Chapitre 3 : Primitives et équations différentielles

Table des matières

1 Introduction

Ce chapitre est le premier volet des deux chapitres sur l'intégration au programme de MP2I. Il a une visée essentiellement pratique et calculatoire dans le but de résoudre des équations différentielles simples et du calcul intégral.
Nous allons dans un premier temps relier calcul de primitives et d'intégrales, travailler des techniques de calcul comme l'intégration par partie et le changement de variables puis dans un deuxième moment résoudre les équations différentielles linéaires du premier et second ordre.
Les équations différentielles apparaissent de manière naturelle en physique et modélisent de nombreuses situations dans toutes les sciences.
Il s'agit d'un type d'équation dont les inconnues ne sont plus des nombres mais des fonctions.

Remarque 1 *Dans ce chapitre, I désignera un intervalle et les résultats pourrons s'étendre aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ sauf si cela est précisé.*

La notion de dérivation d'une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ se définit comme suit :

Définition: Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une application telle que $t \mapsto \mathfrak{Re}(f(t))$ et $t \mapsto \mathfrak{Im}(f(t))$ soient dérivables. Alors f est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f'(t) = \mathfrak{Re}(f(t))' + i\mathfrak{Im}(f(t))'$$

Application à la Physique

Électrocinétique
Dans un dipole RC en régime sinusoïdal dont un générateur impose aux bornes du dipole une tension $e(t) = E\cos(\omega t + \phi)$.
On obtient que la tension dans le système est donnée en fonction du temps par

$$u(t) = \frac{Ee^{j\omega t}}{1 + jRC\omega} \quad \text{où } j = e^{2i\pi/3}$$

2 Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes

2.1 Définitions

Définition: Primitive
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction. On appelle **primitive de f** une fonction $F : I \to \mathbb{C}$ dérivable telle que $F' = f$.

Risque d'erreur
Une primitive n'est pas unique, on ne parlera donc pas de **la** primitive mais **d'une** primitive.
En effet, les fonctions constantes $x \mapsto 1$ et $x \mapsto 3$ sont deux primitives distinctes de la fonction nulle.

Exemple

- La fonction $x \mapsto \cos(x) - x$ est une primitive de $x \mapsto -\sin(x) - 1$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $x \mapsto \dfrac{x^n}{n!}$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!}$
- $x \mapsto -ie^{ix}$ est une primitive de $x \mapsto e^{ix}$.

2.2 Ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle

Lorsque une primitive existe on sait qu'elle n'est pas unique. On décrit ici l'ensemble des primitives d'une fonction donnée dès qu'elle admet une primitive.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$ admettant une primitive F_0. Alors l'ensemble des primitives de f sur I est :

$$\left\{ \begin{array}{rccl} F : & I & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & x & \longmapsto & F_0(x) + k \end{array} \quad \middle| \quad k \in \mathbb{C} \right\}$$

Si la fonction est à valeurs réelles, les primitives sont définies à une constante réelle près.

Exemple

L'ensemble des primitives de $f : x \mapsto x^3 - 1$ est

$$\{x \mapsto \frac{x^4}{4} - x + k \mid k \in \mathbb{R}\}$$

3 Primitives des fonctions usuelles

3.1 Tableau de primitives classiques

Le tableau suivant est inverse de celui des dérivées. Il permet de calculer directement un grand nombre d'intégrales.

Fonction f	**Primitive** F	**Intervalle** I
$x \mapsto a$ (constante non nulle)	$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n (n \geq 1)$	$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{x^n}\ (n > 1)$	$x \mapsto -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty; 0[$ ou$]0; +\infty[$
$x \mapsto x^\alpha \quad (\alpha \neq -1)$	$x \mapsto \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ch(x)$	$x \mapsto sh(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto sh(x)$	$x \mapsto ch(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$	$x \mapsto \arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto arcsin(x)$	$]-1; 1[$
$x \mapsto \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$x \mapsto arcos(x)$	$]-1; 1[$
$x \mapsto \ln(x)$	$x \mapsto x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^\star$
$x \mapsto \tan(x)$	$x \mapsto -\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[,\ k \in \mathbb{Z}$

3.2 Primitive d'une exponentielle par une fonction trigonométrique

Proposition

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^\star$. Alors $x \mapsto \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$ est une primitive de $x \mapsto e^{\lambda x}$.

Cf. Chapitre sur les complexes.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{C}$, une fonction admettant une primitive $F : I \to \mathbb{C}$. Alors $\mathfrak{Re}(F)$ et $\mathfrak{Im}(F)$ sont des primitives respectivement de $\mathfrak{Re}(f)$ et $\mathfrak{Im}(f)$.

On peut appliquer le résultat précédent pour rechercher des primitives de fonctions réelles :

Méthode

Comment déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$

1. On pose $\lambda = a + ib$ et $f(x) = e^{\lambda x} = e^{ax}\cos(bx) + ie^{ax}\sin(bx)$.
2. On sait que $F : x \mapsto \dfrac{e^{\lambda x}}{\lambda}$ est une primitive de f.
3. On calcule la partie réelle et imaginaire de F et on obtient ainsi une primitive respective de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.

Exemple

$x \mapsto e^x \times \left(\dfrac{\cos(x) - \sin(x)}{2}\right)$ est une primitive de $x \mapsto e^x\cos(x)$.

Exercice 1 *Déterminer une primitive de* $e^{2x}\cos(3x)$ *et de* $e^{2x}\sin(3x)$

3.3 Primitives de $\dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$

Le but de cette partie est de déterminer les primitives des fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2 + bx + c}$. On distingue d'abord divers cas simples.

Pour $a \neq 0$, on sait calculer les primitives des fonctions de la forme $x \mapsto \dfrac{1}{ax + b}$ à l'aide de la fonction logarithme.

Proposition

Soit $a \neq 0$ et $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \setminus \{\frac{-b}{a}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{ax+b} \end{array}$. Alors f admet comme primitive la fonction qui à x associe $F(x) = \dfrac{\ln(|ax + b|)}{a}$.

Démonstration :

Proposition

Soit $a \neq 0$ et $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} \setminus \{\frac{-b}{a}\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{(ax+b)^2} \end{array}$. Alors f admet comme primitive la fonction qui à x associe $F(x) = \dfrac{-1}{a} \times \dfrac{1}{ax + b}$.

Démonstration :

Proposition

Soit $a \neq 0$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{(ax+b)^2+1} \end{array}$. Alors f admet comme primitive la fonction qui à x associe $F(x) = \dfrac{1}{a} \times arctan(ax+b)$.

Démonstration :

Des primitives précedentes on peut déduire une primitive en général des fonctions de la forme $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$ comme indiqué dans la méthode suivante :

Méthode

Soient $a \neq 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$. On distingue 3 types de primitives suivant le signe du discriminant de ax^2+bx+c :

1. Si $\Delta > 0$, le polynôme $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$.
   (a) On détermine ainsi α et $\beta \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \dfrac{1}{a} \times \left[\dfrac{\alpha}{x-x_1} + \dfrac{\beta}{x-x_2}\right]$.
   (b) On en déduit une primitive de f qui s'écrit sous la forme :
   $$\frac{\alpha}{a} \times \ln(|x-x_1|) + \frac{\beta}{a} \times \ln(|x-x_2|)$$
2. Si $\Delta = 0$, alors il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = a(x-x_0)^2$. Une primitive de f est donc
   $$F(x) = \frac{-1}{a} \times \frac{1}{x-x_0}$$
3. Si $\Delta < 0$, alors il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tel que $ax^2+bx+c = \alpha((\beta x+\gamma)^2+1)$. Une primitive de f est donc
   $$F(x) = \frac{1}{\alpha\beta} \times arctan(\beta x + \gamma)$$

Exercice 2 *Déterminer les primitives des fonctions suivantes :*

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-3x+2}$

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4x+4}$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{x^2+x+1}$

4 Existence de primitives

4.1 Théorème fondamental de l'analyse

Théorème: Théorème fondamental de l'analyse

Soit f une fonction continue sur I et $a \in I$. Alors :

$$F : \begin{array}{ccl} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)dt \end{array}$$

est dérivable et a pour dérivée la fonction f.

Démonstration admise (pour l'instant)

Pour une fonction f à valeurs complexes on utilise le théorème précédent à la partie réelle et imaginaire. En effet, on a :

$$\boxed{\int_a^b f(t)dt = \int_a^b Re(f(t))dt + \int_a^b Im(f(t))dt}$$

Remarque 2 *La primitive donnée dans le théorème est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Notation 1 *On pourra noter $\displaystyle\int^x f(t)dt$ une primitive générique de la fonction f.*

On en déduit ainsi l'outil fondamental du calcul intégral que vous avez déjà rencontré en classe de terminale.

Proposition

Soit f continue sur I et F une primitive de f sur I. Alors pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

On note $F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b$.

Exemple

On sait que $f : x \mapsto \cos(x) - x$ est continue sur $[0, \pi]$ et admet pour primitive $F : x \mapsto \sin(x) - \frac{x^2}{2}$.
D'après le théorème fondamental de l'analyse on a :

$$\int_0^\pi f(t)dt = [F(t)]_0^\pi = (\sin(\pi) - \frac{\pi^2}{2}) - (\sin(0) - \frac{0^2}{2}) = -\frac{\pi^2}{2}$$

4.2 Fonction de classe $\mathcal{C}^1$

Dans le théorème fondamental de l'analyse, on a considéré une primitive, d'une fonction continue, qui est dérivable donc continue. Ce type de fonction est très utile en analyse et se nomme "fonctions de classe $\mathcal{C}^1$".

Définition: Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

On dit qu'une fonction f est de **classe** $\mathcal{C}^1$ sur I si elle est dérivable sur cet intervalle et si sa dérivée est continue sur I.
On note encore $f \in \mathcal{C}^1(I)$.

Exemple

Soit $I = [-1, 1]$.

1. La fonction $f : x \mapsto x^2 + x + 1$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
2. En revanche, la fonction $g : x \mapsto \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$ est continue mais n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Elle l'est par contre sur $]0, 1[$.

Proposition

Soit I un intervalle et $f, g \in \mathcal{C}^1(I)$. Alors :

- la somme $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- le produit $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda.f + \mu.g$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- si g ne s'annule pas sur I, le quotient $\dfrac{f}{g}$ est lui aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.
- Lorsque cela est bien définie, $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration :

Théorème: Linéarité de l'intégrale

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et f, g des fonctions continues sur I. Alors pour tous $a, b \in I$:

$$\int_a^b \lambda.f(t) + \mu.g(t)dt = \lambda.\int_a^b f(t)dt + \mu.\int_a^b g(t)dt$$

Démonstration :

Grâce au théorème fondamental, on relie aisément dérivée et intégration :

Proposition
Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors pour tous $a, b \in I$:

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f'(t)dt$$

Démonstration :

Exercice 3 *Montrer que* $F : x \mapsto \dfrac{Arctan(x)}{x^2+1}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}$ *et calculer sa dérivée.*

5 Techniques de calculs

5.1 Formules de dérivations

La première manière de calculer une intégrale est, en lien avec la définition par les primitive, de pouvoir aisément reconnaître une primitive de la fonction que l'on souhaite intégrer. On peut utiliser les formules suivantes de dérivations :

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})' \qquad \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)'$$

$$2u'u = (u^2)' \qquad u'u^n = \left(\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' \qquad u'u^\alpha = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' (\alpha \neq -1)$$

$$\frac{u'}{u} = (\ln|u|)' \qquad u'e^u = (e^u)'$$

.

Exercice 4 *Soit* f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}_+^*$ *par* $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$*. Déterminer une primitive de* f*.*

5.2 Intégration par partie

Théorème

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. Alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$$

Démonstration :

Exemple

Déterminons à l'aide d'une intégration par partie la valeur de $\displaystyle\int_1^e \ln(t)dt$.

On pose pour cela $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$, on a donc pour tout $t \in [1, e]$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et une primitive de v' est donnée par $v(t) = t$.Les fonction u et v sont bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, e]$.
D'après la formule d'intégration par partie on obtient :

$$\int_1^e \ln(t)dt = [t\ln(t)]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t}dt = e - \int_1^e 1dt = e - (e-1) = 1$$

Méthode

Pour calculer une intégrale par intégration par partie :

1. on détermine les fonctions u et v' qui interviennent et on vérifie qu'elles sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle considéré.
2. on calcule l'intégrale $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ qui doit être plus facile à calculer que l'intégrale initiale.
3. on applique la formule du théorème.

Exercice 5 *Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie :*

1. $\displaystyle\int_0^1 te^t dt.$

2. $\displaystyle\int_1^e \ln(x)dx.$

Exercice 6 *Déterminer, à l'aide d'une intégration par partie, une primitive de Arctan.*

5.3 Changement de variable

Théorème

Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, et u une fonction $\mathcal{C}^1$ sur $[\alpha;\beta]$, telle que $u([\alpha;\beta]) \subset [a;b]$. Alors

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(u(t))u'(t)dt = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(x)dx$$

Démonstration :

Exemple

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt$:

- on peut poser le changement de variable $t = \sin(u)$.
  En effet, on a sin de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \frac{\pi}{6}]$ et $\sin([0, \frac{\pi}{6}]) = [0, \frac{1}{2}]$ et $dt = \cos(u)du$.
- Par la formule de changement de variable, on obtient que :
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1-\sin(u)^2}\cos(u)du = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos(u)^2 du$$
- En linéarisant $\cos^2(u)$, on obtient $\cos^2(u) = \dfrac{1+\cos(2u)}{2}$ qui admet $u \mapsto \dfrac{u^2+\sin(2u)}{4}$ comme primitive.
- On obtient la valeur de l'intégrale initiale :
$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-t^2}dt = \left[\frac{u^2+\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{(\frac{\pi}{6})^2+\frac{1}{2}}{4}$$

Méthode

Soit $I = \int_a^b f(t)dt$. Pour effectuer un changement de variable :

- On pose $x = u(t)$ où u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a;b]$. On écrit alors $t = u^{-1}(x)$ puis $dt = (u^{-1})'(x)dx$.
- On s'occupe des bornes : lorsque $t = a$, $x = u(a)$ et lorsque $t = b$, $x = u(b)$.
- Enfin, on exprime $f(t)$ et dt uniquement avec x et dx.

On a alors $\int_a^b f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} g(x)dx$, cette intégrale étant a priori plus simple à calculer.

Exercice 7 *Calculer* $I = \int_0^1 \frac{\ln(1+e^t)}{1+e^{-t}} dt$ *en effectuant le changement de variable* $x = 1 + e^t$.

6 Équations différentielles linéaires du premier ordre

6.1 Définitions

Définition: Équation différentielle linéaire du premier ordre

On dit que $(\mathcal{E})$ est une **équation différentielle linéaire du premier ordre** s'il existe deux fonctions continues a et b définies sur un intervalle I telles que :

$$(\mathcal{E}): \quad y' + a(x)y = b(x)$$

d'inconnue y où y est une fonction définie sur l'intervalle I à valeurs complexes ou réelles.

On dit alors que y est une **solution** de $(\mathcal{E})$ et que b est **le second membre** de l'équation.

Remarque 3 *À partir de maintenant on parlera de I, a et b en faisant référence à cette définition sauf si cela est précisé.*
On dira parfois EDL d'ordre 1 par parler d'une ***équation différentielle linéaire d'ordre*** *1.*

Exemple

L'équation $(\mathcal{E})$: $y' - y = x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre qui admet comme solution sur $I = \mathbb{R}$ toutes la fonction $x \mapsto e^x - x - 1$ où $k \in \mathbb{R}$.

Définition: Équation homogène

On dit qu'une équation différentielle linéaire du premier ordre $(\mathcal{E})$: $\quad y' + a(x)y = b(x)$ est **homogène** si le second membre b est nulle sur l'intervalle I.

Remarque 4 *Lorsque a est la fonction nulle, résoudre $\mathcal{E}$ consiste simplement à rechercher l'ensemble des primitives de b sur l'intervalle I. Nous allons tenter en général de nous ramener à des calculs de primitives pour déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle.*

Tout comme pour les systèmes linéaires, il peut être utile de rendre homogène une équation différentielle pour la résoudre. Tout comme pour le lait, on dira qu'on *homogénéinise* une équation.

Définition: Équation homogène associée

Soit $(\mathcal{E})$: $\quad y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre.
On appelle **équation homogène associée** à $(\mathcal{E})$ l'équation $(\mathcal{E}_h)$: $\quad y' + a(x)y = 0$

6.2 Résolution d'une équation homogène

Une équation différentielle homogène admet toujours la fonction nulle comme solution. On s'intéresse ici à déterminer l'ensemble de toutes les solutions d'une équation différentielle homogène, pour cela nous allons montrer que l'ensemble des solutions est d'une telle équation est stable par combinaison linéaire puis se servir de l'exponentielle pour décrire les solutions en général.

Traitons un cas particulier avant d'aborder la résolution générale des équations homogènes lorsque le coefficient a est une fonction constante, c'est-à-dire lorsque l'équation est de la forme

$$(\mathcal{E}): \quad y' + ay = 0$$

Remarquons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(e^{-ax})' = -ae^{-ax}$. On a donc $(e^{-ax})' + a.e^{-ax} = -ae^{-ax} + a.e^{-ax} = 0$ donc $x \mapsto e^{-ax}$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

Soit maintenant, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E})$. On pose $y : x \mapsto f(x)e^{ax}$ définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable comme produit de fonctions dérivables. On a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$y'(x) = f'(x).e^{ax} + f(x).(ae^{ax}) = -a.f(x)e^{ax} + a.f(x)e^{ax} = 0$$

On en déduit que y est constante sur $\mathbb{R}$, il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \mapsto k.e^{-ax}$.

Conclusion : L'ensembles des solutions de l'équation $(\mathcal{E})$ est $\mathcal{S} = \{x \mapsto k.e^{-ax} \mid k \in \mathbb{R}\}$.

Précisons maintenant la structure de l'ensemble des solutions d'une équation différentielle homogène : elle est stable par combinaison linéaire.

Proposition

Soit $(\mathcal{E}_0)$: $\quad y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène. Soient f et g deux solutions de $(\mathcal{E}_0)$ définies sur I. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la fonction $\lambda.f + \mu.g$ est solution de $(\mathcal{E}_0)$

Démonstration :

Théorème: Existence des solutions non nulles d'une équation différentielle homogène du premier ordre

Soit $(\mathcal{E}_0)$: $\quad y' + a(x)y = 0$ une équation différentielle linéaire du premier ordre homogène. Alors :

1. Il existe une solution f_0 non nulle à $(\mathcal{E}_0)$.
2. Une telle solution ne s'annule pas.
3. L'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ est

$$\mathcal{S}_0 = \{\lambda.f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Démonstration :

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre

$$(\mathcal{E}_0) : \quad y' + a(x)y = 0 :$$

1. On détermine A une primitive de a.
2. On pose $f_0 : x \mapsto e^{-A(x)}$.
3. L'ensemble des solutions $\mathcal{S}_0$ de $(\mathcal{E}_0)$ est $\mathcal{S}_0 = \{\lambda.f_0 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 8 *Résoudre les équations différentielles suivantes en précisant l'ensemble de définition de a :*

1. $y' + \cos(x)y = 0$

2. $y' - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}y = 0$

3. $y' + \dfrac{\ln(x)}{x}.y = 0$

6.3 Principe de superposition

Voici le principe de superposition :

Théorème: Principe de superposition

Soient $(E_1) : y' + a(x)y = b_1(x)$ et $(E_2) : y' + a(x)y = b_2(x)$ des équations où les coefficients a, b_1 et b_2 sont définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Si f_1 et f_2 sont des solutions respective de (E_1) et (E_2) alors $f_1 + f_2$ est une solution de l'équation $(E_1 + E_2) : y' + a(x)y = b_1(x) + b_2(x)$.

Démonstration :

Méthode

Pour utiliser le principe de supersposition de manière adéquate on décompose le second membre en somme de membres plus simples qui admettent des solutions particulières simples puis on additionne ces solutions.

Exercice 9 *À l'aide du principe de superposition résoudre l'équation différentielle* $y' + y = \cos(x)$.

6.4 Méthode de la variation de la constante

On sait résoudre maintenant l'ensemble des équations différentielles linéaires homogènes du premier ordre. Pour résoudre une équation différentielle non homogène nous allons utiliser le *principe de superposition* : une solution d'une équation différentielle est somme d'une solution de l'équation différentielle homogène associée et d'une solution particulière de l'équation.

Proposition

Soit $(\mathcal{E})$: $\quad y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. Notons $\mathcal{S}_0$ l'ensemble des solutions de $(\mathcal{E}_0)$ l'équation homogène associée à $(\mathcal{E})$ et f_p une solution particulière de $(\mathcal{E})$. Alors l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de $(\mathcal{E})$ est :

$$\mathcal{S} = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}$$

Démonstration :

Il suffit donc de savoir déterminer une solution particulière pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre puisque nous disposons d'un algorithme pour résoudre les équations différentielles homogènes. On décrit une méthode au nom un peu paradoxal permettant de trouver une solution particulière de $(\mathcal{E})$: la méthode de *variation de la constante*.

Théorème: Variation de la constante

Soit $(\mathcal{E})$: $\quad y' + a(x)y = b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre et A une primitive de a. Alors, il existe une fonction dérivable $C : I \to \mathbb{R}$ telle que $\begin{array}{rccl} f_p : & I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & C(x).e^{-A(x)} \end{array}$ soit une solution particulière de $(\mathcal{E})$.

Démonstration :

Exemple

À l'aide de la variation de la constante déterminons une solution particulière de l'équation (E) : $\quad y' + x.y = x$.

On remarque tout d'abord que a et b sont continues sur $\mathbb{R}$, on va donc rechercher une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$.

- On pose $A : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$ une primitive de a et $f : x \mapsto C(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$ où C est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à déterminer de sorte que f_p soit une solution particulière de (E).

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f_p'(x) + x.f_p(x) = C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}} + C(x).(-x.e^{-\frac{x^2}{2}}) + x.C(x)e^{-\frac{x^2}{2}} = C'(x)e^{-\frac{x^2}{2}}$.
- On en déduit que f_p est une solution de (E) si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, $C'(x) = b(x).e^{\frac{x^2}{2}} = x.e^{\frac{x^2}{2}}$. On recherche donc une primitive de $x \mapsto x.e^{\frac{x^2}{2}}$ qui est évidente puisque C' est de la forme $u'exp(u)$. On pose donc $C(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$.
- On obtient que $f_p : x \mapsto 1 = e^{\frac{x^2}{2}} \times e^{-\frac{x^2}{2}}$ est une solution particulière de (E).

Remarque 5 *On aurait pu déterminer cette solution particulière de manière évidente. Il y a parfois des solutions évidentes pour des équations différentielles ce qui nécessite une certaine pratique.*

6.5 Plan de résolution d'une équation différentielle

Méthode

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre $(\mathcal{E}) : y' + a(x)y = b(x)$, où les coefficients sont définis sur un intervalle I, on suit les étapes suivantes :

1. On détermine l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0)$ associée à $(\mathcal{E})$. On a $\mathcal{S}_0 = \{x \mapsto k.e^{-A(x)} \mid k \in \mathbb{R}\}$ où A désigne une primitive de a.
2. On détermine une solution particulière f_p de $(\mathcal{E})$ soit en trouvant une solution évidente, en appliquant le principe de superposition ou bien en appliquant la méthode de la variation de la constante.
3. L'ensemble des solution de $(\mathcal{E})$ est,

$$\mathcal{S} = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}$$

Application à la SI

Les EDL d'ordre 1 représentent de nombreuses situations en sciences physiques ou industrielles.

Elle prend en général la forme :

$$y' + \frac{1}{\tau}y = \frac{A(t)}{\tau}$$

où

- y est une grandeur qui évolue au cours du temps.
- τ est une constante de la dimension du temps appelée **temps caractéristique**.
- $\frac{A}{\tau}$ modélise une action extérieure sur le système appelée en général **consigne** et est constante ou sinusoïdale. On dit que le régime est **libre** si $A = 0$ et **forcé** sinon.

Exercice 10 *Soit v la vitesse d'un corps de masse m en chute libre verticale dans un champ de pesanteur d'intensité g.*
Supposons que le corps est soumis à une force de frottement de l'air proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. L'équation qui régit l'évolution de v est :

$$m\frac{dv}{dt} = -\alpha v - g$$

1. *Déterminer le temps caractéristique et la consigne de cette équation.*
2. *Déterminer une expression de la vitesse du corps en fonction du temps.*

6.6 Problème de Cauchy

Nous avons vu à l'aide de la méthode de la variation de la constante qu'une équation différentielle du premier ordre admettait toujours au moins une solution. Le problème de Cauchy du premier ordre consiste à ajouter une condition initiale sur les solutions, ce qui arrive souvent en pratique en Physique ou Sciences de l'ingénieur. Dans ce cas là, il y a une unique solution.

Théorème: Solution au problème de Cauchy

Soit $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$, il existe une unique solution f au problème de Cauchy :

$$(\mathcal{C} : \quad y' + a(x)y = b(x) \quad \text{ et } f(x_0) = y_0$$

Démonstration :

Exercice 11 *Déterminer l'unique solution au problème de Cauchy suivant :*

$$\mathcal{C} : y' + 2y = 0 \quad y(1) = 4$$

7 Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants

On s'intéresse maintenant à une autre famille d'équation à laquelle on ajoute un ordre de dérivation : les équations différentielles linéaires d'ordre 2. Les principaux points de différence avec les équations différentielles linéaires d'ordre 1 se situent au niveau de la résolution des équations homogènes.

7.1 Définition

Définition: Équation différentielle linéaire d'ordre deux

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $c : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants**, abrégé EDL d'ordre 2 à coefficients constants, une équation de la forme : $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ d'inconnue une fonction dérivable deux fois sur I. Les fonctions a, b et c sont appelés les coefficients de $(\mathcal{E})$, c est en particulier le **second membre** de l'équation.
Lorsque le second membre est la fonction nulle on dit que $(\mathcal{E})$ est homogène.

Remarque 6 *Le cas des équations différentielles linéaire d'ordre deux générales n'est pas au programme de MP2I mais sera abordé en deuxième année.*

Exemple

L'équation $y'' + y' - y = \tan$ est une EDL d'ordre 2 non homogène dont on peut rechercher les solutions sur l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$.

7.2 Résolution des équations homogènes

Une EDL d'ordre 2 homogène admet au moins la solution nulle comme solution mais il en existe d'autres que l'on détermine à l'aide d'un outil appelé *équation caractéristique*.

Définition: Équation caractéristique

Soit $(\mathcal{E}_0) : y'' + a.y' + by = 0$ une EDL d'ordre deux homogène à coefficients constants.
On appelle **équation caractéristique de** $(\mathcal{E}_0)$ l'équation du second degré :

$$x^2 + ax + b = 0$$

L'introduction de cette équation se justifie par la proposition suivante :

Proposition

Soit $(\mathcal{E}_0) : y'' + a.y' + by = 0$ une EDL d'ordre deux homogène à coefficients constants et $r \in \mathbb{C}$.
Alors $x \mapsto e^{rx}$ est solution de $(\mathcal{E}_0)$ si et seulement si r est solution de son équation caractéristique.

Démonstration :

On distingue deux cas suivant l'ensemble d'arrivée des solution de l'équation différentielle.

On comment par le cas des solutions **à valeurs complexes**.

Proposition

Soit $(\mathcal{E}_0) : y'' + a.y' + by = 0$ une EDL d'ordre deux homogène à coefficients constants.

1. Si son équation caractéristique admet deux racines distinctes r_1 et r_2 alors les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda_1.e^{r_1 x} + \lambda_2.e^{r_2 x}$$

où λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

2. Si son équation caractéristique admeut une racine double r_0 alors l'ensemble des solutions de de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto e^{r_0 x}(\lambda_1 + \lambda_2.x)$$

où λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{C}$.

Démonstration :

Traitons maintenant le cas des solutions à valeurs réelles qui est légèrement plus complexe que dans $\mathbb{C}$.

Proposition

Soit $(\mathcal{E}_0) : y'' + a.y' + by = 0$ une EDL d'ordre deux homogène à coefficients constants.

1. Si son équation caractéristique admet deux racines distinctes réelles r_1 et r_2 alors les solutions de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda_1.e^{r_1 x} + \lambda_2.e^{r_2 x}$$

où λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

2. Si son équation caractéristique admet une racine double réeller$_0$ alors l'ensemble des solutions de de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto e^{r_0 x}(\lambda_1 + \lambda_2.x)$$

où λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

3. Si son équation caractérique admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = a - ib$ et $r_2 = a + ib$, alors l'ensemble des solutions de de $(\mathcal{E}_0)$ sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda_1.e^{ax}\cos(bx) + \lambda_2 e^{ax}\sin(bx)$$

où λ_1 et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Exercice 12 *Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes :*

1. $y'' + 4y' - 5y = 0$
2. $y'' - 2y' + y = 0$
3. $y'' + 2y' + 2y = 0$

7.3 Solution particulière

Il n'est pas aussi simple que dans le cas des EDL d'ordre un de trouver une solution particulière. La méthode de la variation de la constante existe mais elle est plus compliquée et n'est pas au programme.

On se restreint donc dans ce chapitre à déterminer des solutions particulières d'EDL d'ordre deux pour des seconds membres de la forme,

- $x \mapsto Ae^{\lambda x}$ où $A \neq 0, \lambda$ sont deux nombres complexes.
- $x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $x \mapsto B\sin(\omega x)$ où $B \neq 0$ et ω sont deux réels.
- $x \mapsto P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ une fonction polynomiale.

Méthode

Soit (E) une EDL d'ordre 2 de la forme $y''+ay'+by = Ae^{\lambda x}$ où A, λ sont deux nombres complexes ou réels.

Pour déterminer une solution particulière de cette équation, on distingue 3 cas.

1. Si λ n'est pas solution de l'équation caractéristique, on pose $f : x \mapsto \alpha.e^{\lambda x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est un paramètre à déterminer en remplaçant f dans l'équation.
2. Si λ est une racine simple de l'équation caractéristique, on pose $f : x \mapsto \alpha.xe^{\lambda x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est un paramètre à déterminer en remplaçant f dans l'équation.
3. Si λ est une racine double de l'équation caractéristique, on pose $f : x \mapsto \alpha.x^2e^{\lambda x}$ où $\alpha \in \mathbb{C}$ est un paramètre à déterminer en remplaçant f dans l'équation.

Méthode

La méthode précédente permet de déterminer une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ lorsque le second membre est $c : x \mapsto Be^{i\omega x}$

Dans le cas d'un second membre de la forme $c_1 : x \mapsto B\cos(\omega x)$ et $c_2 : x \mapsto B\sin(\omega x)$ où $B \neq 0$ et ω sont deux réels ;

1. on détermine une solution particulière f de l'équation associée au second membre c.
2. on obtient une solution particulière de $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c_1(x)$ en posant $f_1 : x \mapsto Re(f(x))$.
3. on obtient une solution particulière de $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c_2(x)$ en posant $f_1 : x \mapsto Im(f(x))$.

Méthode

Soit (E) une EDL d'ordre 2 de la forme $y''+ay'+by = P_n(x)$ où P_n est une fonction polynomiale de degré $n \in \mathbb{N}$.

1. On pose $f_p : x \mapsto b_n x^n + ... + b_1 x + b_0$ fonction polynomiale de degré n dont les coefficients sont à déterminer.
2. On injecte f_p dans l'équation différentielle de manière à obtenir un système linéaire à $n+1$ lignes et $n+1$ inconnues $b_0, b_1, \ldots, b_n$.

3. Une fois les coefficients b_i trouvés, on obtient la fonction polynômiale f_p solution particulière de l'équation $(\mathcal{E})$.

Exercice 13 *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle :*

1. $y'' - 3y' + 2y = 3e^x$
2. $y'' - 3y' + 2y = -5e^{-x}$
3. $y'' - 3y' + 2y = \cos(x)$
4. $y'' - 3y' + 2y = 1 + x^3$

Pour déterminer des solutions particulières dans le cas de seconds membres somme de second membre dont on sait déterminer une solution nous pouvons appliquer le principe de superposition valable pour les EDL d'ordre un.

Théorème: Principe de superposition

$(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ où $c(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.c_k(x)$ où λ_k constante et $c_k(x)$ second membre pour lequel on sait déterminer une solution particulière f_k de l'équation $(E_k) : y'' + a.y' + by = c_k(x)$. Alors, $f : x \mapsto \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k.f_k(x)$ est une solution particulière de l'équation (E).

Exercice 14 *Déterminer une solution particulière de l'équation différentielle* $y'' - 3y' + 2y = 3e^x - 5e^{-x} + \cos(x)$.

7.4 Résolution générale

Pour déterminer l'ensemble des solutions d'une EDL d'ordre deux à coefficients constants dont le second membre appartient à la famille étudiée dans ce chapitre, on se sert du principe suivant qui était déjà valable à l'ordre un.

Proposition

Soit $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ une EDL d'ordre 2 dont on connait une solution particulière f_p et l'ensemble : $mathcalS_0$ des solutions de l'équation homogène associée. Alors l'ensemble des solutions de (E) noté $\mathcal{S}$ est :

$$\mathcal{S} = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}$$

Démonstration :

On peut donc donner une méthode générale de résolution d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants.

Méthode

Soit $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ une EDL d'ordre 2 à coefficients constants.

Pour déterminer l'ensemble des solutions de (E),

1. On détermine l'ensemble $\mathcal{S}_0$ des solutions de l'équation homogène $(\mathcal{E}_0) \quad y'' + a.y' + by = 0$ associée à $(\mathcal{E})$. En passant par l'équation caractéristique $x^2 + ax + b = 0$.
2. Si $c(x) = Ae^{\lambda x}$ ou $B\cos(\omega.x)$ ou $B\sin(\omega.x)$, on détermine une solution particulière f_p de $(\mathcal{E})$.
3. L'ensemble des solution de $(\mathcal{E})$ est,

$$\mathcal{S} = \{f_p + f \mid f \in \mathcal{S}_0\}$$

Application à la Physique

On rencontre également beaucoup d'EDL d'ordre 2 à coefficients constants en Physique et S.I.. Leur forme générale est la suivante

$$y'' + 2\lambda y' + \omega_0^2 y = f(t)$$

où :

- y est une grandeur évoluant au cours du temps.
- $\lambda \geq 0$ modélise les phénomènes qui dissipent de l'énergie, on l'appelle le **coefficient d'amortissement**.
- la constante $\omega_0 > 0$ est la **pulsation propre**.
- le second membre f représente l'action extérieure sur le système.

Exercice 15 *On considère un circuit RLC en série. L'équation d'évolution de la charge q du condensateur est :*

$$U = \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2}$$

1. *Déterminer le coefficient d'amortissement du système ainsi que sa pulsation propre.*
2. *Donner l'expression de la charge q en fonction du temps (Résoudre l'équation différentielle).*

7.5 Problème de Cauchy

Théorème: Existence de solutions

Soit $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ une EDL d'ordre 2 à coefficients constants.
Alors l'équation (E) admet des solutions.

Démonstration hors programme

Théorème: Problème de Cauchy

Soit $(\mathcal{E}) : y'' + a.y' + by = c(x)$ une EDL d'ordre 2 à coefficients constants, $x_0 \in I$ et y_0, y_1 deux constantes.
Alors, il existe une unique solution f de l'équation (E) telle que $f(x_0) = y_0$ et $f'(x_0) = y_1$.

Exercice 16 *Déterminer l'unique solution f de l'équation différentielle $y'' - 3y' + 2y = 3e^x - 5e^{-x} + \cos(x)$ telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.*