

TD I. Sources lumineuses

Exercice I.1. Doublage de fréquence ★

Certains pointeurs laser vendus dans le commerce produisent un faisceau obtenu par doublage de fréquence d'une première radiation avec une longueur d'onde $\lambda_1 = 1064 \text{ nm}$.

1. **Déterminer** la longueur d'onde λ_2 du faisceau produit par un de ces pointeurs laser.
2. **Donner** les domaines spectraux auxquels appartiennent les radiations de longueur d'onde λ_1 et λ_2 . Le cas échéant, **donner** également la couleur à laquelle les longueurs d'onde correspondent.
3. Certains de ces pointeurs ne sont pas équipés de filtre permettant d'éliminer la radiation avec une longueur d'onde λ_1 à la sortie du pointeur. **Expliquer** en quoi cela peut présenter un danger d'utilisation.

Exercice I.2. Réflectivité d'un métal ★

Il existe deux grands types de miroirs : les miroirs métalliques, obtenus par polissage d'un métal ; et les miroirs en verres utilisés dans notre vie de tous les jours ainsi qu'en recherche. Afin d'obtenir un miroir en verre, on dépose sur la surface d'un verre une fine couche de métal (sur la face arrière pour les miroirs communs, et à l'avant pour les miroirs utilisés en recherche, appelés "miroirs optiques"). Ce métal réfléchit alors les radiations incidentes. On quantifie la capacité d'un métal à réfléchir une radiation à l'aide de sa réflectivité R . C'est le rapport de l'énergie de la radiation incidente avec celle de la radiation réfléchie.

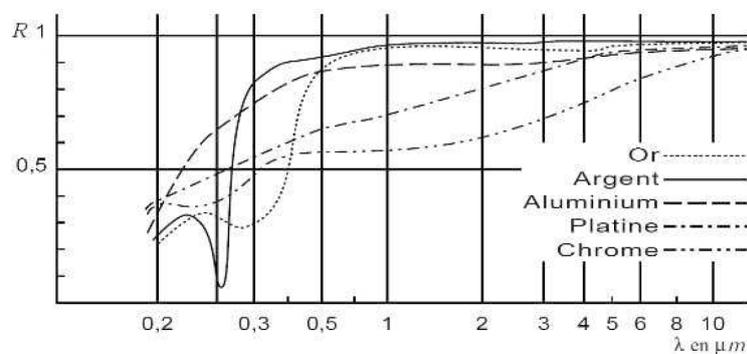


Figure 1.1 – Variation de la réflectivité R de différents métaux en fonction de la longueur d'onde.

1. **Déterminer**, à partir de l'étude de la Figure 1.1, quel est le métal le plus adapté à la réalisation d'un bon miroir dans le visible, et **estimer** sa réflectivité dans ce domaine.
2. **Interpréter** la couleur d'un miroir obtenu par dépôt d'une couche d'or.

Exercice I.3. Lampe fluorescente compacte ★

Les lampes fluorescentes compactes et les tubes fluorescents fonctionnent sur le même principe que les lampes spectrales. Ils contiennent un gaz, le plus souvent un mélange d'argon et de mercure, qui subit une décharge électrique. Les atomes de gaz, excités, se désexcitent en émettant des radiations à des fréquences particulières, notamment dans le domaine ultra-violet (UV). Ces radiations sont absorbées par la poudre fluorescente sur les parois intérieures des tubes et des lampes. La poudre émet alors des radiations de

fréquences plus basses.

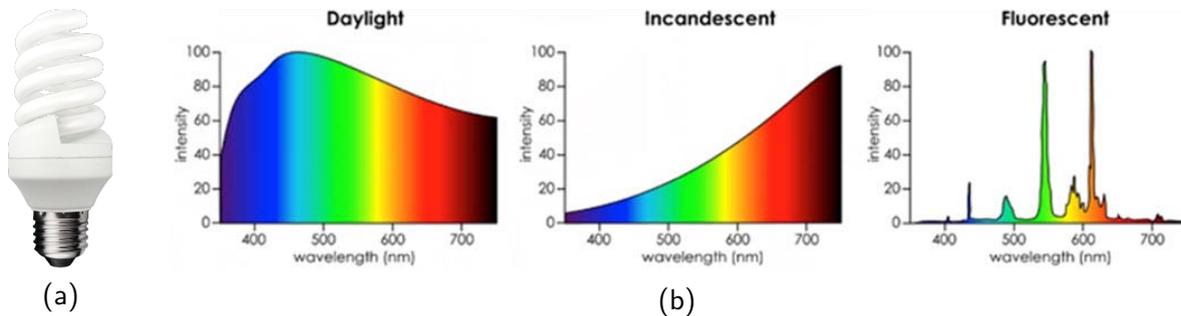


Figure 1.2 – (a) Lampe fluorescente compacte. (b) Spectres de la lumière issue du soleil, d'une lampe à incandescence et d'une lampe fluorescente compacte.

1. Le spectre d'une lampe fluorescente compacte vous est présenté Figure 1.2. **Caractériser** ce type de source.
2. On appelle familièrement "néons" ce type de sources. C'est une méthonymie désuète : en effet, les premiers tubes fluorescent contenaient du néon. Ils sont très peu utilisés aujourd'hui car les principales longueurs d'onde des raies spectrales du néon se trouve entre 600 et 700 nm. **Déterminer** la teinte des véritables tubes néons utilisés auparavant.

Exercice I.4. Absorption de la lumière par l'eau ★ ★

Lorsqu'une lumière monochromatique de longueur λ traverse une épaisseur d'eau L , la puissance lumineuse est multipliée par le facteur de transmission $T(\lambda)$ tel que

$$T(\lambda) = \exp(-\alpha(\lambda)L),$$

avec $\alpha(\lambda)$ le coefficient d'absorption de l'eau. Ce dernier est représenté sur la Figure 1.3.

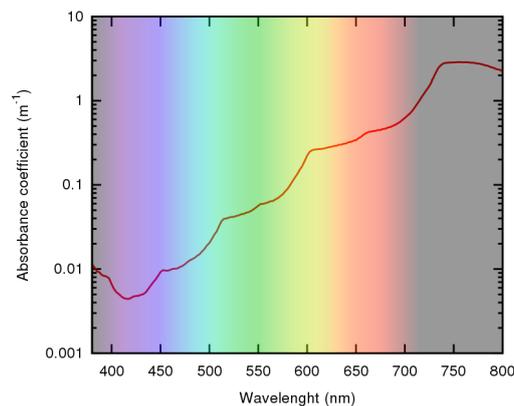


Figure 1.3 – Variation du coefficient d'absorption de l'eau $\alpha(\lambda)$ (m^{-1}) en fonction de la longueur d'onde.

1. **Déduire**, d'après l'analyse de la Figure 1.3, la couleur de la radiation visible la plus absorbée par l'eau.
2. Pour cette radiation, **calculer** le facteur de transmission T pour une épaisseur d'eau traversée L de 10 cm et 2 m.
3. **Faire de même** pour la radiation visible la moins absorbée.
4. Un poisson rouge et blanc est photographié sous l'eau, à quelques mètres de profondeur. **Déterminer** les couleurs du poisson pour une photo prise sans flash et avec flash.

TD II. Modèle de l'optique géométrique

Exercice II.1. Approximation géométrique ★

Déterminer si on peut appliquer les lois de l'optique géométrique dans les cas suivants :

1. un faisceau lumineux se propage à l'intérieur de l'objectif d'un téléphone portable
2. un laser rouge rencontre un cheveu
3. un rayonnement micro-onde dans un four micro-onde.

Exercice II.2. Incidence de Brewster ★

Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air et un milieu d'indice n . Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

Ces deux rayons sont perpendiculaires entre eux pour un angle d'incidence particulier, appelé angle de Brewster et noté i_B .

Exprimer cet angle i_B en fonction de n .

Exercice II.3. Erreur sur le positionnement d'un objet ★ ★

Un observateur de taille $L = 1,8$ m regarde un objet au fond d'un bassin depuis le bord. Le bassin de hauteur $h = 1,5$ m contient une épaisseur $e = 1,0$ m d'eau d'indice de réfraction $n = 1,33$. L'objet semble situé à une distance $d = 1$ m du bord.

Déterminer la véritable position de l'objet.

Exercice II.4. Réflexion d'onde courte sur l'ionosphère ★ ★

L'atmosphère terrestre est composée de différentes couches de densités et de températures différentes, et donc d'indices de réfraction différents. On schématise ici la situation en considérant deux couches homogènes : la première située au dessus de 100 km d'altitude, l'ionosphère ; la seconde située en dessous de 100 km qu'on assimilera à l'atmosphère neutre. Le rapport des indices de réfraction de l'ionosphère et de l'atmosphère neutre n_{ion}/n_{neu} est égal à 0,908. On suppose que la propagation d'une onde radio dans l'atmosphère neutre peut être traitée par l'optique géométrique et qu'à cette longueur d'onde, le sol, terre ou mer, est parfaitement réfléchissant.

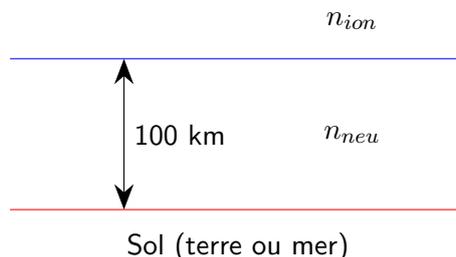


Figure 1.4 – Schéma des deux couches homogènes dans lesquelles se propage l'onde radio.

1. **Déterminer** le ou les conditions pour lesquelles l'onde radio issue du sol est totalement réfléchi par l'ionosphère.
2. Dans ce cas, **décrire** comment l'onde radio se propage dans l'atmosphère neutre.
3. **Donner** le nombre de réflexions maximal que subit une onde radio émise en Guadeloupe et reçue à une distance de 865 km à Caracas, Vénézuéla.

Exercice II.5. Démonstration de la loi de la réfraction à l'aide du modèle ondulatoire ★ ★ ★

On peut retrouver la loi de la réfraction en modélisant la lumière par une onde plane. On a représenté sur la Figure 1.5 les maxima de l'amplitude des ondes incidente et réfractée par des segments hachurés parallèles séparés respectivement par les longueurs d'onde λ_1 et λ_2 .

À partir du schéma présenté Figure 1.5 **retrouver** la loi de la réfraction.

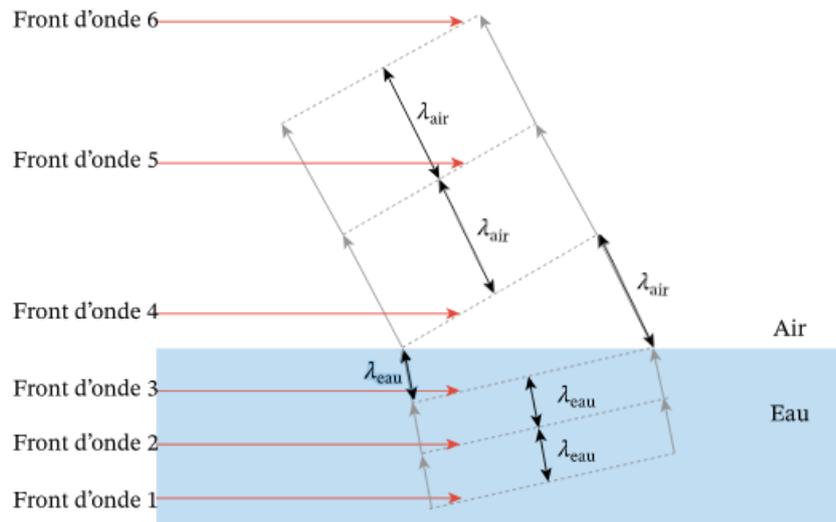


Figure 1.5 – Schéma de la réfraction d'une onde plane au niveau du dioptré eau-air.

Exercice II.6. Exercice de concours : Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Adapté du concours CCINP - MPI

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la Figure 1.6.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (Figure 1.6) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

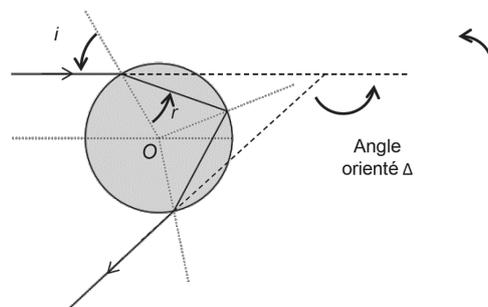


Figure 1.6 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

1. **Rappeler** les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .
2. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (Figure 1.6).

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin i$.

3. Montrer $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin i_m = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Données : $\frac{d}{du}(\arcsin(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

4. **Justifier** à l'aide de la Figure 1.7 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

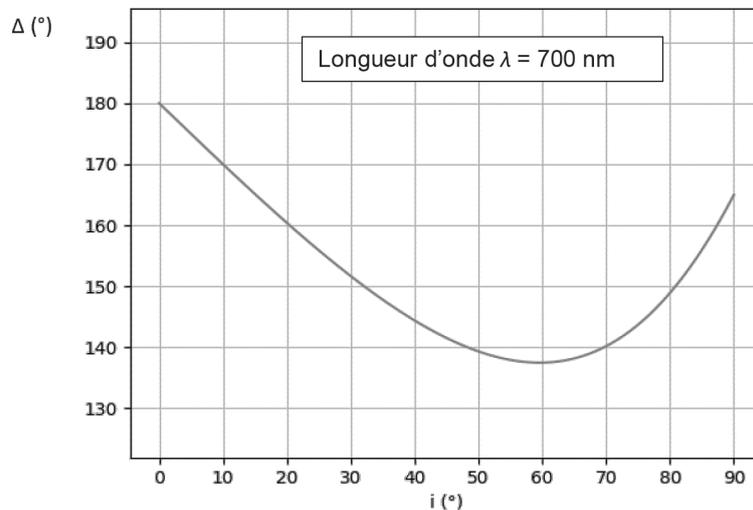


Figure 1.7 – Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

5. **Calculer** x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400$ nm, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700$ nm, $n = 1,330$).
6. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'oeil de l'observateur, **tracer** les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?

Correction

Exercice II.1. Approximation géométrique ★

Afin de déterminer si le modèle de l'optique géométrique est applicable, il faut pour chaque cas comparer a , la taille caractéristique du milieu de propagation de la radiation avec 1000λ , soit 1000 fois la longueur d'onde de la radiation.

1. La longueur d'onde moyenne d'un faisceau lumineux est $\lambda \approx 500$ nm. La taille caractéristique limite du milieu de propagation est le diamètre de l'objectif d'un téléphone portable, soit $a \approx 5$ mm.

$$1000\lambda = 1000 \times 500.10^{-9} \text{ m} = 5,00.10^{-4} \text{ m}$$

$$a = 5.10^{-3} \text{ m}$$

$$a > 1000\lambda.$$

On peut utiliser le modèle de l'optique géométrique.

2. La longueur d'onde d'un laser rouge est $\lambda \approx 650$ nm. L'épaisseur d'un cheveu est la taille caractéristique qui va limiter la propagation soit $a \approx 100$ μm .

$$1000\lambda = 1000 \times 650.10^{-9} \text{ m} = 6,50.10^{-4} \text{ m}$$

$$a = 100 \times 10^{-6} \text{ m} = 1,00.10^{-4} \text{ m}$$

$$a < 1000\lambda.$$

On ne peut pas utiliser le modèle de l'optique géométrique.

3. La longueur d'onde des radiations d'un four micro-ondes est $\lambda \approx 10$ cm. On prend comme taille caractéristique qui limite la propagation la profondeur du four micro-onde, soit $a \approx 50$ cm.

$$1000\lambda = 1000 \times 1,0.10^{-1} \text{ m} = 1,0.10^2 \text{ m}$$

$$a = 5,0.10^{-2} \text{ m}$$

$$a < 1000\lambda.$$

On ne peut pas utiliser le modèle de l'optique géométrique.

Exercice II.2. Incidence de Brewster ★

Le schéma présenté Figure 1.8 nous permet d'exprimer l'angle de Brewster en fonction des paramètres du problème.

D'après le schéma, comme les rayons réfléchis et réfractés forment un angle droit, nous constatons que la somme de l'angle réfracté, de l'angle droit et de l'opposé de l'angle réfléchi est égal à 180° ou π

$$i_2 + \frac{\pi}{2} - r = \pi$$

or d'après la loi de la réflexion $i_1 = -r$ donc

$$i_2 + \frac{\pi}{2} + i_1 = \pi$$

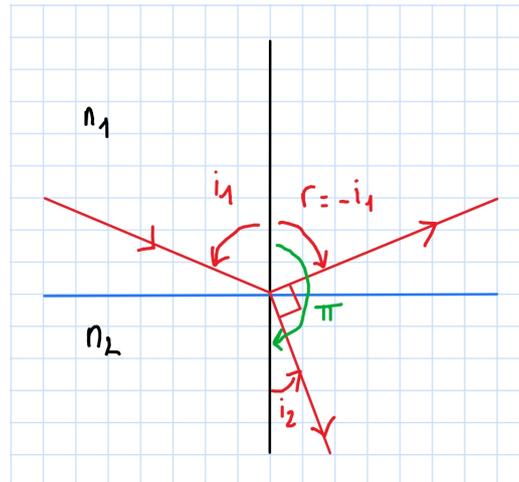


Figure 1.8 – Schéma d'une réfraction avec un angle d'incidence de Brewster.

on peut ainsi exprimer i_2 en fonction de i_1

$$i_2 = \pi - \frac{\pi}{2} - i_1$$

$$i_2 = \frac{\pi}{2} - i_1.$$

On peut alors utiliser une autre relation qui relie i_1 et i_2 afin d'isoler i_1 : la loi de la réfraction, soit

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

On peut remplacer i_2 par la relation obtenue plus haut

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin \left(\frac{\pi}{2} - i_1 \right)$$

or on sait que $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \cos \alpha$ donc

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \cos i_1$$

soit

$$\frac{\sin i_1}{\cos i_1} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\tan i_1 = \frac{n_2}{n_1}$$

ce qui pour $n_1 = 1$ et $n_2 = n$ donne un angle $i_1 \equiv i_B$ tel que

$$i_B = \arctan n.$$

Exercice II.3. Erreur sur le positionnement d'un objet ★ ★

Exploitions le schéma présenté Figure 1.9 afin de déterminer la véritable position de l'objet.

Un rayon issu de l'objet en C est réfracté à la surface de l'eau. Il se dirige alors vers l'oeil de l'observateur en A . L'oeil de l'observateur prolonge le rayon réfracté et il lui semble que l'objet se trouve en réalité au point F .

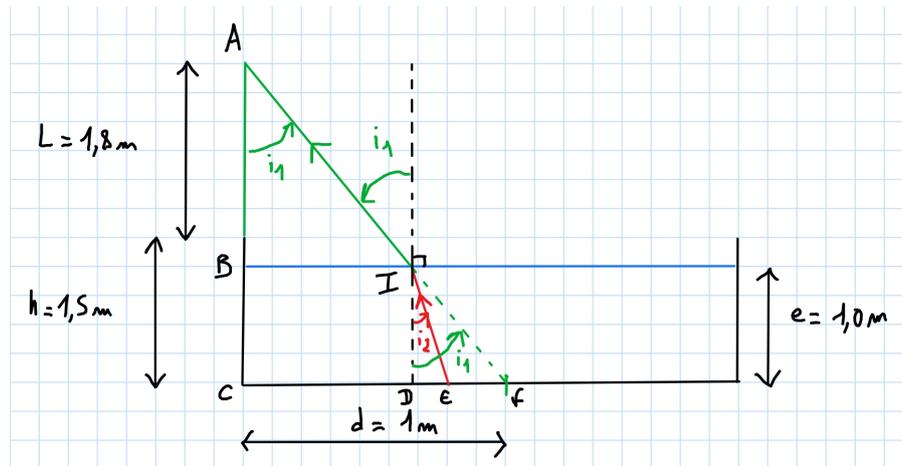


Figure 1.9 – Schéma du problème.

D'après la règle des angles alterne-interne on remarque que les angles \widehat{DIF} , l'angle \widehat{CAF} et l'angle d'incidence i_1 sont égaux.

Afin de déterminer la véritable position de l'objet on peut déterminer la différence entre la position apparente de l'objet par rapport au bord du bassin CF et la véritable position de l'objet par rapport au bord du bassin CE , soit $CF - CE = EF$. CF est connue, c'est la distance d , CE est inconnue, c'est la distance à déterminer, et EF peut être déterminé si on se place dans les triangles IDF et IDE .

Grâce aux relations trigonométriques dans ces triangles, nous pouvons exprimer DF et DE , ainsi que leur différence $EF = DF - DE$. Nous constatons ainsi que

$$\tan i_1 = \frac{DF}{IF}$$

$$\tan i_2 = \frac{DE}{IF}$$

avec IF la hauteur de l'eau dans le bassin, soit e . Donc

$$DF = e \tan i_1$$

$$DE = e \tan i_2.$$

La différence $EF = DF - DE$ est alors

$$EF = e(\tan i_1 - \tan i_2).$$

La véritable position de l'objet par rapport au bord du bassin CE est donc $CE = CF - EF$, soit, avec $CF = d$

$$CE = d - e(\tan i_1 - \tan i_2).$$

Il nous faut maintenant exprimer i_1 et i_2 . On peut obtenir i_1 en se plaçant dans le triangle CAI

$$\tan i_1 = \frac{CF}{CA}$$

avec CF la distance d et CA la hauteur du bassin h additionnée à celle de l'observateur L , soit

$$\tan i_1 = \frac{d}{h + L}.$$

Faisons l'application numérique pour obtenir i_1

$$i_1 = \arctan\left(\frac{d}{h+L}\right)$$

$$i_1 = \arctan\left(\frac{1}{1,5+1,8}\right)$$

$$i_1 = 17^\circ.$$

Pour obtenir i_2 nous exploitons la loi de la réfraction

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin i_1\right).$$

A.N.

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{1}{1,33} \sin 17^\circ\right)$$

$$i_2 = 13^\circ.$$

On peut alors obtenir la valeur de CE .

A.N.

$$CE = d - e(\tan i_1 - \tan i_2)$$

$$CE = 1,0 - 1,0(\tan 17^\circ - \tan 13^\circ)$$

$$CE = 9,2 \cdot 10^{-1} \text{ m.}$$

Exercice II.4. Réflexion d'onde courte sur l'ionosphère ★ ★

1. Il y a deux conditions pour qu'il y ait réflexion totale sur l'ionosphère.

D'abord, que le milieu incident, soit l'atmosphère neutre, soit plus réfringente que le milieu réfracté, soit l'ionosphère. C'est bien le cas car $n_{ion}/n_{neu} < 1$, soit $n_{ion} < n_{neu}$.

Ensuite, que l'angle incident i_1 soit supérieur à l'angle limite $i_{1,lim}$ avec $i_{1,lim} = \arcsin(n_2/n_1)$, soit ici

$$i_1 > \arcsin\left(\frac{n_{ion}}{n_{neu}}\right).$$

2. L'onde radio se propage par réflexions totales successives sur le dioptre séparant l'atmosphère et l'ionosphère, et par réflexions successives sur le sol.

3. Le nombre de réflexions est maximal lorsque l'onde émise par la station radio au point A a un angle $\pi/2 - |i_1|$ maximal, donc pour $|i_1|$ minimal. Or pour respecter les conditions de réflexion totale la valeur minimale de $|i_1|$ doit être $i_{1,lim}$.

Si on considère le schéma sur la Figure 1.10 on constate que lorsqu'une onde a parcouru une distance AC selon l'horizontale, elle subit une réflexion. Ainsi pour chaque multiple de cette distance AC l'onde subit le même multiple de réflexions. On peut donc obtenir le nombre de réflexions maximal, noté N , en divisant sa distance parcourue selon l'horizontale, notée L , par AC , soit

$$N = \frac{L}{AC}.$$

On peut obtenir AC en exploitant les relations trigonométriques dans le triangle ABC . Il vient que

$$\tan i_{i,lim} = \frac{AC}{BC}$$

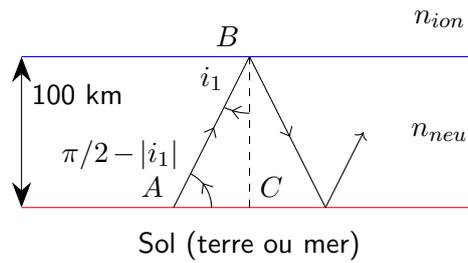


Figure 1.10 – Schéma des deux couches homogènes dans lesquelles se propage l'onde radio.

avec BC l'épaisseur de l'atmosphère neutre valant 100 km.

Il vient que

$$AC = BC \tan i_{i,lim}$$

$$AC = BC \tan \left(\arcsin \left(\frac{n_{ion}}{n_{neu}} \right) \right)$$

et donc

$$N = \frac{L}{BC \tan \left(\arcsin \left(\frac{n_{ion}}{n_{neu}} \right) \right)}$$

A.N.

$$N = \frac{865 \text{ km}}{100 \text{ km} \times \tan(\arcsin(0,908))}$$

$$N = 4.$$

Exercice II.5. Démonstration de la loi de la réfraction à l'aide du modèle ondulatoire ★ ★ ★

D'après la Figure 1.11 on constate que les triangles rectangles ABC et ADC partagent le même côté AC . On peut exprimer ce côté à l'aide des relations trigonométriques dans chacun des triangles.

Dans le triangle rectangle ABC , on constate que l'angle $\widehat{BCA} = \pi/2 - i_1$. On peut alors exprimer l'angle \widehat{CAB}

$$\pi = \widehat{CAB} + \widehat{BCA} + \frac{\pi}{2}$$

soit

$$\widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{BCA}$$

$$\widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - (\pi/2 - i_1)$$

$$\widehat{CAB} = i_1.$$

Si on considère que le côté $CB = \lambda_1$, il vient que

$$\sin i_1 = \frac{CB}{AC}$$

$$\sin i_1 = \frac{\lambda_1}{AC}$$

$$AC = \frac{\lambda_1}{\sin i_1}.$$

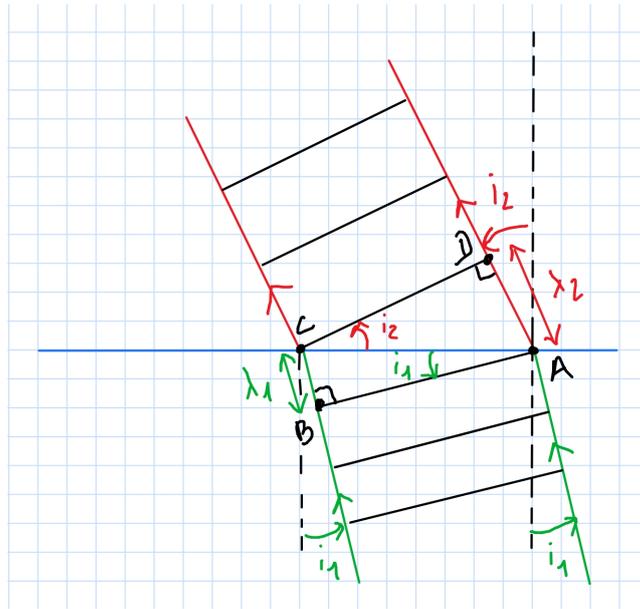


Figure 1.11 – Schéma du problème.

Dans le triangle rectangle ACD , on constate que l'angle $\widehat{DAC} = \pi/2 - i_2$. On peut alors exprimer l'angle \widehat{ACD}

$$\pi = \widehat{ACD} + \widehat{DAC} + \frac{\pi}{2}$$

soit

$$\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2} - \widehat{DAC}$$

$$\widehat{ACD} = \frac{\pi}{2} - (\pi/2 - i_2)$$

$$\widehat{ACD} = i_2.$$

Si on considère que le côté $AD = \lambda_2$, il vient que

$$\sin i_2 = \frac{AD}{AC}$$

$$\sin i_2 = \frac{\lambda_2}{AC}$$

$$AC = \frac{\lambda_2}{\sin i_2}.$$

On peut égaliser les deux expressions de AC

$$\frac{\lambda_1}{\sin i_1} = \frac{\lambda_2}{\sin i_2}.$$

La longueur d'onde d'une radiation dans un milieu dépend de l'indice du milieu n et de la longueur d'onde de la radiation dans le vide λ_0 telle que

$$\lambda_n = \frac{\lambda_0}{n}.$$

On peut donc exprimer λ_1 et λ_2

$$\frac{\lambda_0}{n_1 \sin i_1} = \frac{\lambda_0}{n_2 \sin i_2}$$

si on simplifie par λ_0

$$\frac{1}{n_1 \sin i_1} = \frac{1}{n_2 \sin i_2}$$

et donc

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2.$$

On retrouve bien la loi de la réfraction à partir du modèle ondulatoire.

Exercice II.6. Exercice de concours : Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Adapté du concours CCINP - MPI

1. La loi de Descartes de la réfraction est $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Dans notre cas ici n_1 correspond à $n_{\text{air}} = 1$, i_1 à i , n_2 à r et i_2 à r , soit $\sin i = n \sin r$.

2. Afin de déterminer l'angle Δ , on peut déterminer l'angle \widehat{ABD} , car on voit que cet angle et Δ sont liés de telle manière que $\pi = \widehat{ABD} + \Delta$.

Pour déterminer l'angle \widehat{ABD} , on va déterminer les angles \widehat{ABC} et \widehat{CBD} , car on voit que $\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD}$.

Commençons par le triangle ACB . Dans ce triangle on voit que l'angle \widehat{CAB} est tel que $\widehat{CAB} = \widehat{OAB} - \widehat{OAC}$, or $\widehat{OAC} = r$, et d'après la loi des angles alterne-interne, $\widehat{OAB} = i$, donc $\widehat{CAB} = i - r$. Dans le triangle OAC , on constate que les côtés OA et OC sont des rayons du cercle de centre O , ils sont donc égaux et ce triangle est isocèle. Ainsi, les angles \widehat{OAC} et \widehat{OCA} sont égaux et valent r .

À partir de l'angle $\widehat{OCA} = r$, on peut obtenir la valeur de l'angle \widehat{BCA} , car on voit que $\pi = \widehat{BCA} + \widehat{OCA}$, soit $\pi = \widehat{BCA} + r$, donc $\widehat{BCA} = \pi - r$.

Ayant obtenu $\widehat{CAB} = i - r$ et $\widehat{BCA} = \pi - r$, on peut obtenir \widehat{ABC} , car $\pi = \widehat{ABC} + \widehat{CAB} + \widehat{BCA}$, soit

$$\widehat{ABC} = \pi - \widehat{CAB} - \widehat{BCA} = \pi - (i - r) - (\pi - r) = 2r - i.$$

De plus, on voit que le triangle OCD est identique au triangle OCA , donc les triangles OAB et OCB sont aussi identiques, ainsi l'angle $\widehat{CBD} = \widehat{ABC}$, donc

$$\widehat{ABD} = \widehat{ABC} + \widehat{CBD} = 2\widehat{ABC} = 4r - 2i.$$

Finalement $\Delta = \pi - \widehat{ABD} = \pi - 4r + 2i$.

On exprime maintenant Δ en fonction de n et $x = \sin i$. On voit d'abord que $i = \arcsin x$. Ensuite grâce à la loi de la réfraction, on sait que $\sin i = n \sin r$, soit $x = n \sin r$, donc $\sin r = \frac{x}{n}$, soit $\arcsin(\sin r) = r = \arcsin\left(\frac{x}{n}\right)$. Ainsi

$$\Delta = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x}{n}\right) + 2 \arcsin x$$

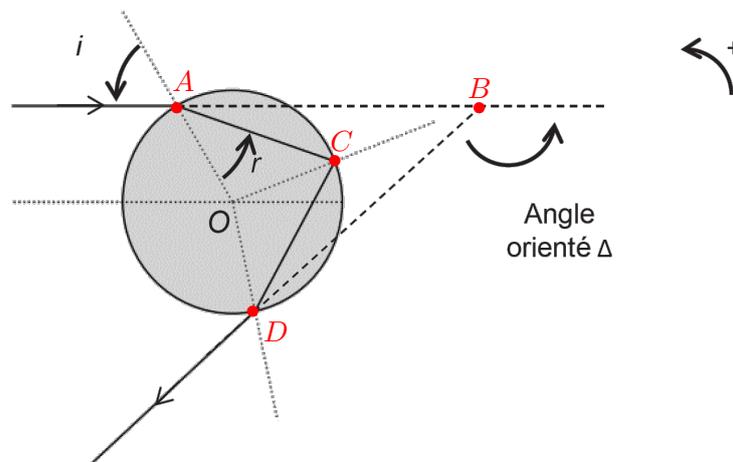


Figure 1.12 – Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

3. Afin de déterminer l'extremum de la fonction $\Delta(x)$, il faut déterminer la valeur de $x = x_m$ pour laquelle sa dérivée par rapport à x s'annule, soit $\frac{d\Delta(x)}{dx} = 0$.
En utilisant les données de l'énoncé, il vient que

$$\frac{d\Delta(x)}{dx} = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Cette expression s'annule pour $x = x_m$, soit

$$0 = -\frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_m^2}{n^2}}} + 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x_m^2}} \quad ; \quad 2 \frac{1}{\sqrt{1 - x_m^2}} = \frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_m^2}{n^2}}} \quad ; \quad \frac{n}{2} = \sqrt{\frac{1 - x_m^2}{1 - \frac{x_m^2}{n^2}}} \quad ;$$

$$\frac{n^2}{4} = \frac{1 - x_m^2}{1 - \frac{x_m^2}{n^2}} \quad ; \quad n^2 - x_m^2 = 4 - 4x_m^2 \quad ; \quad 3x_m^2 = 4 - n^2 \quad \text{donc} \quad x_m = \pm \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Comme $x_m = \sin i_m$ et que l'on s'intéresse aux valeurs positives de i_m , on retiendra seulement la valeur positive de x_m .

4. Sur la Figure 1.13, on constate qu'autour de la valeur i_m , l'angle d'incidence peut prendre de nombreuses valeurs (par exemple entre 40° et 80°) pour lesquelles la déviation $\Delta(x_m) + \delta$ sera proche de $\Delta(x_m)$. Ce qui signifie que de nombreux rayons incidents d'angle d'incidence de valeurs plus ou moins différentes de i_m vont émerger dans une direction similaire, **il y a donc accumulations de nombreux rayons lumineux de différentes incidences dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$** .

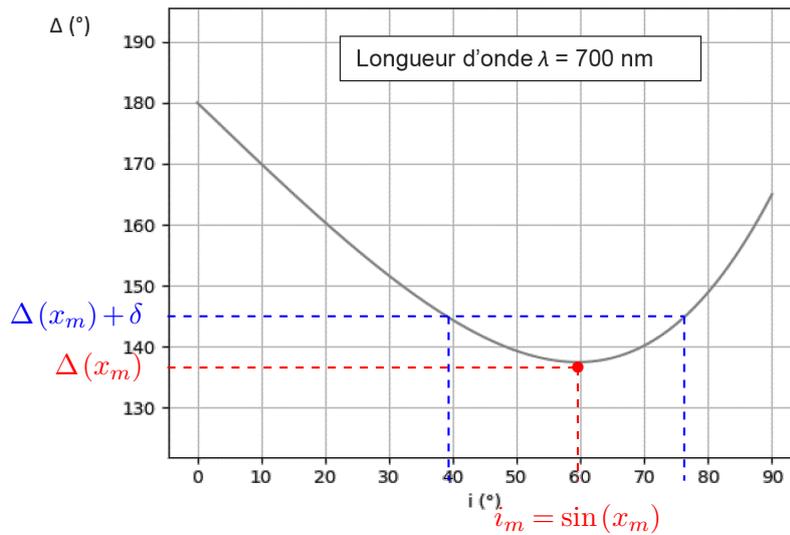


Figure 1.13 – Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

5. Dans le cas du violet

A.N.

$$x_{m,v} = \sqrt{\frac{4 - n_v^2}{3}} = \sqrt{\frac{4 - 1,343^2}{3}} = 0,856.$$

$$\Delta(x_{m,v}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x_{m,v}}{n_v}\right) + 2 \arcsin(x_{m,v}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{0,856}{1,343}\right) + 2 \arcsin(0,856) = 2,432 \text{ rad} = 139,4^\circ.$$

Dans le cas du rouge

A.N.

$$x_{m,r} = \sqrt{\frac{4 - n_r^2}{3}} = \sqrt{\frac{4 - 1,330^2}{3}} = 0,862.$$

$$\Delta(x_{m,r}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{x_{m,r}}{n_r}\right) + 2 \arcsin(x_{m,r}) = \pi - 4 \arcsin\left(\frac{0,862}{1,330}\right) + 2 \arcsin(0,862) = 2,400 \text{ rad} = 137,5^\circ.$$

6. L'observateur observe des rayons rouges et violets, ces rayons arrivent donc au niveau de ses yeux. On sait que le violet a subi une plus grande déviation que le rouge, donc d'après le schéma, l'observateur voit le rayon rouge à l'extérieur de l'arc.

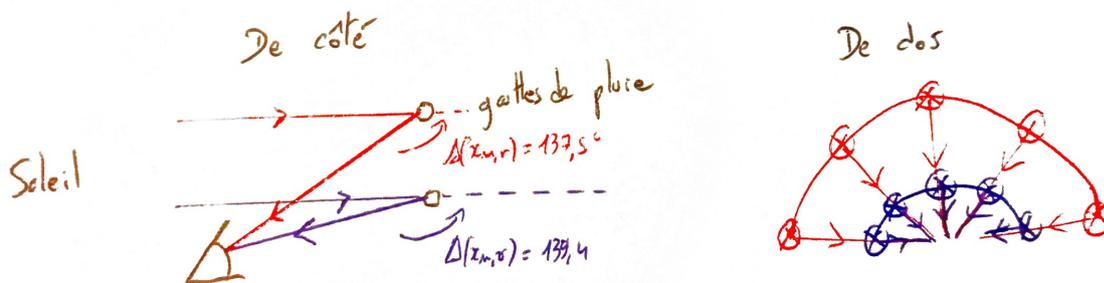


Figure 1.14 – Schéma de l'arc en ciel.