb{U}$

D'après le théorème de Pythagore il est possible de paramétrer tout point M du cercle unité par un angle $t \in \mathbb{R}$ de sorte que $M(\cos(t), \sin(t))$.
Ceci fournit une nouvelle manière de voir un point de l'ensemble $\mathbb{U}$. En effet,

$$\boxed{z \in \mathbb{U} \iff \exists t \in \mathbb{R}, z = \cos(t) + i\sin(t)}$$

On peut donc introduire une nouvelle manière de voir les point de $\mathbb{U}$ à l'aide de la notation exponentielle.

Définition:

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note e^{it} le nombre complexe

$$e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$$

et la fonction qui paramétrise l'ensemble $\mathbb{U}$

$$e^{i\cdot} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{U} \\ t & \longmapsto & e^{it} \end{array}$$

4.2 Règles opératoires et trigonométrie

On peut déduire des régles de calculs sur cette exponentielle qui suit les règles que vous connaissez déjà sur $\mathbb{R}$ pour cette fonction.

Proposition

Soient $t, t' \in \mathbb{R}$. Alors
- $e^{it} \times e^{it'} = e^{i(t+t')}$ (formule d'addition)
- $\dfrac{e^{it}}{e^{it'}} = e^{i(t-t')}$
- $e^{it} + e^{it'} = e^{i(\frac{t+t'}{2})} \times \left(e^{i\frac{t-t'}{2}} + e^{i\frac{t'-t}{2}}\right)$

Démonstration :

Les règles calculatoires de l'exponentielles se prêtent bien aux calculs et nous avons exprimé e^{it} en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$. Nous allons maintenant exprimer $\cos(t)$ et $\sin(t)$ en fonctions d'exponentielles.

Proposition

Soit $t \in \mathbb{R}$. Alors on a les formules dîtes **d'Euler** :

- $\cos(t) = \dfrac{e^{it} + e^{-it}}{2}$
- $\sin(t) = \dfrac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$

Démonstration :

Exercice 3 *Soit $t \in \mathbb{R}$. Factoriser de la manière la plus simple possible les nombres complexes suivants :*

1. $1 + e^{it}$
2. $1 - e^{it}$

Grâce à ces formules nous pouvons démontrer les formules trigonométriques classiques qui sont à connaître par coeur.

Théorème: Formules trigonométriques (additions et soustractions)
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

1. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
2. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
3. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
4. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
5. si $a, b, a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors
$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$
6. si $a, b, a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors
$$\tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

Théorème: Formule de factorisation
Soient p et $q \in \mathbb{R}$. On a

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

Théorème: Formules trigonométriques de duplication de l'angle
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a

1. $\cos(2a) = 2\cos(a)^2 - 1$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
3. si a et $2a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors
$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$$

Démonstration :

Théorème: Formule de Moivre
Soient $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors

$$(\cos(t) + i\sin(t))^n = \cos(nt) + i\sin(nt)$$

Démonstration :

Risque d'erreur

La formule de Moivre ne s'applique en général qu'avec n entier. Par exemple,

$$-1 = e^{i\pi} \neq \left(e^{2i\pi}\right)^{\frac{1}{2}} = (1)^{\frac{1}{2}} = 1$$

A l'aide de la formule de Moivre nous pouvons simplifier les sommes suivantes :

Théorème: Deux sommes trigonométriques

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

- $$\sum_{k=0}^{n} \cos(kt) = \begin{cases} n+1 \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}t)\cos(\dfrac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{cases}$$
- $$\sum_{k=1}^{n} \sin(kt) = \begin{cases} 0 \text{ si } t \in 2\pi\mathbb{Z} \\ \dfrac{\sin(\frac{n+1}{2}t)\sin(\dfrac{nt}{2})}{\sin(\frac{t}{2})} \end{cases}$$

Démonstration : sur feuille.

4.3 Linéarisation

Grâce à la formule d'Euler il est possible de simplifier parfois les expressions polynomiales en $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en une combinaison linéaire d'expressions de la forme $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$ où n désigne un entier : c'est ce qu'on appelle **linéariser** une expression trigonométrique.

Exemple

Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2\sin(t)\cos(t) = \sin(2t)$$

est une linéarisation de l'expression $2\sin(x)\cos(x)$.

Remarque 6 *De manière générale, une expression polynômiale en deux variables X et Y est une somme de termes de la forme X^nY^m ($n,m \in \mathbb{N}$) pondérés par des coefficients comme $2XY + X^3$.*

Méthode

Linéariser

Pour linéariser une expression polynômiale en $\cos(x), \sin(x)$ on :

1. Exploite la formule d'Euler en transformant les puissance de cos et de sin à l'aide d'exponentielles complexes.
2. On développe l'expression et on factorise par les dénominateurs.
3. On regroupe les termes pour créer des expression du type $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en se servant de la formule d'Euler à nouveau.

Exercice 4 *Linéariser l'expression* $E = \cos^2(x)\sin^3(x)$.

5 Arguments d'un nombre complexe non nul

Notation 1 *On utilisera à partir de maintenant la notation* $a = b \quad [\theta]$ *qui signifie qu'il existe* $k \in \mathbb{Z}$ *tel que* $a = b + k\theta$.

5.1 Définition

Nous nous sommes intéressé dans la partie précédente aux nombres complexes de module un et avons introduit une paramétrisation de ces nombres à l'aide de la fonction $t \mapsto e^{it}$. Nous allons étendre cette description à tous les complexes.

Pour tout $z \in \mathbb{C}^\star$, on a $|z| > 0$ et $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$ puisque $|\frac{z}{|z|}| = \frac{|z|}{|z|} = 1$. On en déduit qu'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{it}$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{R}$, $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$ l'écriture exponentielle d'un nombre complexe n'est pas unique. On a la définition suivante :

Définition: Écriture exponentielle

Soit $z \in \mathbb{C}^\star$, il existe $r > 0$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que

$$z = re^{it}$$

c'est ce qu'on appelle l'**écriture exponentielle de z** et :

- r est le **module** de z
- t est **un argument** de z, on note $Arg(z) = t \quad [2\pi]$

Si $z = 0$ il y a une infinité d'arguments possibles on ne parlera donc pas de l'argument du nombre complexe nul.

Remarque 7 *Tous les arguments d'un nombre complexe donné sont égaux modulo* 2π*, il existe donc un unique argument* t_0 *de* z *appartenant à l'ensemble* $[0, 2\pi[$ *que l'on appelle* ***argument principal****. On parlera de* ***l'argument*** *pour un argument à* 2π *près.*

Représentation géométrique :

Méthode

Pour déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe on :

1. calcule le module $|z|$ de z, souvent avec la formule $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$
2. si $z \neq 0$, on calcule $\dfrac{z}{|z|}$ qui est de la forme e^{it}. On cherche donc t en s'appuyant sur la connaissance des valeurs remarquables de cos et sin que l'on peut en général retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.
3. Si la dernière étape n'est pas possible on est en général guidé par l'exercice.

Exercice 5 *Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :*

- $-i$
- $1 + i$
- $2 - i\sqrt{12}$

5.2 Opérations sur les arguments

Proposition

Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^\star$, on a

1. $Arg(z_1.z_2) = Arg(z_1) + Arg(z_2) \quad [2\pi]$
2. $Arg(\dfrac{z_1}{z_2}) = Arg(z_1) - Arg(z_2) \quad [2\pi]$
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Arg(z_1^n) = nArg(z) \quad [2\pi]$

Démonstration :

La multiplication par un réel non nul k stabilise l'argument si $k > 0$ mais ce n'est pas le cas si $k < 0$.

Proposition

Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $k \in \mathbb{R}^\star$, on a

- $Arg(kz) = Arg(z) \quad [2\pi]$ si $k > 0$
- $Arg(kz) = Arg(z) + \pi \quad [2\pi]$ si $k < 0$

Démonstration :

5.3 Une transformation utile

Application à la Physique

En physique ou en sciences de l'ingénieur on peut être amené à réaliser la transformation de la fonction $P : t \mapsto a\cos(t) + b\sin(t)$ qui décrit correctement les oscillation d'un oscillateur harmonique au cours du temps. Transformer cette fonction P sous la forme $P : t \mapsto A\cos(t - \varphi)$ permet d'obtenir deux informations physiques :

- A est l'amplitude de l'oscillateur.
- φ est la phase à l'origine.

Exemple

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\cos(t) + \sin(t) = 2\cos(t - \frac{\pi}{4})$.
En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$2\cos(t - \frac{\pi}{4}) = 2(\cos(t)\cos(\frac{\pi}{4}) + \sin(t)\sin(\frac{\pi}{4})) = 2\left(\frac{\cos(t)}{2} + \frac{\sin(t)}{2}\right) = \cos(t) + \sin(t)$$

Méthode

Transformation de $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$

- On développe $A\cos(t - \varphi) = A\cos(\varphi)\cos(t) + A\sin(\varphi)\sin(t)$.
- Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi) \iff \begin{cases} a = A\cos(\varphi) \\ b = A\sin(\varphi) \end{cases}$
- Pour déterminer A on utilise l'identité $A^2 = a^2 + b^2$ (obtenue grâce au fait que $\cos(\varphi)^2 + \sin(\varphi)^2 = 1$). On peut donc choisir $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- On obtient $Arg(a + ib) = \phi[2\pi]$ par la méthode classique de recherche d'arguments.
- Finalement, on obtient bien $A, \varphi \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a\cos(t) + b\sin(t) = A\cos(t - \varphi)$

Exercice 6 *Transformer l'expression définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\sqrt{3}\cos(t) - 3\sin(t)$ en une expression de la forme $A\cos(t - \varphi)$.*

6 Equations algébriques

6.1 Equations polynomiales

Une fonction polynomiale P dans $\mathbb{C}$ de coefficients $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ est une fonction de la forme :

$$P: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k z^k \end{array}$$

Résoudre une équation polynomiale dans $\mathbb{C}$ consiste à déterminer pour P fonction polynomiale dans $\mathbb{C}$, l'ensemble des nombres complexes z vérifiant l'équation :

$$P(z) = 0$$

On appelle une telle solution, une *racine* de P. Il existe un rapport étroit entre racine et factorisation d'un polynôme décrit dans le théorème suivant :

Théorème: Descartes

Soit P une fonction polynomiale et $a \in \mathbb{C}$. Alors a est une racine de P si et seulement si $z - a$ est un facteur de $P(z)$, c'est-à-dire qu'il existe une fonction polynomiale Q telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$P(z) = (z - a) \times Q(z)$$

6.2 Equations du second degré à coefficients dans $\mathbb{R}$

On sait déjà résoudre les équations de degré 2 dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire celle de la forme pour $a \in \mathbb{R}^\star$, $b, c \in \mathbb{R}$:

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ pour } x \in \mathbb{R}$$

L'élément fondamental qui permet de déterminer l'existence de racines et de fournir une expression est le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$. Si $\Delta \geq 0$ alors le polynôme $ax^2 + bx + c$ possède au moins une racine et si $\Delta < 0$ il n'existe pas de racines dans $\mathbb{R}$.
Ce n'est pas le cas dans $\mathbb{C}$.

Théorème: Racines d'un polynôme de degré 2 dans $\mathbb{R}$

Soient $a \in \mathbb{R}^\star, b, c \in \mathbb{R}$. Alors l'équation $(E) \quad ax^2 + bx + c = 0$ possède toujours une racine que l'on calcule de la manière suivante :

1. si $\Delta > 0$ alors (E) admet deux racines réelles qui sont $X_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
2. si $\Delta = 0$ alors (E) admet une racine double $X = \dfrac{-b}{2a}$.
3. si $\Delta < 0$ alors (E) admet deux racines complexes conjuquées qui sont $X_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$ et $X_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.

Démonstration :

6.3 Racines carrées complexes

Toute équation dans $\mathbb{C}$ de la forme $z^2 = a + ib$ où $a, b \in \mathbb{R}$ possède au moins une solution.

Théorème: Racine carrée complexe

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Alors l'équation

$$(E) \quad z^2 = z_0$$

admet au moins une solution dans $\mathbb{C}$.

Démonstration :

Méthode

Calculer une racine carrée d'un nombre complexe

Pour calculer les racines carrées de $z_0 \in \mathbb{C}^\star$:

1. On transforme sous forme exponentielle $z_0 = re^{it}$
2. Les deux racines carrées de z_0 sont données par

$$z = \sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}} \quad z' = -\sqrt{r}e^{i\frac{t}{2}}$$

Méthode

Calculer une racine carrée d'un nombre complexe (bis)

Pour calculer les racines carrées de $z_0 = a + ib \in \mathbb{C}^\star$:

1. On pose $z = x + iy$ qui vérifie la relation $z^2 = z_0 = a + ib$.
2. On détermine une solution (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ du système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{ passage au module }) \\ x^2 - y^2 & = & a \quad (\text{ on pose } (x+iy)^2 = a + ib) \\ 2xy & = & b \end{array} \right.$$

Exercice 7 *Calculer les racines carrées de* $2 + i$ *et* $-\sqrt{3} + i$.

6.4 Equations du second degré à coefficients complexes

Pour étudier les équations du second degré à coefficients complexes, comme par exemple $x^2 - ix + 2 = 0$, on se sert comme dans le cas classique des coefficients réels du discriminant.

Proposition

Soient $a \in \mathbb{C}^\star$, $b, c \in \mathbb{C}$ et l'équation :

$$(E) \quad az^2 + bz + c = 0$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant. Alors

- Si $\Delta \neq 0$ alors en notant δ une racine carrée de Δ, l'équation (E) a deux racines $Z_1 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$ et $Z_2 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ alors (E) possède une racine double $Z = \dfrac{-b}{2a}$.

Démonstration :

Exercice 8 *Déterminer les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation du second degré (E) :* $\quad z^2 + 2z - i = 0.$

6.5 Somme et produit de racines

On exprimes les coefficients d'une équation du second degré à coefficients complexes en fonction des solutions.

Proposition

Soient $a \in \mathbb{C}^\star$, $b, c \in \mathbb{C}$ et $(E) \quad az^2 + bz + c = 0$. Alors $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (éventuellement égaux) sont solutions de (E) si et seulement si :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

Exemple

Si z_1 et z_2 désignent les racines du polynôme $P(z) = z^2 - z + 4$ alors d'après la proposition précédente on a :

$$z_1 + z_2 = -1 \quad et \quad z_1 z_2 = 4$$

Remarque 8 *Soit (E) : $a^2 + bz + c = 0$, par la proposition précédente si on connait une solution z_1 de (E), il est aisé d'en déduire l'autre à l'aide de la relation :*

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \iff z_2 = -\frac{b}{a} - z_1$$

Exemple

Considérons l'équation $z^2+(-i-2)z+(1+i)=0$. Il est clair que $z_1=1$ est une solution évidente de l'équation. Par la première relation coefficients/racines on en déduit que l'autre solution de l'équation a pour expression :

$$z_2 = -\frac{b}{a} - z_1 \iff z_2 = -1-(-i-2) = 1+i$$

Une seconde application est une méthode pour résoudre un système non linéaire à deux inconnues de la forme :

$$(S) : \begin{cases} z_1+z_2 = s \\ z_1 z_2 = p \end{cases} \quad z \in \mathbb{C}$$

où s et p sont deux nombres complexes paramètres du système.

Méthode

Pour résoudre le système noté (S) on

1. on pose l'équation du second degré (E) : $z^2 - sz + p = 0$
2. on détermine ses solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ (éventuellement identiques)
3. les solutions de (E) sont exactement les solutions de (S)

Exercice 9 *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *le système :*

$$(S) : \begin{cases} z_1+z_2 = i \\ z_1 z_2 = 2 \end{cases}$$

7 Racines n-ièmes

Pour résoudre les équations de degré deux dans $\mathbb{C}$ nous avons introduit la notion de racine carrée d'un nombre complexe, c'est à dire aux solutions de l'équation $Z^2 = z_0$. On généralise ici cette étude aux équations de la forme $Z^n = z_0$ pour n un entier naturel quelconque.

Définition: Racine n-ième d'un nombre complexe

Soit $z_0 \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$.

- On appelle **racine n-ième de** z_0, un nombre $Z \in \mathbb{C}$ qui vérifie l'équation $Z^n = z_0$.
- si $z_0 = 1$ on dit qu'une racine n-ième de 1 est une **racine n-ième de l'unité**. L'ensemble des racines n-ième de l'unité se note $\mathbb{U}_n$

Exemple

On a

- $\mathbb{U}_1 = \{1\}$
- $\mathbb{U}_2 = \{-1; 1\}$
- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{U}_n$

7.1 Racines de l'unité

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\mathbb{U}_n \neq \emptyset$
- le produit de deux éléments de $\mathbb{U}_n$ appartient à $\mathbb{U}_n$
- l'inverse d'un élément de $\mathbb{U}_n$ appartient à $\mathbb{U}_n$

Démonstration :

On va décrire explicitement les éléments de $\mathbb{U}_n$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$\mathbb{U}_n = \{e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid k \in [\![0, n-1]\!]\}$$

On note pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$,

$$\xi_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}} = (\xi_1)^k$$

Démonstration :

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\xi \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}$. Alors

- $1 + \xi + \xi^2 + \cdots + \xi^{n-1} = 0$
- la somme des racines n-ièmes vaut 0.

Démonstration :

Exercice 10 *1. Représenter géométriquement les éléments de* $\mathbb{U}_3$.

2. On pose $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$. *Que vaut* $1 + j + j^2$ *?*

7.2 Racines n-ième quelconques

À l'aide de la description des racines n-ièmes de l'unité il est possible de donner une description simple des racines n-ième d'un complexe quelconque $z_0 \in \mathbb{C}$.

Proposition

Soit Z_0 une racine n-ième d'un complexe z_0. Alors l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $Z^n = z_0$ est

$$\{Z_0\xi \mid \xi \in \mathbb{U}_n\}$$

Démonstration :

Méthode

Pour trouver une racine n-ième d'un nombre complexe z_0. On

1. Détermine une solution Z_0 de $Z^n = z_0$, par exemple $\sqrt[n]{|z_0|}e^{iArg(z_0)/n}$.
2. on obtient toutes les autres racines n-ième de z_0 en multipliant Z_0 par ξ où ξ est une racine n-ième de l'unité.

Exercice 11 *Déterminer les racines* 3-ièmes *de* $1 + i$.

8 Exponentielle complexe

On étend dans cette section la fonction exponentielle à tout $\mathbb{C}$.

Définition: Soit $z \in \mathbb{C}$. On a appelle exponentielle complexe de z le nombre complexe noté e^z ou encore $\exp(z)$ définie par

$$e^z = e^{\mathfrak{Re}(z)} \times e^{i\mathfrak{Im}(z)}$$

Exemple

On a

- $e^{1+i\pi} = e \times e^{i\pi} = -e$
- $e^{-2+i} = \dfrac{e^i}{e^2}$

Proposition

Exponentielle d'une somme

Soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Alors

$$\exp(z_1 + z_2 + \cdots + z_n) = \exp(z_1) \times \exp(z_2) \times \cdots \times \exp(z_n)$$

Démonstration :

Proposition

Soient z et z' deux nombres complexes. Alors

$$e^z = e^{z'} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, z = z' + 2ik\pi$$

Démonstration :

9 Nombres complexes et géométrie plane

L'identifixation entre points ou vecteurs du plan et nombres complexes est extrêmement riche d'applications géométriques. En effet, en calculant avec les complexes comme des nombres réels munis de leurs opérations il est plus facile de démontrer certaines propriétés géométriques que dans le cadre classique.

Dans toute cette section on se place dans un plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Théorème: Interprétation géométrique

Soit $A(a)$, $B(b)$ et $C(c)$ trois points du plan complexe tels que $b \neq a$. Alors :

- $\left|\dfrac{c-a}{b-a}\right| = \dfrac{||\vec{AV}||}{||\vec{AB}||}$
- $Arg(\dfrac{c-a}{b-a}) = (\widehat{\vec{AB}, \vec{AC}} \ \ [2\pi]$

9.1 Alignement et orthogonalité

Proposition

Soient A, B, C trois points du plan distincts deux à deux d'affixes respectives z_A, z_B et z_C. Alors

- Les points A, B et C sont alignés si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$z_C - z_A = \lambda \times (z_B - z_A)$$
- les droites (AB) et (AC) sont orthogonales si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que
$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i\lambda$$

Démonstration :

Remarque 9 *La proposition précedente admet une interprétation en termes vectoriels puisque*

- *A, B et C sont alignés si et seulement si l'angle $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}})$ a une mesure nulle modulo π.*
- *A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.*

9.2 Transformations du plan

Une transformation du plan est une application bijective de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. On en décrit ici plusieurs transformations classiques apparaissant classiquement en physique ou sciences de l'ingénieur.

On commence par traiter le cas des rotations du plan. Soit $\Omega \in \mathcal{P}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Définition: Rotation

La **rotation** de centre Ω et d'angle θ est une transformation du plan, notée $R_{\Omega,\theta}$, vérifiant les trois conditions suivantes :

1. $R_{\Omega,\theta}(M) = M \iff M = \Omega$ (invariance du centre)
2. pour tout $M \in \mathcal{P}$, $||\overrightarrow{\Omega R_{\Omega,\theta}(M)}|| = ||\overrightarrow{\Omega M}||$
3. pour tout $M \in \mathcal{P}$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega R_{\Omega,\theta}(M)}}\right) = \theta \quad [2\pi]$

Dessin :

Proposition

Dans le plan complexe la rotation $R_{\Omega,\theta}$ est représentée par l'application :

$$R_{\Omega,\theta} : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & e^{i\theta}(z-\omega)+\omega \end{array}$$

Démonstration :

Définition: Translations

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. La **translation** du plan de vecteur $\vec{u}$ est l'unique transformation du plan qui à tout point $M \in \mathcal{P}$ associe le point $M' \in \mathcal{P}$ vérifiant

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$$

Dessin :

Proposition

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan d'affixe b. La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application :

$$T_b : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & z+b \end{array}$$

Démonstration :

Définition: Homothéties

L'**homothétie** de centre Ω et de rapport $\lambda \in \mathbb{R}$ est la transformation du plan qui à tout point du plan M associe le point M' vérifiant

$$\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$$

Dessin :

Proposition

Soient Ω point d'affixe ω et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors l'homothétie de centre Ω et de rapport λ est représentée dans le plan complexe par l'application :

$$H_{\Omega,\lambda} : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & k(z-\omega)+\omega \end{array}$$

Démonstration :

Proposition
L'application conjuguaison

$$S: \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \bar{z} \end{array}$$

est une application du plan complexe représentant la transformation du plan correspondant à la symétrie par rapport à l'axe des abscisses.

Démonstration :

Exercice 12 *Donner l'expression de la fonction du plan complexe associée à la symétrie par rapport à la droite $(OA$ où A est un point d'affixe a.*

10 Bilan

Dans ce chapitre il faut connaître parfaitement les démonstrations des résultats suivants :

1. Inégalité triangulaire avec cas d'égalité
2. pour $\theta \in \mathbb{R}$, le calcul des sommes trigonométriques $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ ainsi que $\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$
3. Calculer les racines n-ièmes d'un nombre complexe

Les points suivants sont des savoirs-faire fondamentaux du chapitre :

1. calculer le module d'un nombre complexe z mis sous forme abgébrique ou trigonométrique
2. déterminer l'équation d'un cercle ou d'un disque de centre ω et de rayon $R > 0$.
3. manier les formules trigonométriques
4. factoriser les expressions de la forme $1 + e^{it}$ et $1 - e^{it}$ où $t \in \mathbb{R}$
5. factoriser les expressions de la forme $\cos(p) + \cos(q)$ où $p, q \in \mathbb{R}$
6. transformer une expression de la forme $a\cos(t) + b\sin(t)$ en $A\cos(t - \varphi)$
7. représenter géométriquement l'ensemble des éléments de $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$
8. mettre sous forme algébrique ou trigonométrique $\exp(z)$ quand z est connu
9. déterminer l'argument d'un nombre complexe grâce à sa forme trigonométrique
10. déterminer si trois points A, B et C d'affixes connues sont alignés ou si (AB) et (AC) sont orthogonales.
11. déterminer les applications complexes associées aux transformations du plan suivantes :
    (a) translations
    (b) rotations
    (c) homothéties