

DS 1 : formation des images

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développements limités à l'ordre 1 en zéro de fonctions trigonométriques :

$$\cos \alpha \approx 1 \quad ; \quad \sin \alpha \approx \alpha \quad ; \quad \tan \alpha \approx \alpha.$$

1 L'instrument OSIRIS

Adapté du concours EPITA - IPSA - Physique - MP, PC, PSI, PT (2015)

Rosetta est une mission de l'agence spatiale européenne (ESA) qui a pour but d'étudier la comète Tchourioumov - Guérassimenko (67P/TG) d'un diamètre de 4 km. La sonde a été lancée le 2 Mars 2004 par une fusée Ariane 5.

OSIRIS (Optical, Spectroscopic, and Infrared Remote Imaging System) est l'un des instruments scientifiques embarqués à bord de Rosetta. Il s'agit d'un système de deux caméras, une caméra haute résolution (NAC) et une caméra grand champ (WAC). Un des objectifs d'OSIRIS est de parvenir à détecter 67P/TG à une distance de 10^6 km. (*Cette distance étant très importante comparée à la taille caractéristique du système optique, la comète peut-être considérée comme un objet situé à l'infini.*)

Dans la suite du problème, on modélisera le système optique des caméras par une lentille mince. L'image est formée sur un capteur CCD. Les tableaux suivant donnent les propriétés des caméras NAC et WAC.

	NAC	WAC		Capteur CCD
Distance focale (mm)	717,4	132	Nombre de pixels	2048×2048
Longueur d'onde (nm)	250 - 1000	240 - 720	Taille d'un pixel	$13,5 \times 13,5 \mu\text{m}^2$
Facteur de transmission	0,70	0,70	Rapport signal sur bruit	10

Table 1: Propriétés des caméras NAC et WAC.

1. Rappeler ce que sont les conditions de Gauss en optique géométrique.
2. Pourquoi est-il souhaitable d'utiliser les instruments d'optique dans les conditions de Gauss ?
3. On considère que le système optique d'OSIRIS est composé d'une lentille mince convergente de distance focale f' . Reproduire le schéma de la Figure 1 sur votre copie. Placer les foyers principaux objet F et image F' et construire géométriquement le rayon émergent issu de la comète en indiquant la méthode employée.

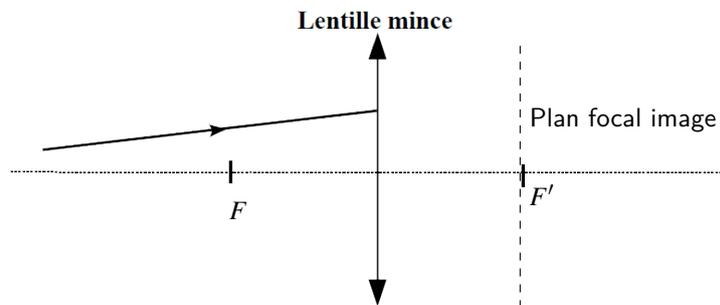


Figure 1: Schéma modélisant système optique d'OSIRIS.

4. Indiquer à quelle distance de la lentille doit être placé le capteur CCD pour obtenir une image nette de la comète.
5. Montrer qu'à une distance de 10^6 km, la taille de l'image géométrique de la comète formée par la caméra WAC est inférieure à 1 pixel.

2 Fibre optique - Approche géométrique

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2011)

Une fibre optique à saut d'indice, représentée sur la Figure 2 est formée d'un cœur cylindrique en verre d'axe (Ox) , de diamètre $2a$ et d'indice n entouré d'une gaine optique d'indice n_1 légèrement inférieur à n . Les deux milieux sont supposés homogènes, isotropes et transparents. Un rayon situé dans le plan Oxy entre dans la fibre au point O avec un angle d'incidence θ .

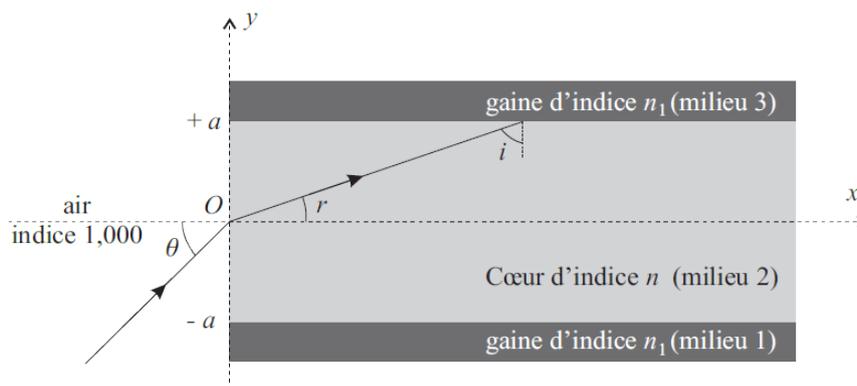


Figure 2: Fibre optique en coupe.

6. Les différents angles utiles sont représentés sur la Figure 2. À quelle condition sur i , angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_l l'angle d'incidence limite.
7. Montrer que la condition précédente est vérifiée si l'angle d'incidence θ est inférieur à un angle limite θ_l dont on exprimera le sinus en fonction de n et i_l . En déduire l'expression de l'ouverture numérique $O.N. = \sin \theta_l$ de la fibre en fonction de n et n_1 uniquement.

8. Donner la valeur numérique de ON . pour $n = 1,50$ et $n_1 = 1,47$.

On considère une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_l . On note c la vitesse de la lumière dans le vide.

9. Pour quelles valeurs de l'angle θ , le temps de parcours de la lumière dans la fibre est-il minimal et maximal ? Exprimer alors l'intervalle de temps δt entre le temps de parcours minimal et maximal en fonction de L , c , n et n_1 .

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse d'une durée caractéristique $t_0 = t_2 - t_1$ formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_l . La Figure 3 ci-dessous représente l'allure de l'amplitude A du signal lumineux en fonction du temps t .

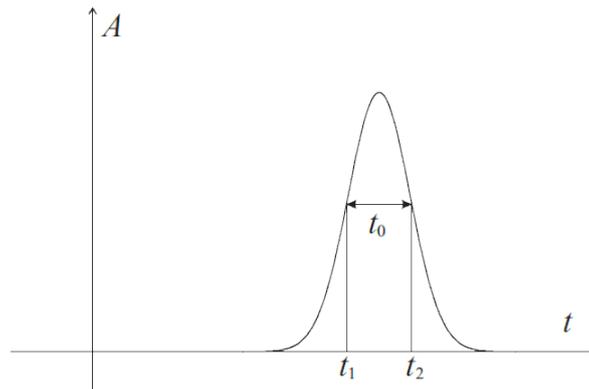


Figure 3: Impulsion lumineuse.

10. Reproduire la Figure 3 en ajoutant à la suite l'allure du signal lumineux à la sortie de la fibre. Quelle est la durée caractéristique t_0 de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre ?

Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (appelées "bits") périodiquement avec une fréquence d'émission F .

11. En supposant t_0 négligeable devant δt , quelle condition portant sur la fréquence d'émission F exprime le non-recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre optique ?

Pour une fréquence F donnée, on définit la longueur maximale L_{max} de la fibre optique permettant d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions. On appelle bande passante de la fibre le produit $B = L_{max} \cdot F$.

12. Exprimer la bande passante B en fonction de c , n et n_1 .

13. Calculer la valeur numérique de la bande passante B (exprimée en MHz.km) avec les valeurs de n et n_1 données dans la question 8. Pour un débit d'information de $F = 100 \text{ Mbits.s}^{-1} = 100 \text{ MHz}$, quelle longueur maximale de fibre optique peut-on utiliser pour transmettre le signal ? Commenter la valeur de L_{max} obtenue.

3 Microscope de Van Leeuwenhoek

Adapté du concours commun Mines-Ponts - Physique II - PC (2020)

Le premier microscope de Van Leeuwenhoek était rudimentaire et reposait sur l'utilisation d'une seule lentille boule utilisée comme objectif. Après polissage d'une goutte de silice fondue, Van Leeuwenhoek, obtint des lentilles boule de rayon $R = 0,60 \text{ mm}$ de centre C . L'indice optique de la silice sera noté n , les foyers objet et image de la lentille sont respectivement notés F et F' .

Sur la Figure 4 on a représenté la trajectoire d'un rayon lumineux initialement parallèle à l'axe optique (Cz) se propageant dans une lentille boule d'indice optique n placée dans l'air d'indice unitaire. Les rayons incidents et émergents se coupent dans un plan passant par C , perpendiculaire à l'axe (Cz). L'étude sera menée dans l'approximation de Gauss (*c'est-à-dire qu'on approximera les fonctions trigonométriques par leur développement limité à l'ordre 1 en 0*).

Les angles formés entre les rayons lumineux et les normales aux dioptres sont notés i_1 , au point I en entrée de la lentille et i_2 à l'extérieur de la lentille au point J , en sortie. De même, les angles intérieurs seront notés r_1 et r_2 . L'angle $\widehat{F'CJ}$ est noté β_r et l'angle de déviation $\widehat{CF'K}$ sera noté β .

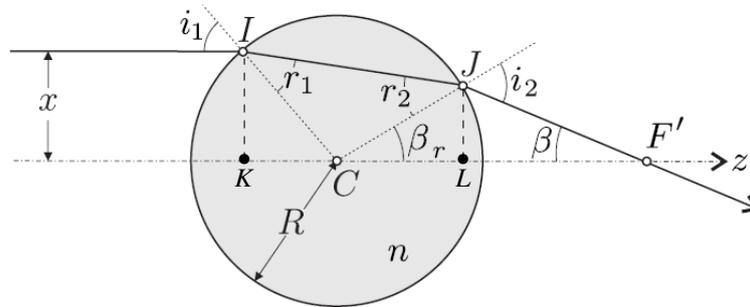


Figure 4: Lentille boule.

14. Déterminer la relation entre i_1 et i_2 .
15. Exprimer i_1 en fonction de x et R .
16. Exprimer β_r en fonction de i_1 et n , puis en fonction de x , R et n .
17. Exprimer β en fonction de i_1 et β_r puis de x , R et n .
18. En déduire la distance focale f'_L définie comme la distance CF' sur la Figure 4 en fonction de n et R .
19. Estimer enfin numériquement f'_L en prenant $n = 1,5$.

Dans toute la suite, (Ox) désigne la direction transverse à l'axe optique contenant l'objet étudié. On limite l'étude au plan (Ox, Oz) et on prendra $f'_L = 1,0$ mm. On utilise à présent un modèle de lentille mince équivalent à la lentille boule, possédant la même distance focale f'_L et le même rayon R . Celle-ci est représentée sur la Figure 5.

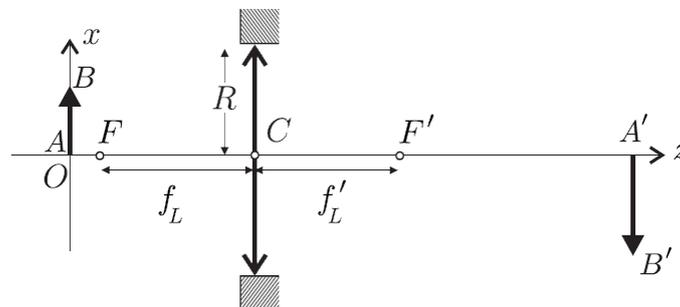


Figure 5: Lentille mince équivalente à la lentille boule.

Une des normes actuelles est d'imposer une distance $l = 195$ mm sur l'axe optique entre un objet et son image à travers l'objectif.

20. Exprimer l en fonction de \overline{CA} et $\overline{CA'}$.
21. Montrer que \overline{CA} peut-être mis sous la forme d'une équation du second degré telle que

$$\overline{CA}^2 + l\overline{CA} + lf'_L = 0.$$

22. Afin que le grandissement transversal γ du microscope de Van Leeuwenhoek soit supérieur à 1 en valeur absolue, montrer que

$$|\overline{CA}| < \frac{l}{2}.$$

23. À partir des deux derniers résultats, déterminer l'expression de \overline{CA} en fonction de l et f'_L .
24. Calculer la valeur numérique de \overline{CA} et $\overline{CA'}$. Par quelles grandeurs peut-on les approximer ? Exprimer γ en fonction de ces grandeurs et calculer sa valeur numérique.

4 Étude d'une lunette astronomique

Une lunette astronomique est schématisée par deux lentilles minces convergentes de même axe optique noté Δ : un objectif noté L_1 , de centre optique O_1 et de distance focale $f'_1 = \overline{O_1F'_1}$; et un oculaire noté L_2 , de centre optique O_2 et de distance focale $f'_2 = \overline{O_2F'_2}$.

On souhaite observer la planète Mars qui est vue à l'oeil nu sous un diamètre apparent α .

Pour observer la planète avec la lunette, on forme un système afocal.

25. **Expliquer** l'adjectif afocal. **En déduire** la position relative des deux lentilles.
26. **Réaliser** le schéma de la lunette pour $f'_1 = 5f'_2$. **Dessiner** sur ce schéma la marche à travers la lunette d'un faisceau lumineux non parallèle à l'axe optique formé à partir d'un rayon issu de l'astre. On note l'image intermédiaire $\overrightarrow{A'B'}$.
27. On souhaite réaliser une photographie de l'image formée par la lunette. **Déterminer** où placer le capteur CCD.
On note α' l'angle que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette.
28. **Déterminer** si l'image est droite ou renversée.
29. **Exprimer** le grossissement G de la lunette en fonction des distances focales images de l'objectif et de l'oculaire.
On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale image $f'_3 = \overline{O_3F'_3}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.
30. **Déterminer** les couples de points que doit conjuguer L_3 pour avoir une image nette à l'infini.
31. **Faire** un schéma (on placera O_3 entre F_1 et F_2 et on appellera $A'B'$ la première image intermédiaire et $A''B''$ la seconde image intermédiaire).
32. On appelle γ_3 le grandissement de la lentille L_3 . **En déduire** $\overline{O_3F'_1}$ en fonction de f'_3 et γ_3 .
33. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de G et γ_3 . Comparer G' à G en signe et valeur absolue.

5 Théorie géométrique de l'arc-en-ciel

Adapté du concours CCINP - MPI

Lorsque le soleil éclaire les gouttes d'eau, on peut observer dans certaines conditions un arc-en-ciel.

On considère une goutte d'eau sphérique, de diamètre D et d'indice de réfraction n . Les trajets des rayons lumineux sont représentés sur la Figure 6.

Soit un rayon lumineux incident, arrivant avec un angle d'incidence i (qui n'est pas nécessairement petit) sur la goutte. On note r l'angle de réfraction associé à l'angle d'incidence i .

L'indice de l'air vaut $n_{\text{air}} = 1$.

On considère un rayon sortant de la goutte d'eau après une seule réflexion à l'intérieur de la goutte et deux réfractions à l'entrée et à la sortie de la goutte (Figure 6) : ce rayon est à l'origine de l'arc-en-ciel principal.

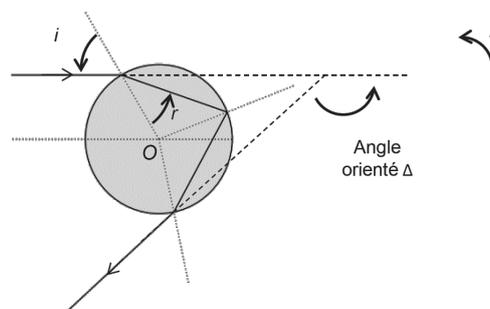


Figure 6: Cas d'une réflexion et de deux réfractions.

34. **Rappeler** les lois de Descartes de la réfraction et donner la relation entre l'angle d'incidence i et l'angle de réfraction r .
35. La déviation est l'angle dont il faut tourner le rayon incident pour l'amener sur le rayon émergent ; afin d'avoir une valeur positive, on considère ici son opposé, l'angle orienté Δ (Figure 6).

Montrer que : $\Delta = \pi - 4r + 2i$.

Exprimer l'angle Δ en fonction de n et de $x = \sin i$.

36. Montrer $\Delta(x)$ passe par un extremum lorsque x a pour valeur :

$$x_m = \sin i_m = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}.$$

Données : $\frac{d}{du}(\arcsin(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$.

37. **Justifier** à l'aide de la Figure 7 qu'on observe une accumulation de lumière dans la direction $\Delta_m = \Delta(x_m)$.

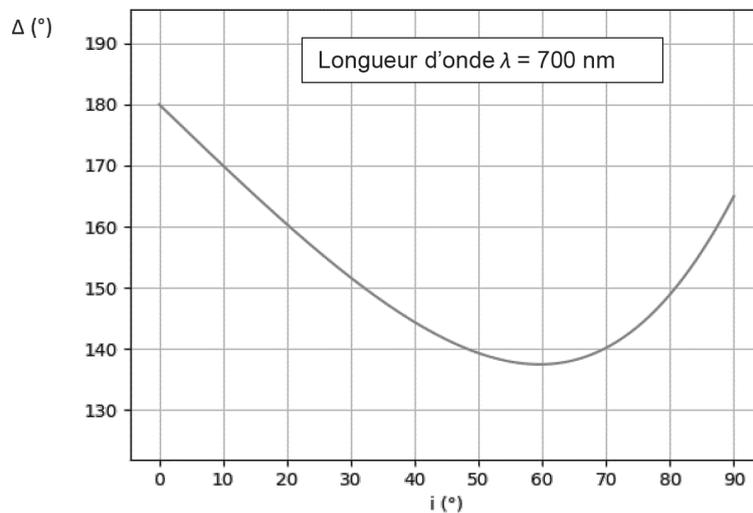


Figure 7: Déviation en fonction de l'angle d'incidence.

38. **Calculer** x_m et Δ_m (en degrés) dans le cas de l'eau, pour le violet ($\lambda = 400\text{nm}$, $n = 1,343$) et le rouge ($\lambda = 700\text{nm}$, $n = 1,330$).
39. Sur un schéma faisant apparaître les rayons incidents, parallèles, le rideau de pluie et l'oeil de l'observateur, **tracer** les rayons émergents rouge et bleu dans la direction Δ_m . L'observateur observe-t-il le rouge à l'intérieur ou à l'extérieur de l'arc ?