

# DS 1 : formation des images

Durée : 3h

## Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

## Données

- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \tan \alpha \approx \alpha.$$

## 1 L'instrument OSIRIS

*Adapté du concours EPITA - IPSA - Physique - MP, PC, PSI, PT (2015)*

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov - Guérassimenko (67P/TG) d'un diamètre de 4 km. La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5.

OSIRIS (Optical, Spectroscopic, and Infrared Remote Imaging System) est l'un des instruments scientifiques embarqués à bord de Rosetta. Il s'agit d'un système de deux caméras, une caméra haute résolution (NAC) et une caméra grand champ (WAC). Un des objectifs d'OSIRIS est de parvenir à détecter 67P/TG à une distance de  $10^6$  km. (*Cette distance étant très importante comparée à la taille caractéristique du système optique, la comète peut-être considérée comme un objet situé à l'infini.*)

Dans la suite du problème, on modélisera le système optique des caméras par une lentille mince. L'image est formée sur un capteur CCD. Les tableaux suivant donnent les propriétés des caméras NAC et WAC.

	NAC	WAC		Capteur CCD
Distance focale (mm)	717,4	132	Nombre de pixels	$2048 \times 2048$
Longueur d'onde (nm)	250 - 1000	240 - 720	Taille d'un pixel	$13,5 \times 13,5 \mu\text{m}^2$
Facteur de transmission	0,70	0,70	Rapport signal sur bruit	10

Table 1: Propriétés des caméras NAC et WAC.

1. Rappeler ce que sont les conditions de Gauss en optique géométrique.

Les conditions de Gauss sont **les conditions que doit respecter un système optique afin d'atteindre le stigmatisme approché**. Les conditions de Gauss sont respectées lorsque le système optique exploite uniquement des **rayons paraxiaux** : des rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique du système et peu éloignés de cette axe optique.

2. Pourquoi est-il souhaitable d'utiliser les instruments d'optique dans les conditions de Gauss ?

Les instruments d'optique utilisés dans les conditions de Gauss atteignent le stigmatisme approché : **ils produisent une image ponctuelle à partir d'un objet ponctuel**, et non une tâche.

3. On considère que le système optique d'OSIRIS est composé d'une lentille mince convergente de distance focale  $f'$ . Reproduire le schéma de la Figure 1 sur votre copie. Placer les foyers principaux objet  $F$  et image  $F'$  et construire géométriquement le rayon émergent issu de la comète en indiquant la méthode employée.

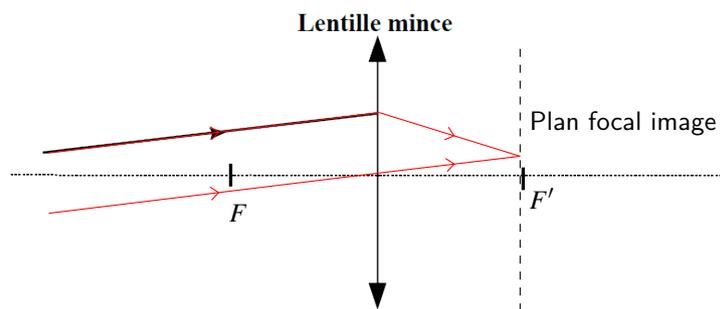


Figure 1: Schéma modélisant système optique d'OSIRIS.

L'objet est à l'infini, les rayons qu'il émet sont donc parallèles. Comme l'objet se trouve hors de l'axe optique du système, tous les rayons vont se croiser en un foyer secondaire image, qui est, par définition, sur le plan focale image de la lentille. Pour savoir où se trouve ce foyer secondaire, on utilise la propriété du rayon passant par le centre optique de la lentille qui donne un rayon émergent non dévié. On trace ce rayon passant par le centre optique et parallèle au rayon noir pour obtenir la position du foyer image secondaire qui nous intéresse. Le rayon émergent issu du rayon noir va également se propager vers ce foyer secondaire.

4. Indiquer à quelle distance de la lentille doit être placé le capteur CCD pour obtenir une image nette de la comète.

La distance de la comète par rapport à la lentille étant très grande devant la taille caractéristique du système optique, on considère que la comète est à l'infini pour la lentille. L'image d'un objet se trouvant à  $-\infty$  produit par une lentille mince convergente se situe **au foyer principal image  $F'$  de la lentille**.

5. Montrer qu'à une distance de  $10^6$  km, la taille de l'image géométrique de la comète formée par la caméra WAC est inférieure à 1 pixel.

Considérons l'angle  $\alpha$ , l'angle entre l'axe optique et le rayon de la comète. Nous pouvons exprimer cet angle en fonction de la distance de la comète par rapport au centre optique du système  $D = 10^6$  km et le rayon de la comète  $R = 2$  km

$$\tan \alpha = \frac{R}{D}.$$

Le système OSIRIS étant utilisé dans les conditions de Gauss, nous pouvons écrire

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{R}{D}.$$

Cet angle  $\alpha$  est aussi l'angle entre l'axe optique et le rayon de l'image de la comète sur le plan focal, soit sur le capteur CCD. On peut exprimer  $\alpha$  en fonction de la distance entre le centre optique de la lentille et le capteur CCD, la distance focale image  $f'$ , et le rayon de l'image sur le capteur CCD  $r$

$$\tan \alpha = \frac{r}{f'}$$

soit

$$\tan \alpha \approx \alpha \approx \frac{r}{f'}$$

On peut ainsi égaliser les deux expressions de  $\alpha$  pour obtenir une expression pour  $r$  le rayon de l'image de la comète

$$\alpha = \frac{R}{D} = \frac{r}{f'}$$

$$r = f' \frac{R}{D}$$

La taille de l'image de toute la comète est de  $2r$ , comparons cette valeur à la taille d'un pixel de  $13,5 \mu\text{m}$ .

**A.N.**

$$2r = 2 \times 132.10^{-3} \text{ m} \times \frac{2 \text{ km}}{10^6 \text{ km}}$$

$$2r = 5.10^{-7} \text{ m}$$

$$2r = 0,5 \mu\text{m}.$$

**La taille de l'image géométrique de la comète formée par la caméra WAC est inférieure à 1 pixel.**

## 2 Fibre optique - Approche géométrique

*Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2011)*

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la Figure 2 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe ( $Ox$ ), de diamètre  $2a$  et d'indice  $n$  entouré d'une gaine optique d'indice  $n_1$  légèrement inférieur à  $n$ . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents. Un rayon situé dans le plan  $Oxy$  entre dans la fibre au point  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta$ .

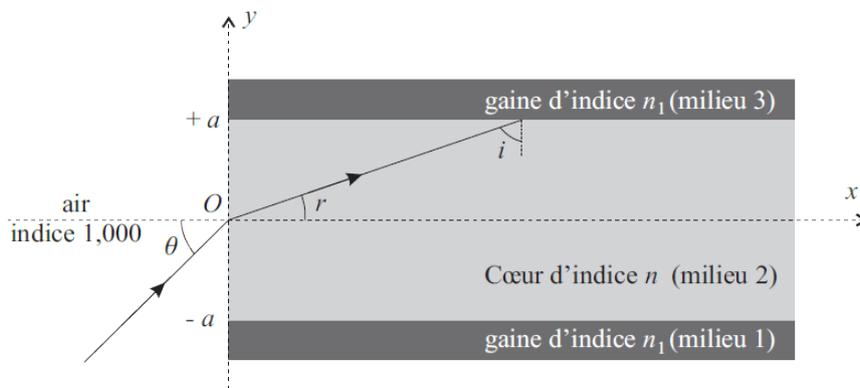


Figure 2: Fibre optique en coupe.

6. Les différents angles utiles sont représentés sur la Figure 2. À quelle condition sur  $i$ , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note  $i_l$  l'angle d'incidence limite.

Le rayon reste confiné à l'intérieur du cœur si **la réflexion à l'interface cœur-gaine est totale**. C'est le cas lorsque l'angle d'incidence  $i$  est supérieur à l'angle d'incidence limite  $i_l$  correspondant à un rayon émergent rasant, soit un rayon émergent avec un angle de réfraction  $i_2 = \pi/2$ , soit d'après la loi de la réfraction

$$n \sin i_l = n_1 \sin \frac{\pi}{2}$$

$$n \sin i_l = n_1.$$

La condition de confinement est donc

$$i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right).$$

7. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence  $\theta$  est inférieur à un angle limite  $\theta_l$  dont on exprimera le sinus en fonction de  $n$  et  $n_1$ . En déduire l'expression de l'ouverture numérique  $O.N. = \sin \theta_l$  de la fibre en fonction de  $n$  et  $n_1$  uniquement.

$\theta$  étant l'angle d'incidence sur le dioptre air-cœur en entrée de fibre, l'angle de réfraction des rayons est donné par la loi de la réfraction

$$\sin \theta = n \sin r$$

or  $r + i + \frac{\pi}{2} = \pi$ , soit  $r = \frac{\pi}{2} - i$ , donc

$$\sin \theta = n \cos i.$$

Or  $i > \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$ , si on applique la fonction cos sur cette inégalité, comme cette fonction est décroissante entre 0 et  $\pi/2$  l'inégalité change de signe

$$\cos i < \cos \left[ \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right) \right].$$

On peut exprimer le cosinus en fonction du sinus :  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$  donc  $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ , soit

$$\cos i < \sqrt{1 - \sin^2 \left[ \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right) \right]}$$

$$\cos i < \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2}$$

$$n \cos i < n \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2}$$

$$\sin \theta < \sqrt{n^2 - n_1^2}$$

$$\theta < \arcsin\left(\sqrt{n^2 - n_1^2}\right).$$

L'angle d'incidence  $\theta$  doit être inférieur à l'angle  $\theta_l$  tel que

$$\sin \theta_l = n \cos i_l = \sqrt{n^2 - n_1^2}.$$

L'expression de l'ouverture numérique de la fibre  $O.N.$  est donc

$$O.N. = \sin \theta_l$$

$$O.N. = \sqrt{n^2 - n_1^2}.$$

8. Donner la valeur numérique de  $O.N.$  pour  $n = 1,50$  et  $n_1 = 1,47$ .

**A.N.**

$$O.N. = \sqrt{1,50^2 - 1,47^2}$$

$$O.N. = 0,298.$$

On considère une fibre optique de longueur  $L$ . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence  $\theta$  variable compris entre 0 et  $\theta_l$ . On note  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.

9. Pour quelles valeurs de l'angle  $\theta$ , le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal et maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps  $\delta t$  entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n$  et  $n_1$ .

Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est minimal lorsque le rayon lumineux est parallèle à l'axe optique. Le temps de parcours  $t_{min}$  est donc

$$t_{min} = \frac{L}{c_n} = n \frac{L}{c}$$

avec  $L$  la longueur de la fibre et  $c_n$  la célérité du rayon dans le coeur de la fibre d'indice  $n$ .

Le temps de parcours de la lumière dans la fibre est maximal lorsque le rayon lumineux entre dans la fibre avec un angle d'incidence  $\theta_l$ . Ce rayon arrive sur l'interface coeur-gaine avec un angle  $i_{lim}$ . Lorsque ce rayon parcourt une distance  $d_{max}$ , le rayon du parcours minimal parcourt une distance  $d_{min}$ . Ces deux distances sont liées à l'angle  $i_{lim}$  telles que

$$\sin i_{lim} = \frac{d_{min}}{d_{max}}$$

soit

$$\frac{n_1}{n} = \frac{d_{min}}{d_{max}}$$

Le parcours maximal sera donc toujours lié au parcours minimal par la relation

$$d_{max} = \frac{n}{n_1} d_{min}$$

On peut donc obtenir le temps de parcours maximal  $t_{max}$

$$t_{max} = \frac{n}{n_1} \frac{d_{min}}{c_n}$$

$$t_{max} = \frac{n^2 L}{n_1 c}$$

L'intervalle de temps  $\delta t$  est donc

$$\delta t = t_{max} - t_{min}$$

$$\delta t = \frac{n^2 L}{n_1 c} - n \frac{L}{c}$$

$$\delta t = n \frac{L}{c} \left( \frac{n}{n_1} - 1 \right)$$

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique  $t_0 = t_2 - t_1$  formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et  $\theta_l$ . La Figure 3 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude  $A$  du signal lumineux en fonction du temps  $t$ .

10. Reproduire la Figure 3 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique  $t'_0$  de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

La durée caractéristique de l'impulsion lumineuse  $t'_0$  en sortie est

$$t'_0 = t_0 + \delta t$$

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission  $F$ .

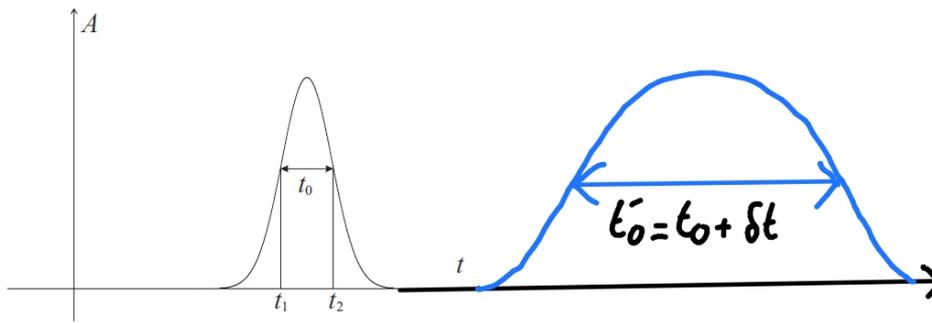


Figure 3: Impulsion lumineuse.

11. En supposant  $t_0$  négligeable devant  $\delta t$ , quelle condition portant sur la fréquence d'émission  $F$  exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour que les impulsions ne se recouvrent pas à la sortie de la fibre optique, il faut que la durée des impulsions en sortie de la fibre soit être plus courte que le délai entre deux impulsions successives. Ce délai correspond à la période  $T$  d'émission des impulsions telle que  $T = 1/F$ .

Il faut donc que

$$t'_0 < T$$

$$t_0 + \delta t < T$$

soit, pour une durée d'impulsion d'entrée  $t_0$  négligeable devant  $\delta t$

$$\delta t < T$$

soit

$$n \frac{L}{c} \left( \frac{n}{n_1} - 1 \right) < \frac{1}{F}$$

ou

$$F < \frac{c}{nL} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

$$Fn \frac{L}{c} \left( \frac{n}{n_1} - 1 \right) < 1.$$

Pour une fréquence  $F$  donnée, on définit la longueur maximale  $L_{max}$  de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit  $B = L_{max} \cdot F$ .

12. Exprimer la bande passante  $B$  en fonction de  $c$ ,  $n$  et  $n_1$ .

La longueur maximale  $L_{max}$  de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions correspond à la condition limite pour laquelle il n'y a pas recouvrement soit

$$Fn \frac{L_{max}}{c} \left( \frac{n}{n_1} - 1 \right) = 1$$

soit

$$F = \frac{c}{nL_{max}} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}.$$

La bande passante  $B$  est alors

$$B = L_{max} \cdot F$$

$$B = L_{max} \frac{c}{nL_{max}} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}$$

$$B = \frac{c}{n} \frac{1}{\frac{n}{n_1} - 1}$$

13. Calculer la valeur numérique de la bande passante  $B$  (exprimée en MHz.km) avec les valeurs de  $n$  et  $n_1$  données dans la question 8. Pour un débit d'information de  $F = 100 \text{ Mbits.s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$ , quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de  $L_{max}$  obtenue.

**A.N.**

$$B = \frac{3.10^8 \text{ m.s}^{-1}}{1,50} \frac{1}{\frac{1,50}{1,47} - 1}$$

$$B = 9,80.10^9 \text{ m.s}^{-1}$$

$$B = 9,80.10^6 \text{ km.s}^{-1}$$

$$B = 9,80.10^6 \text{ Hz.km}$$

$$B = 9,80 \text{ MHz.km.}$$

Avec cette bande passante  $B$  et ce débit d'information  $F$ , on peut exprimer la longueur maximale de fibre optique  $L_{max}$  à partir de la relation

$$B = L_{max} \cdot F$$

soit

$$L_{max} = \frac{B}{F}$$

**A.N.**

$$L_{max} = \frac{9,80 \text{ MHz.km}}{100 \text{ MHz}}$$

$$L_{max} = 9,80.10^{-2} \text{ km}$$

$$L_{max} = 98,0 \text{ m.}$$

**D'après la valeur obtenue pour la longueur maximale de la fibre optique étudiée, on peut utiliser cette dernière pour des transferts de données informatiques dans un bâtiment, mais pas pour des grandes distances.**

### 3 Microscope de Van Leeuwenhoek

*Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2020)*

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule utilisée comme objectif. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon  $R = 0,60 \text{ mm}$  de centre  $C$ . L'indice optique de la silice sera noté  $n$ , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés  $F$  et  $F'$ .

Sur la Figure 4 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique ( $Cz$ ) se propageant dans une lentille boule d'indice optique  $n$  placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par  $C$ , perpendiculaire à l'axe ( $Cz$ ). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (*c'est-à-dire qu'on approximera les fonctions trigonométriques par leur développement limité à l'ordre 1 en 0*).

Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptries sont notés  $i_1$ , au point  $I$  en entrée de la lentille et  $i_2$  à l'extérieur de la lentille au point  $J$ , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés  $r_1$  et  $r_2$ . L'angle  $\widehat{F'CI}$  est noté  $\beta_r$  et l'angle de déviation  $\widehat{CF'K}$  sera noté  $\beta$ .

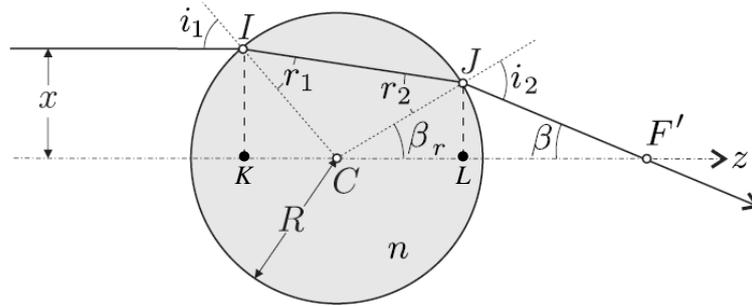


Figure 4: Lentille boule.

14. Déterminer la relation entre  $i_1$  et  $i_2$ .

On constate que le triangle  $ICJ$  est un triangle isocèle : les côtés  $IC$  et  $CJ$  correspondent au rayon  $R$  de la boule. Les valeurs absolues des angles  $r_1$  et  $r_2$  sont donc égaux. D'après le schéma  $r_1$  est positif et  $r_2$  est négatif si l'on utilise l'orientation des angles dans le sens trigonométrique.

De plus, d'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r_1 \quad \text{et} \quad n \sin r_2 = n_{air} \sin i_2$$

comme  $r_1 = -r_2$  on note  $r_1 = -r_2 \equiv r$ .

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r \quad \text{et} \quad n \sin(-r) = n_{air} \sin i_2$$

$$n_{air} \sin i_1 = n \sin r \quad \text{et} \quad -n \sin r = n_{air} \sin i_2$$

donc

$$n_{air} \sin i_1 = -n_{air} \sin i_2$$

$$\sin i_1 = -\sin i_2$$

$$i_1 = -i_2.$$

15. Exprimer  $i_1$  en fonction de  $x$  et  $R$ .

Le rayon lumineux arrivant parallèlement à l'axe optique ( $Cz$ ), si l'on considère la droite passant par les points  $I$  et  $C$ , l'angle qu'elle forme avec le rayon parallèle, soit  $i_1$ , est le même que l'angle qu'elle forme avec l'axe optique ( $Cz$ ), qu'on appelle ici  $\widehat{ICK}$ . Ainsi on peut se placer dans le triangle rectangle d'hypoténuse  $ICK$  pour exprimer la relation entre l'angle  $i_1$  et les côtés de ce triangle

$$\sin \widehat{ICK} = \sin i_1 = \frac{IK}{CI}$$

or  $IK = x$  et  $CI = R$ , donc

$$\sin i_1 = \frac{x}{R}$$

et si on exprime la fonction sinus par son développement limité à l'ordre 1 en 0

$$\sin i_1 \approx i_1 \approx \frac{x}{R}.$$

16. Exprimer  $\beta_r$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ , puis en fonction de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

Considérons l'angle  $\widehat{ICJ}$ . La somme des angles d'un triangle étant de  $\pi$ , on écrit que

$$\widehat{ICJ} = \pi - |r_1| - |r_2|$$

soit

$$\widehat{ICJ} = \pi - 2r.$$

On constate également que les angles  $\widehat{ICK} = i_1$ ,  $\widehat{ICJ}$  et  $\beta_r$  s'étendent sur un demi-cercle, leur somme est donc égale à  $\pi$ , soit

$$\pi = i_1 + \widehat{ICJ} + \beta_r$$

soit

$$\beta_r = \pi - i_1 - \widehat{ICJ}$$

$$\beta_r = \pi - i_1 - (\pi - 2r)$$

$$\beta_r = 2r - i_1.$$

Les angles  $i_1$  et  $r$  sont liés par la relation des Descartes  $n_{air} \sin i_1 = n \sin r$  qu'on peut approximer grâce au développement limité de la fonction sinus

$$n_{air} \sin i_1 \approx n_{air} i_1$$

$$n \sin r \approx nr$$

et comme  $n_{air}$  est pris égal à 1 il vient que

$$i_1 = nr \quad \text{ou} \quad r = \frac{i_1}{n}.$$

On peut ainsi exprimer  $\beta_r$

$$\beta_r \approx 2 \left( \frac{i_1}{n} \right) - i_1$$

$$\beta_r \approx i_1 \left( \frac{2}{n} - 1 \right).$$

En utilisant l'expression de  $i_1$  trouvé précédemment

$$\beta_r \approx \frac{x}{R} \left( \frac{2}{n} - 1 \right).$$

On considère maintenant que l'on peut utiliser l'égalité  $=$  à la place de l'approximation  $\approx$ .

17. Exprimer  $\beta$  en fonction de  $i_1$  et  $\beta_r$  puis de  $x$ ,  $R$  et  $n$ .

Considérons l'angle  $\widehat{CJF}'$ . On constate que cet angle et l'angle  $i_2$  s'étendent sur demi-cercle, soit

$$\pi = i_2 + \widehat{CJF}'$$

soit

$$\widehat{CJF}' = \pi - i_2$$

$$\widehat{CJF}' = \pi - i_1.$$

Dans le triangle  $CJF'$ , la somme des angles donne un angle de  $\pi$ , soit

$$\pi = \beta_r + \widehat{CJF}' + \beta$$

ainsi

$$\beta = \pi - \beta_r - \widehat{CJF}'$$

$$\beta = \pi - \beta_r - (\pi - i_1)$$

$$\beta = i_1 - \beta_r$$

soit

$$\beta = i_1 - i_1 \left( \frac{2}{n} - 1 \right)$$

$$\beta = 2i_1 \left( 1 - \frac{1}{n} \right)$$

$$\beta = \frac{2x}{R} \left( 1 - \frac{1}{n} \right).$$

18. En déduire la distance focale  $f'_L$  définie comme la distance  $CF'$  sur la Figure 4 en fonction de  $n$  et  $R$ . Afin d'obtenir la distance  $CF'$ , on estime d'abord les distances  $CL$  et  $LF'$  telles que  $CF' = CL + LF'$ . Pour obtenir la distance  $CL$  on se place dans le triangle  $CJL$ , il vient que

$$\cos \beta_r = \frac{CL}{CJ}$$

avec  $CJ = R$  et  $\cos \alpha \approx 1$  il vient que

$$1 = \frac{CL}{R}$$

donc

$$CL = R.$$

Exprimons également la distance  $JL$  qui est commune aux deux triangles d'intérêt ici  $CJL$  et  $LF'J$ . Dans le triangle  $CJL$  on peut écrire que

$$\sin \beta_r = \frac{JL}{CJ}$$

avec  $CJ = R$  et  $\sin \alpha \approx \alpha$  il vient que

$$\beta_r = \frac{JL}{R}$$

soit

$$JL = R\beta_r.$$

Pour obtenir la distance  $CL$  on se place dans le triangle  $LF'J$ , il vient que

$$\tan \beta = \frac{JL}{LF'}$$

avec  $JL = R\beta_r$  et  $\tan \alpha \approx \alpha$  il vient que

$$\beta = R \frac{\beta_r}{LF'}$$

soit

$$LF' = R \frac{\beta_r}{\beta}.$$

La distance focale  $f'_L = CF'$  est donc

$$CF' = CL + LF'$$

$$CF' = R + R \frac{\beta_r}{\beta}$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{x}{R} \left( \frac{2}{n} - 1 \right) \times \frac{R}{2x} \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \right)$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{2-n}{n} \right) \times \frac{n}{n-1} \right)$$

$$CF' = R \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{2-n}{n-1} \right)$$

$$CF' = R \left( \frac{2n-2}{2n-2} + \frac{2-n}{2n-2} \right)$$

$$CF' = R \frac{2n-2+2-n}{2n-2}$$

$$CF' = R \frac{n}{2n-2}$$

$$CF' = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1}$$

19. Estimer enfin numériquement  $f'_L$  en prenant  $n = 1,5$ .

**A.N.**

$$f'_L = \frac{R}{2} \frac{n}{n-1}$$

$$f'_L = \frac{0,60 \text{ mm}}{2} \frac{1,5}{1,5-1}$$

$$f'_L = \frac{0,60 \text{ mm}}{2} \frac{1,5}{1,5-1}$$

$$f'_L = 0,90 \text{ mm.}$$

Dans toute la suite,  $(Ox)$  désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan  $(Ox, Oz)$  et on prendra  $f'_L = 1,0 \text{ mm}$ . On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale  $f'_L$  et le même rayon  $R$ . Celle-ci est représentée sur la Figure 5.

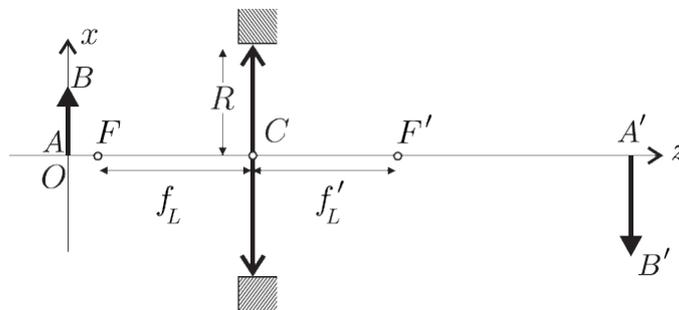


Figure 5: Lentille mince équivalente à la lentille boule.

Une des normes actuelles est d'imposer une distance  $l = 195 \text{ mm}$  sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

20. Exprimer  $l$  en fonction de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA'}$ .

La distance  $l$  correspond à la distance entre un objet positionné en  $A$  et son image positionnée en  $A'$ , soit  $\overline{AA'}$ . On peut exprimer cette distance en fonction des distances de l'objet et de l'image par rapport au centre optique  $C$  de la lentille

$$l = \overline{AC} + \overline{CA'}$$

soit

$$l = -\overline{CA} + \overline{CA'}$$

$$l = \overline{CA'} - \overline{CA}.$$

21. Montrer que  $\overline{CA}$  peut-être mis sous la forme d'une équation du second degré telle que

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

L'équation présentée contient des termes que l'on retrouve dans la relation de conjugaison de Descartes liée à la position :  $f'_L$  la distance focale de la lentille et  $\overline{CA}$  la distance entre le centre optique et la position de l'objet.

Exprimons cette relation

$$\frac{1}{\overline{CA'}} - \frac{1}{\overline{CA}} = \frac{1}{f'_L}$$

or  $l = \overline{CA'} - \overline{CA}$ , donc

$$\overline{CA'} = l + \overline{CA}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{1}{l + \overline{CA}} - \frac{1}{\overline{CA}} &= \frac{1}{f'_L} \\ \frac{\overline{CA} - l - \overline{CA}}{\overline{CA}(l + \overline{CA})} &= \frac{1}{f'_L} \\ -\frac{l}{\overline{CA}(l + \overline{CA})} &= \frac{1}{f'_L} \\ -\frac{\overline{CA}(l + \overline{CA})}{l} &= f'_L \\ -\overline{CA}^2 - l\overline{CA} &= lf'_L \end{aligned}$$

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

22. Afin que le grandissement transversal  $\gamma$  du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue, montrer que

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

Exprimons le grandissement à partir de la relation de conjugaison de Descartes du grandissement, soit

$$\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}.$$

Pour que  $|\gamma| > 1$ , comme  $\gamma < 0$ , il faut que  $\gamma < -1$ , soit

$$\frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}} < -1$$

or  $\overline{CA'} = l + \overline{CA}$  donc

$$\frac{l + \overline{CA}}{\overline{CA}} < -1$$

si on multiplie par  $\overline{CA} < 0$  des deux côtés de l'inégalité, on doit changer son sens, soit

$$l + \overline{CA} > -\overline{CA}$$

$$l > -2\overline{CA}$$

$$\frac{l}{2} > -\overline{CA}$$

or comme  $\overline{CA} < 0$ , on peut écrire que  $-\overline{CA} = |\overline{CA}|$  soit

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

23. À partir des deux derniers résultats, déterminer l'expression de  $\overline{CA}$  en fonction de  $l$  et  $f'_L$ .  
En résolvant l'équation du second degré précédente, on trouve deux solutions pour  $\overline{CA}$ .

$$\Delta = l^2 - 4lf'_L$$

$$\overline{CA}_- = -\frac{l}{2} - \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}$$

$$\overline{CA}_+ = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}.$$

Or on a montré que pour obtenir une image agrandie, il fallait que  $|\overline{CA}| < l/2$ , soit  $\overline{CA} > -l/2$ . Afin d'obtenir une image agrandie, seule la solution  $\overline{CA}_+$  respecte cette condition, ainsi il vient que

$$\overline{CA} = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}.$$

24. Calculer la valeur numérique de  $\overline{CA}$  et  $\overline{CA}'$ . Par quelles grandeurs peut-on les approximer ? Exprimer  $\gamma$  en fonction de ces grandeurs et calculer sa valeur numérique.

**A.N.**

$$\overline{CA} = -\frac{l}{2} + \frac{\sqrt{l^2 - 4lf'_L}}{2}$$

$$\overline{CA} = -\frac{195 \text{ mm}}{2} + \frac{\sqrt{195^2 - 4 \times 195 \times 0,90}}{2}$$

$$\overline{CA} = -0,90 \text{ mm.}$$

$$l = \overline{CA}' - \overline{CA}$$

$$\overline{CA}' = l + \overline{CA}$$

$$\overline{CA}' = 195 \text{ mm} + (-0,90 \text{ mm})$$

$$\overline{CA}' = 194 \text{ mm.}$$

On peut approximer  $\overline{CA}$  à  $f_L = -f'_L = -0,90 \text{ mm}$ , la distance focale objet de la lentille, et on peut approximer  $\overline{CA}'$  à  $l = 195 \text{ mm}$ , la distance entre l'objet et l'image. Ainsi

$$\gamma = \frac{\overline{CA}'}{\overline{CA}} \approx -\frac{l}{f'_L}.$$

**A.N.**

$$\gamma = -\frac{195 \text{ mm}}{0,90 \text{ mm}} = 217.$$

## 4 Étude d'une lunette astronomique

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes de même axe optique noté  $\Delta$  : un objectif noté  $L_1$ , de centre optique  $O_1$  et de distance focale  $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$  ; et un oculaire noté  $L_2$ , de centre optique  $O_2$  et de distance focale  $f'_2 = \overline{O_2F'_2}$ .

On souhaite observer la planète Mars qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent  $\alpha$ .

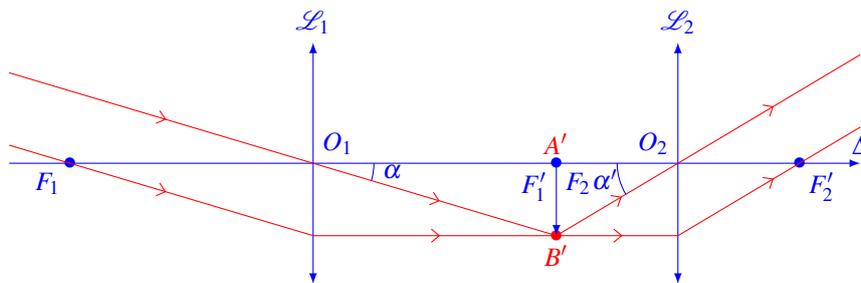
Pour observer la planète avec la lunette, on forme un système afocal.

25. **Expliquer** l'adjectif afocal. **En déduire** la position relative des deux lentilles.

Un système afocal est un système qui ne possède pas de foyer : des rayons qui arrivent de manière incidente sur ce système, ressortent parallèles également.

Pour que la lunette soit considéré comme afocal il faut donc que l'image  $A''B''$  produite par l'oculaire soit à l'infini, donc que l'objet qu'elle exploite soit sur son foyer objet principal  $F_2$ . Cette objet est l'image  $A'B'$  produite par l'objectif. Or cette image est produite à partir d'un objet  $AB$  à l'infini, elle est donc situé sur le foyer image principal de l'objectif  $F'_1$ . Donc  $F'_1$  et  $F_2$  sont confondus pour que la lunette soit considérée comme afocal.

26. **Réaliser** le schéma de la lunette pour  $f'_1 = 5f'_2$ . **Dessiner** sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux non parallèle à l'axe optique formé à partir d'un rayon issu de l'astre. On note l'image intermédiaire  $\overline{A'B'}$ .



27. On souhaite réaliser une photographie de l'image formée par la lunette. **Déterminer** où placer le capteur CCD. Le capteur CCD est pareil à un écran, pour qu'il puisse enregistrer une image il doit capturer une image à une distances finie. Ainsi, on doit placer le capteur au niveau de  $F'_1$  et  $F_2$ .

On note  $\alpha'$  l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.

28. **Déterminer** si l'image est droite ou renversée.

Comme on peut le voir sur le schéma, l'image est renversée car les rayons de la dernière image viennent du bas, alors que les rayons issus du premier l'objet viennent du haut.

29. **Exprimer** le grossissement  $G$  de la lunette en fonction des distances focales images de l'objectif et de l'oculaire.

Le grossissement  $G$  est défini tel que  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ . Or d'après le schéma, on voit que

$$\tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f'_1} \approx \alpha \quad \text{et} \quad \tan \alpha' = \frac{\overline{A'B'}}{f_2} \text{ car } \alpha \ll 1 \text{ et } \alpha' \ll 1.$$

Donc

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} \approx \frac{\overline{A'B'}}{f_2} \frac{f'_1}{\overline{A'B'}} = \frac{f'_1}{f_2}$$

soit

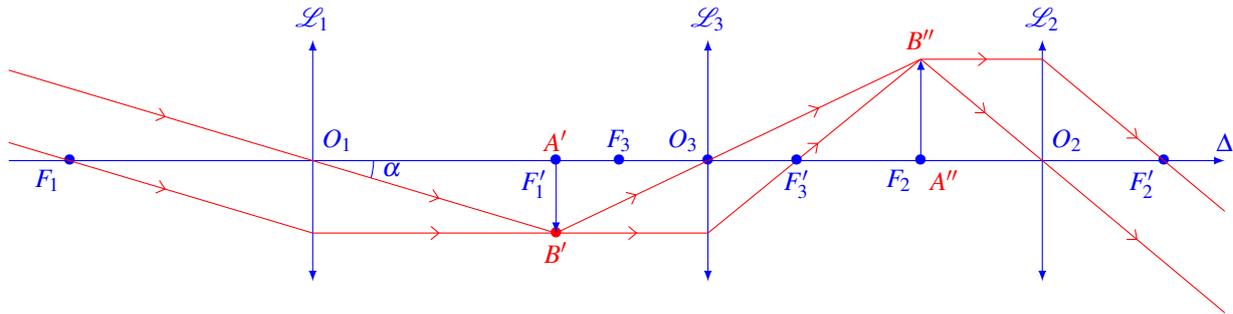
$$G \approx -\frac{f'_1}{f'_2}$$

On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre  $L_1$  et  $L_2$  une lentille convergente  $L_3$  de distance focale image  $f'_3 = \overline{O_3F'_3}$ . L'oculaire  $L_2$  est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

30. **Déterminer** les couples de points que doit conjuguer  $L_3$  pour avoir une image nette à l'infini.

Les couples de points que doit conjuguer  $L_3$  sont  $F'_1$  et  $F_2$ .

31. **Faire** un schéma (on placera  $O_3$  entre  $F_1$  et  $F_2$  et on appellera  $A'B'$  la première image intermédiaire et  $A''B''$  la seconde image intermédiaire).



32. On appelle  $\gamma_3$  le grossissement de la lentille  $L_3$ . **En déduire**  $\overline{O_3F'_1}$  en fonction de  $f'_3$  et  $\gamma_3$ .

D'après la relation de conjugaison de grossissement de Descartes

$$\gamma_3 = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F'_1}}$$

et d'après la relation de conjugaison de position de Descartes

$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_1}} = \frac{1}{f'_3}$$

ainsi

$$\frac{1}{\gamma_3 \overline{O_3F'_1}} - \frac{1}{\overline{O_3F'_1}} = \frac{1}{f'_3}$$

soit

$$\overline{O_3F'_1} = f'_3 \left( \frac{1}{\gamma_3} - 1 \right).$$

33. En déduire le nouveau grossissement  $G'$  en fonction de  $G$  et  $\gamma_3$ . Comparer  $G'$  à  $G$  en signe et valeur absolue.

Le nouveau grossissement  $G'$  est tel que  $G' = \frac{\alpha''}{\alpha}$  avec

$$\tan \alpha'' = \frac{\overline{A''B''}}{f_2} \quad \text{or} \quad \gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} \quad \text{donc} \quad \alpha'' \approx \tan \alpha'' = \gamma_3 \frac{\overline{A'B'}}{f_2}.$$

Comme  $\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f_1}$  il vient que

$$G' = \frac{\alpha''}{\alpha} \approx \gamma_3 \frac{\overline{A'B'}}{f_2} \frac{f_1}{\overline{A'B'}} = \gamma_3 \frac{f_1}{f_2} = \gamma_3 \frac{f'_1}{f'_2}$$

donc

$$G' = \gamma_3 G.$$

## 5 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Adapté du concours CCINP - MPI

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre  $D$  et d'indice de réfraction  $n$ . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la Figure 6.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence  $i$  (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note  $r$  l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence  $i$ .

L'indice de l'air vaut  $n_{\text{air}} = 1$ .

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (Figure 6) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

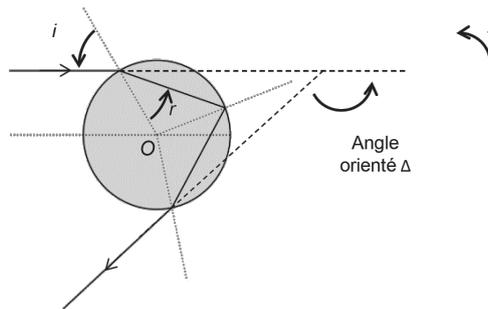


Figure 6: Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

34. **Rappeler** les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence  $i$  et l'angle de réfraction  $r$ .
35. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté  $\Delta$  (Figure 6).

**Montrer** que :  $\Delta = \pi - 4r + 2i$ .

**Exprimer** l'angle  $\Delta$  en fonction de  $n$  et de  $x = \sin i$ .

36. Montrer  $\Delta(x)$  passe par un extremum lorsque  $x$  a pour valeur :

$$x_m = \sin i_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Données :  $\frac{d}{du}(\arcsin(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$ .

37. **Justifier** à l'aide de la Figure 7 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction  $\Delta_m = \Delta(x_m)$ .

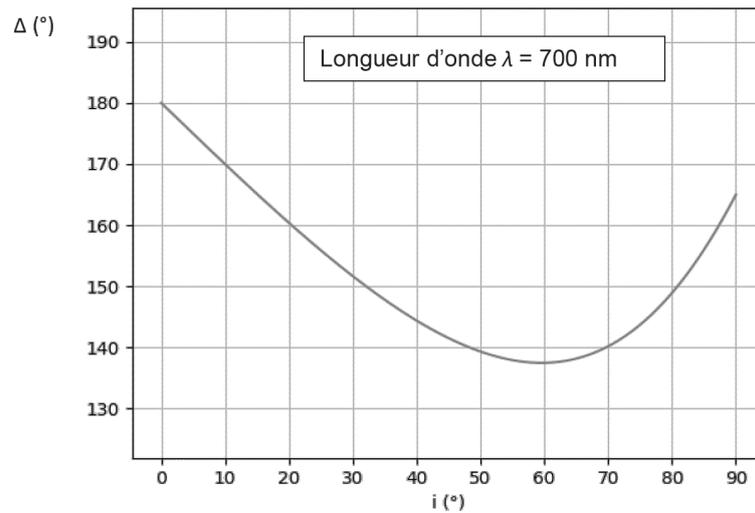


Figure 7: Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

38. **Calculer**  $x_m$  et  $\Delta_m$  (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ( $\lambda = 400 \text{ nm}$ ,  $n = 1,343$ ) et le rouge ( $\lambda = 700 \text{ nm}$ ,  $n = 1,330$ ).
39. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'oeil de l'observateur, **tracer** les rayons émergents rouge et bleu dans la direction  $\Delta_m$ . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?