Chapitre 5 : Nombres réels et suites numériques

Table des matières

1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de donner une base solide à l'étude des suites réelles.

On insistera dans un premier temps sur le caractère fondamental de la propriété de la borne supérieure qui affirme que pour tout ensemble majoré, il existe un réel qui soit le plus petit des majorants de cet ensemble.

Nous poursuivrons notre étude avec celle des suites où l'on distinguera nettement :
— les aspects qualitatifs : monotonie, convergence, divergence.
— les aspects quantitatifs : majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence.

2 Ensembles usuels de nombres

Un certain nombre de concepts utiles pour développer cette section ont été vus au chapitre 0. Il faudra donc s'y référer si nécessaire. Il s'agit de :

1. Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$ et $\mathbb{Q}$.
2. La droite réelle ainsi que la relation d'ordre naturelle $\leq$ ainsi que la notion de majorant, minorant, maximum et minimum d'une partie.
3. Les parties de $\mathbb{R}$ notamment et en particulier les intervalles.

2.1 Droite numérique achevée

On considère un nouvel ensemble noté $\overline{\mathbb{R}}$ construit à partir de $\mathbb{R}$ auquel on adjoint deux éléments $+\infty$ et $-\infty$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \{-\infty, +\infty\} \cup \mathbb{R}$$

qui se représente géométriquement comme un segment d'extrémités les points $-\infty$ et $+\infty$.
Dans cet ensemble on adopte les règles de calcul suivantes :

1. Pour tout $a \in \mathbb{R}_+^\star$, $-\infty \times a = -\infty$ et $+\infty \times a = +\infty$.
2. Pour tout $a \in \mathbb{R}_-^\star$, $-\infty \times a = +\infty$ et $+\infty \times a = -\infty$.
3. $0 \times +\infty$ et $0 \times -\infty$ ne sont pas définis.
4. $+\infty \times (-\infty) = +\infty$.

Cet ensemble rendra l'énoncé de certains résultats plus courts en permettant de ne plus distinguer un réel du cas limite en plus ou moins l'infini.

2.2 Bornes supérieures et inférieures

L'ensemble des nombres réels possède une spécifité que n'a pas l'ensemble des nombres rationnels et qui est tout à fait fondamental pour faire de l'analyse : il s'agit de la propriété de la borne supérieure. Commençons par définir ce concept.

Définition: Borne supérieure/Borne inférieure

Soit E un ensemble muni d'une relation d'ordre $\leq$ et $X \subset E$ un ensemble majoré (respectivement minorée). On appelle **borne supérieure** de X, notée $Sup(X)$ (respectivement **borne inférieure** de X, notée $Inf(X)$) le plus petit majorant (respectivement le plus grand minorant) de X dans E. Plus formellement, cela s'écrit :

- $M = Sup(X)$ si M est un majorant de X et pour tout majorant A de X, $M \leq A$.
- $m = Inf(X)$ si m est un minorant de X et pour tout minorant a de X, $m \geq a$.

Exemple
Si un ensemble admet un maximum, il s'agit de sa borne supérieure et si cet ensemble admet un minimum il s'agit de sa borne inférieure.

Exercice 1 *Soit l'intervalle* $I = [0, \sqrt{2}[$.

1. *Montrer que* $I \cap \mathbb{Q}$ *admet une borne inférieure et pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.
2. *Montrer que* I *admet une borne inférieure et supérieure dans* $\mathbb{R}$.

On a cette propriété fondamentale de $\mathbb{R}$:

Théorème: Propriété de la borne supérieure
Soit X une partie de $\mathbb{R}$.

1. Si X est majorée, elle admet une borne supérieure.
2. Si X est minorée, elle admet une borne inférieure.

Remarque 1 *Nous avons vu à l'exercice précédent que cette propriété n'était pas valable pour* $\mathbb{Q}$ *puisque* $[0, \sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$ *est majorée mais n'admet pas de borne supérieure dans* $\mathbb{Q}$.

2.3 Approximation décimale d'un réel

La propriété de la borne supérieure dans $\mathbb{R}$ est très liée à la possibilité pour tout nombre réel d'être approché par une suite de nombre rationnels.

Théorème: Approximation décimale d'un réel
Soit $x \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq x \leq v_n = \frac{\lfloor x.10^n \rfloor + 1}{10^n}$$

Le terme de gauche est **l'approximation décimale à 10^{-n} près par défaut** et le terme de droite est **l'approximation décimale à 10^{-n} près par excès**. On a (u_n) et (v_n) qui sont toutes deux des suites de nombres rationnels qui convergent vers x.

Démonstration :

Proposition
Soit $X \subset \mathbb{R}$ et M un majorant de X. Alors M est la borne supérieure de X si et seulement si il existe une suite de X qui converge vers M.

Démonstration admise.

Méthode

Déterminer la borne supérieure d'un sous-ensemble X de $\mathbb{R}$:

1. Conjecturer un réel M qui semble être la borne supérieure de X.
2. Montrer que M est un majorant de X.
3. Déterminer une suite (u_n) d'éléments de X qui converge vers M.
4. En conclure que M est la borne supérieure de X.

Exercice 2 *Déterminer la borne supérieure et inférieure si elles existent de l'ensemble :*

$$X = \{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^\star\}$$

2.4 Intervalles et densité

On donne une caractérisation d'un intervalle de $\mathbb{R}$ par la propriété suivante :

Proposition

Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tout $a, b \in X$ tels que $a \leq b$, $[a, b] \subset X$.

Démonstration admise

Définition: Partie dense de $\mathbb{R}$

Une partie $A \subset \mathbb{R}$ est dite *dense* si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Plus formellement :

$$A \text{ dense dans } \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, A \cap [a, b] \neq \emptyset.$$

La proposition suivante permet de dire que l'ensemble des rationnels e, des nombres irrationnels et des nombres décimaux sont denses dans $\mathbb{R}$.

Proposition

Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$.

Démonstration admise

3 Généralités sur les suites réelles

3.1 Définitions

Définition *Suite réelle*
Une suite réelle (u_n) est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. On la note également $(u_n)_{n\geq 0}$ et l'expression $u_n \in \mathbb{R}$ est appelée le **terme général** de la suite (u_n).

Exemple
L'expression pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n^2)_{n\geq 0}$ est une suite de terme général $u_n = n^2$.

Risque d'erreur
Il ne faut pas confondre (u_n) la suite avec son terme général u_n qui est seulement un réel.

Remarque 2 *Il est fréquent de définir une suite (u_n) non pas sur $\mathbb{N}$ mais à partir d'un certain rang n_0. On notera alors dans ce cas $(u_n)_{n\geq n_0}$. On préférera donc s'il y a une ambiguïté sur la définition de la suite la notation $(u_n)_{n\geq n_0}$ à la notation (u_n).*

Risque d'erreur
Il est important si on souhaite définir une suite (u_n) sur une certaine famille d'entiers naturels I de s'assurer que son terme général, c'est-à-dire pour tout $n \in I$, u_n existe bien.

Exemple
La suite de terme général $\dfrac{1}{n}$ ne peut pas se définir sur tout $n \in \mathbb{N}$ mais seulement à partir du rang $n_0 = 1$. On notera donc cette suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$

Vocabulaire 1 *Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite et k un entier supérieur à n_0. Alors on appelle $k^{\text{ème}}$ terme de (u_n) le réel u_k.*

Exercice 3 *Déterminer à partir de quel rang on peut définir la suite $\left(\frac{2n}{1-\frac{n^2}{7,5}}\right)$ puis calculer les 3 premiers termes de cette suite.*

3.2 Variations d'une suite

À l'instar des fonctions rencontrées au chapitre 2, les suites réelles possèdent aussi une notion de variation.

Exemple
On peut vérifier la croissance et la décroissance des suites suivantes comme sur les fonctions.

- la suite (n^2) est croissante, car pour tout $0 \leq n \leq m$, $n^2 \leq m^2$.
- la suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est décroissante. En effet, pour tout $1 \leq n \leq m \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{m} \leq \dfrac{1}{n}$.

En réalité, il suffit pour définir correctement la variation d'une suite de comparer deux termes consécutifs pour un entier n arbitraire. Dans le cas des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ cela est plus complexe car soit un réel x, il n'est pas possible de définir le nombre réel "juste après" x. On obtient ainsi la définition de variation d'une suite.

Définition *Variations*

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit que (u_n) est :

- **croissante** si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq u_{n+1}$.
- **décroissante** si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n+1}$
- **constante** si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = u_{n+1}$

Lorsque (u_n) est d'un des trois types précédents on dit qu'elle est **monotone**

Remarque 3 *On peut remplacer dans la définition précédente, "croissante" et "décroissante" par "strictement croissante" et "strictement décroissante" en permutant les $\leq$ par des $<$. En revanche, une suite ne peut être simultanément strictement croissante et strictement décroissante.*

Exemple

— La suite $\left(\dfrac{1+n}{1+n^2}\right)$ est décroissante. Soit $n \geq 0$, alors :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{1+(n+1)}{1+(n+1)^2} - \frac{1+n}{1+n^2} \\ &\underbrace{=}_{\text{réduction au même dénominateur}} \frac{(2+n)(1+n^2)-(1+n)(1+(n+1)^2)}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \\ &= \frac{-3n-n^2}{(1+(n+1)^2)(1+n^2)} \leq 0 \end{aligned}$$

— La suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2$ est croissante. En effet, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = 2 \geq 0$.

— La suite $(e)_{n\geq 0}$ est constante.

Proposition

Une suite (u_n) est constante si et seulement si il existe une constante $k \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = k$.

Démonstration admise

Il existe plusieurs moyens généraux de montrer qu'une suite est monotone. Examinons-en trois différents.

Méthode *Monotonie par différence*

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est monotone on étudie le signe de $v_n = u_{n+1} - u_n$.
Par définition, trois cas se présentent :

— soit pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq 0$ et dans ce cas là, (u_n) est croissante.

— soit pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq 0$ et dans ce cas là, (u_n) est décroissante.

— soit il existe deux entiers $n_1 \geq n_0$ et $n_2 \geq n_0$ tels que v_{n_1} et v_{n_2} sont de signes opposés. Dans ce cas, la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exemple

Montrons que la suite $(n^3 - 2n)_{n\geq 1}$ est croissante par la méthode des différences.
On pose

$$\begin{aligned} v_n &= u_{n+1} - u_n \\ &= ((n+1)^3 - 2(n+1)) - (n^3 - 2n) \\ &= n^3 + 3n^3 + 3n + 1 - 2n - 2 - n^3 + 2n \\ &= 3n^2 + 3n - 1 \underbrace{\geq}_{n\geq 1} 3n^2 \geq 0 \end{aligned}$$

On en déduit que la suite $(n^3 - 2n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Méthode *Monotonie par quotient*

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ dont **tous les termes sont strictement positifs** est monotone on compare la quantité $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1.

Trois cas se présentent :

- soit pour tout $n \geq n_0$, $v_n \geq 1$ et dans ce cas là, (u_n) est croissante.
- soit pour tout $n \geq n_0$, $v_n \leq 1$ et dans ce cas là, (u_n) est décroissante.
- soit il existe deux entiers $n_1 \geq n_0$ et $n_2 \geq n_0$ tels que $v_{n_1} > 1$ et $v_{n_2} < 1$ alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

Exemple

Montrons que la suite $(\dfrac{(n+1)!}{2^n})_{n\geq 1}$ est strictement croissante.
On pose :

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_{n+1}}{u_n} \\ &= \frac{\frac{(n+2)!}{2^{n+1}}}{\frac{(n+1)!}{2^n}} \\ &= \frac{2^n \times (n+2)!}{(n+1)! \times 2^{n+1}} \\ &= \frac{n+2}{2} \\ &= \frac{n}{2} + 1 \underbrace{>}_{n\geq 1} 1 \end{aligned}$$

On en conclut que la suite $(\dfrac{(n+1)!}{2^n})$ est strictement croissante.

Méthode *Monotonie par récurrence*

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

- On calcule les premiers termes de la suite.
- Si il n'y a pas de régularité dans l'ordre des premiers termes on en conclut que la suite n'est pas monotone.
- Si la suite semble avoir une certaine monotonie, on pose la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$\forall n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$" (ou $(u_n \leq u_{n+1})$ et on essaye de prouver la propriété $\mathcal{P}$ par récurrence.

Exemple

Soit la suite définie par récurrence $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{1+(u_n)^2}$.

1. Calculons les premiers termes de la suite : $u_0 =$, $u_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{1+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}$, $u_3 = \sqrt{1+3} = 2$.
2. On obtient que $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ainsi on conjecture que (u_n) est croissante.
3. On montre par récurrence la propriété $\mathcal{P}$: "$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq u_{n+1}$".
   - <u>Initialisation</u> : La propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie puisque nous avons calculé les premiers termes et constaté que $u_0 \leq u_1$.
   - <u>Hérédité</u> : Supposons pour un $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons qu'elle induit la propriété $\mathcal{P}(n+1)$ vraie. Remarquons tout de suite que par hypothèse de récurrence, les n premiers termes de la suite (u_n) sont strictement positifs.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{1+(u_n)^2} - u_n \\
&= \sqrt{1+(u_n)^2} - \sqrt{1+(u_{n-1})^2} \\
&= (\sqrt{1+(u_n)^2} - \sqrt{1+(u_{n-1})^2}) \times \frac{(\sqrt{1+(u_n)^2} + \sqrt{1+(u_{n-1})^2})}{(\sqrt{1+(u_n)^2} + \sqrt{1+(u_{n-1})^2})} \\
&= \frac{(u_n)^2 - (u_{n-1})^2}{(\sqrt{1+(u_n)^2} + \sqrt{1+(u_{n-1})^2})} \\
&= \frac{(u_n - u_{n-1}) \times (u_n + u_{n-1})}{(\sqrt{1+(u_n)^2} + \sqrt{1+(u_{n-1})^2})} \underbrace{\geq}_{\text{par hypothèse de récurrence}} 0
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et l'hérédité est vérifiée.

Remarque 4 *En général, on applique les méthodes présentées ci-dessus lorsqu'on se trouve dans les cas respectifs, Si le terme général de (u_n) est :*

- *une somme, on préfèrera utiliser la méthode par différence.*
- *un produit ou un quotient, on emploiera souvent la méthode par quotient* ***lorsque cela est permis****.*
- *défini par récurrence, on utilisera également la méthode par récurrence si l'on est pas dans le cas des suites vues en cours.*

3.3 Encadrement d'une suite

La notion de majoration et de minoration d'une fonction s'applique également à celle d'une suite réelle.

Définition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. On dit que (u_n) est :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq M$. On dit que M est un **majorant** de (u_n).
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout entier $n \geq n_0$, $m \leq u_n$. On dit que m est un **minorant** de (u_n).
- **bornée** si elle minorée et majorée.

Risque d'erreur

L'ordre des quantificateurs est primordial dans la définition de suite majorée et minorée. En effet, soit (u_n) une suite, la proposition "$\forall n \geq n_0$, $\exists m, M \in \mathbb{R}$ tels que $m \leq u_n \leq M$ est vrai, il suffit de considérer $M = m = u_n$.
Le minorant m ou le majorant M de la suite (u_n) doit être **indépendant** de n.

Proposition

Une suite $(u_n)_n$ est bornée si et seulement si $(|u_n|)_n$ est majorée.

Exemple

- la suite $(u_n) = (n^2)_{n\geq 0}$ est minorée mais pas majorée.
  La suite $(n^2)_{n\geq 0}$ est minorée par son premier terme 0 car elle est croissante. Supposons par l'absurde que $(n^2)_{n\geq 0}$ soit majorée, il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq M$. Posons $n_0 = \lfloor\sqrt{M}\rfloor + 1$. Par définition de partie entière :
  $$\begin{aligned} & 0 \leq \sqrt{M} < \lfloor\sqrt{M}\rfloor + 1 \\ \text{donc} \quad & (\sqrt{M})^2 \underbrace{<}_{\text{par croissance de la fonction carrée sur } \mathbb{R}_+} (\lfloor\sqrt{M}\rfloor + 1)^2 \\ \text{donc} \quad & M < (\lfloor\sqrt{M}\rfloor + 1)^2 = u_{n_0} \end{aligned}$$
  ce qui est absurde puisque nous avons supposé que M était un majorant de (u_n).
- la suite $(v_n) = (\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ est bornée.
  En effet elle est décroissante donc majorée par son premier terme $M = 1$ et positive donc minorée par $m = 0$.

Proposition

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite.

- si (u_n) est croissante alors elle est minorée par u_{n_0}.
- si (u_n) est décroissante alors elle est majorée par u_{n_0}.

Remarque 5 *Une suite peut être croissante et majorée (par exemple $(1 - \dfrac{1}{n})$) comme croissante et non majorée (par exemple (n^2)).*

Méthode *Comment encadrer une suite ?*

Soit (u_n) une suite.

- si on sait que (u_n) est monotone on peut appliquer la proposition précédente en la majorant ou minorant par son premier terme.
- si elle n'est pas monotone on peut conjecturer un encadrement et le démontrer par récur-

rence.

3.4 Modes de définition

Un type de suite dont les termes sont faciles à calculer sont les suites explicites.

Définition *Suite récurrente*
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **récurrente** ou **définie par récurrence** si pour tout entier $n \geq n_0$, le terme général u_n se définie en fonction de ses termes précédents.

Exemple

1. La suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = (u_n)^2 + 4$ est une suite récurrente.
2. La suite $(u_n) = (n^2)$ n'est pas mise sous forme récurrente a priori mais on peut la définir par récurrence. En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)^2 = n^2+2n+1 = u_n+2\sqrt{u_n}+1$.

Définition *Suite explicite*
Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est explicite s'il existe une fonction $f : [n_0, +\infty[$ telle que pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n = f(n)$. On dit que f est la **fonction associée** à la suite explicite (u_n).

Exemple
La suite $(u_n)_{n\geq 0}$ de terme général $u_n = \dfrac{\sqrt{n+3}}{1+n}$ est une suite explicite définie par la fonction $f : [0, +\infty[$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+3}}{1+x}$.

Il existe un lien entre la monotonie de la fonction associée à une suite explicite (u_n) et la monotonie de la fonction associée.

Proposition
Soit (u_n) une suite explicite de fonction associée f. Alors :
- si f est croissante, (u_n) est croissante.
- si f est décroissante, (u_n) est décroissante.

Démonstration :

On peut représenter à l'aide d'un graphique une suite définie explicitement à l'aide du graphe de sa fonction associée.

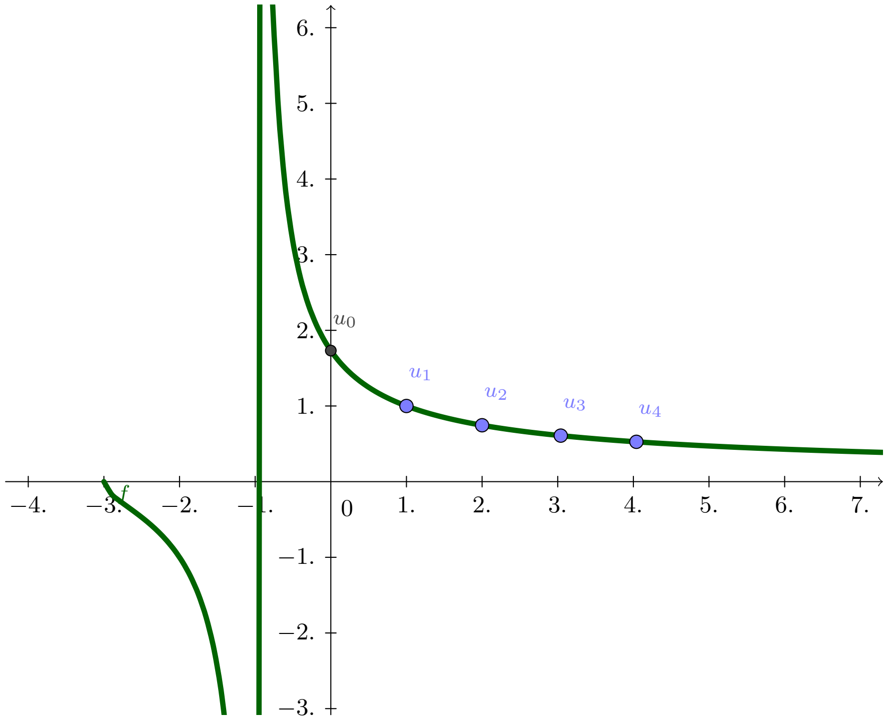

FIGURE 1 – premiers termes de $(\dfrac{\sqrt{n+3}}{1+n})$

Exemple

La suite $(u_n) = (\frac{2+n}{1+n})$ est décroissante.
Cette suite est explicite de fonction associée $f : [0, \infty[$ telle que pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{2+x}{1+x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2} < 0$ pour tout $x \geq 0$.
On en déduit que f est décroissante et donc (u_n) est une suite décroissante.

Définition: Suites implicites

Une suite $(u_n)_n$ est dite *implicite* si pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe une fonction f_n telle que $f_n(u_n) = 0$.

Exemple

Considérons pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la famille de fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n : x \mapsto e^{-nx} - x$. On définit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ comme unique solution positive de l'équation :

$$f_n(x) = 0, \quad \forall n \geq 1$$

La suite (u_n) est donc définie de manière implicite.

On étudiera cette famille de suites en TD, en général il s'agit d'une étude plus longue et délicate que des deux autres modes de définition d'une suite.

4 Suites particulières

4.1 Suites arithmétiques et géométriques

On examine deux types de suites classiques, les suites arithmétiques et géométriques.

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmétique** s'il existe un réel r appelé **raison** tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Exemple

La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ arithmétique de premier terme $u_{n_0} = 3$ et de raison $r = 5$ a pour terme général :

$$u_n = 3 + 5(n-2)$$

Proposition

Une suite arithmétique $(u_n)_{n\geq n_0}$ de raison r est explicite de fonction associée $f : x \mapsto (x - n_0) \times r + u_{n_0}$. Son terme général est :

$$u_n = (n - n_0) \times r + u_{n_0}$$

Démonstration

Proposition *monotonie d'une suite arithmétique*

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r. Alors :

- si $r > 0$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.
- si $r < 0$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

Démonstration

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **géométrique** s'il existe un réel q appelé **raison** tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$u_{n+1} = q \times u_n$$

Exemple

La suite $(u_n)_{n\geq 2}$ géométrique de premier terme $u_{n_0} = 3$ et de raison $q = 5$ a pour terme général :

$$u_n = 3 \times 5^{n-2}$$

Proposition

Une suite géométrique $(u_n)_{n\geq n_0}$ de raison q est explicite de fonction associée $f : x \mapsto u_{n_0} \times q^{x-n_0}$. Son terme général est :

$$u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$$

Démonstration

Proposition *monotonie d'une suite géométrique*

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_{n_0} > 0$. Alors :

- si $q < 0$, la suite (u_n) n'est pas monotone.
- si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.
- si $q = 1$ ou $q = 0$, la suite (u_n) est constante.
- si $1 < q$, la suite (u_n) est strictement croissante.

Démonstration

Remarque 6 *Si on suppose $u_{n_0} < 0$ on inverse le sens de la monotonie dans la proposition précédente.*

4.2 Suites arithmético-géométriques

Définition

Une suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est **arithmético-géométrique** s'il existe $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que pour tout entier $n \geq n_0$:

$$u_{n+1} = a \times u_n + b$$

Exemple

La suite (u_n) de terme général $u_n = 3 \times 2^n + 1$ est arithmético-géométrique.
En effet :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3 \times 2^{n+1} + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n) + 1 \\ &= 2 \times (3 \times 2^n + 1) + 1 - 2 \\ &= 2 \times u_n - 1 \end{aligned}$$

donc (u_n) est bien une suite arithmético-géométrique où les réels a et b de la définition sont $a = 2$ et $b = -1$.

Proposition

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$ et $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$. Alors la suite de terme général $v_n = u_n - \alpha$ est géométrique de raison a.

Démonstration

Remarque 7 *Dans l'énoncé de la proposition précédente, $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$ existe bien car on suppose toujours pour une suite arithmético-géométrique que $a \neq 1$.*

Corollaire

Soit (u_n) une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$ et $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$. Alors (u_n) est une suite explicite de terme général

$$u_n = (u_{n_0} - \alpha) \times a^{n-n_0} + \alpha$$

Méthode *Comment calculer le terme général d'une suite arithmético-géométrique ?*

Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite arithmético-géométrique telle que pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} = a \times u_n + b$.

- Étape 1 : Calculer u_0.
- Étape 2 : Calculer $\alpha = \dfrac{b}{1-a}$.
- Étape 3 : On obtient le terme général $u_n = u_n = (u_0 - \alpha) \times a^n + \alpha$

Exercice 4 *Soit (u_n) la suite de premier terme $u_0 = 1$ et satisfaisant la relation pour tout $n \geq 0$:*

$$u_{n+1} - u_n = \pi \times (1 - u_n)$$

Déterminer le terme général de la suite (u_n).

4.3 Sommes

La notion de somme et de produit peut s'exprimer en partant de la notion de suite plutôt que d'une famille de réels a_k comme nous l'avons fait au premier chapitre.

Proposition

Soit $(u_k)_{k\geq 0}$ une suite réelle et $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $k \geq 0$

— $u_k = k$. Alors, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)}{2}$.

— $u_k = k^2$. Alors, $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

— $u_k = a^k$ où $a \neq 1$. Alors $\sum_{k=0}^{n} u_k = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Grâce à ces sommes usuelles, il est possible de déterminer explicitement certaines suites définies par récurrence à l'aide d'un télescopage.

Méthode *Calcul du terme général à l'aide d'une somme télescopique*

Soit (u_n) une suite admettant une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = u_n + \alpha_n$ et de premier terme u_0.

— On détermine si α_n est indépendant de u_{n+1} et u_n.

— On calcule si possible $\sum_{k=0}^{n-1} (\alpha_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$.

— On obtient $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k$

Exemple

Calculons le terme général de la suite (u_n) définie par récurrence pour tout $n \geq 0$ par :

$$2u_{n+1} = 2u_n - \frac{6\pi n}{4} + e^n$$

telle que $u_0 = 1$

— Remarquons que :

$$2u_{n+1} = 2u_n - \frac{6\pi n}{4} + e^n \iff \quad u_{n+1} = u_n - \frac{3\pi n}{4} + \frac{e^n}{2}$$

— Pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} - u_n = \frac{3\pi n}{4} - \frac{e^n}{2}$ qui est indépendant de u_{n+1} et u_n.

— On calcule

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n} (\frac{3\pi k}{4} - \frac{e^k}{2}) \\ = & \sum_{k=0}^{n} (\frac{3\pi k}{4}) + \sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{2} \\ = & \frac{3\pi}{4} \times (\sum_{k=0}^{n} k) + \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^{n} e^k \end{aligned}$$

— Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3\pi}{4} \times \frac{n(n+1)}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{e^{n+1}-1}{e-1} + 1$

4.4 Suites récurrentes linéaires d'ordre 2

Dans cette section, nous étudions un type nouveau de suite récurrente linéaire. En effet, les suites arithmétiques, géométriques et arithmético-géométriques appartiennent à ce qu'on appelle les suites récurrentes linéaires d'ordre 1, c'est-à-dire les suites définies par récurrence de la forem $u_{n+1} = au_n + b$ où a et b sont des réels.

Définition *Suite récurrente linéaire d'ordre* 2

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est **récurrente linéaire d'ordre 2** s'il existe $a \in \mathbb{R}^\star$ et $b \in \mathbb{R}^\star$ tels que pour tout $n \geq 0$:

$$u_{n+2} = a \times u_{n+1} + b \times u_n$$

Remarque 8 *Lorsque l'on veut définir une unique suite récurrente linéaire d'ordre deux, il est nécessaire de fixer les deux premiers termes u_0 et u_1.*

Le prototype de suite récurrente linéaire d'ordre 2 est la suite dite de Fibonacci définie dans l'exemple suivant.

Exemple *Suite de Fibonacci*

La suite de Fibonacci est définie pour tout entier $n \geq 0$ par : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ ainsi que les deux premiers termes $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.

Les suites récurrentes linéaires d'ordre deux peuvent se mettre sous forme explicite. Il est nécessaire pour réaliser cette conversion d'étudier un certain polynôme de degré deux associé à la suite.

Définition *équation caractéristique*

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre deux de relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
L'équation caractéristique associée à (u_n) est l'équation :

$$x^2 - ax - b = 0$$

Exemple

L'équation caractéristique de la suite de Fibonacci est :

$$(E) : x^2 - x - 1 = 0$$

.

Théorème

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre deux de relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.
En notant Δ le discriminant de son équation caractéristique (E), on distingue trois cas :

- Cas 1 : $\Delta > 0$
  L'équation (E) admet alors deux racines distinctes x_1 et x_2. Il existe deux uniques réels notés α et β tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \alpha \times (x_1)^n + \beta \times (x_2)^n$
- Cas 2 : $\Delta = 0$
  L'équation (E) admet alors une seule racine x_0 et il existe deux uniques réels notés α et

β tels que pour tout $n \geq n_0$, $u_n = \alpha \times (x_0)^n + n\beta \times (x_0)^n$.

— Cas 3 : $\Delta < 0$
Il existe $\rho \geq 0$, $\theta, A, B \in \mathbb{R}$, tel que pour tout

$$n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \rho^n (A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta))$$

où ρ et θ désignent respectivement le module et un argument d'une solution de l'équation caractéristique .

Démonstration : Admise

Exemple

Reprenons l'exemple de la suite de Fibonacci. L'équation caractéristique $(E) : x^2 - x - 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$. On en déduit que (E) admet deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On en déduit que le terme général de la suite (u_n) est de la forme :

$$u_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n$$

où α et β sont deux réels à déterminer. Pour ce faire, on exploite le fait que $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ ce qui permet de générer un système linéaire 2×2 d'inconnues α et β :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha x_1^0 & + & \beta x_2^0 & = & u_0 = 1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & u_1 = 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ \alpha x_1 & + & \beta x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccccc} & & \beta & = & 1-\alpha \\ \alpha x_1 & + & (1-\alpha) x_2 & = & 1 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & = & 1-\alpha \\ \alpha(x_1 - x_2) & = & 1 - x_2 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & = & 1-\alpha \\ \alpha & = & \dfrac{1-x_2}{x_1-x_2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & = & 1 - \dfrac{1-x_2}{x_1-x_2} \\ \alpha & = & \dfrac{1-x_2}{x_1-x_2} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ccc} \beta & = & \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \\ \alpha & = & \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \end{array} \right.$$

Ainsi le terme général de la suite de Fibonacci est pour tout $n \geq 0$:

$$u_n = (\frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}) \times (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}) \times (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n$$

Méthode *Déterminer le terme général d'une suite récurrente linéaire d'ordre deux*

Soit (u_n) une suite récurrente linéaire d'ordre deux de relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.

— Étape 1 : On détermine le signe du discriminant de l'équation caractéristique.
— Étape 2 : On détermine les racines de (E) puis on applique le théorème de mise sous forme explicite.
— Étape 3 : On résout un système 2×2 en remplaçant $n = 0$ et $n = 1$ dans la forme explicite de la suite.

Exercice 5 *Mettre sous forme explicite les suites récurrentes linéaires d'ordre deux suivantes :*

1. $u_0 = 1$, $u_1 = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$.
2. $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - 2u_n$.

5 Limite d'une suite réelle

Définition : *Limite d'une suite*

Soit (u_n) d'une suite. On dit que $l \in \mathbb{R}$ est la **limite** de la suite (u_n) ou encore que (u_n) **converge vers l**, si tout intervalle contenant l possède tous les termes de (u_n) à partir d'un certain rang. Plus formellement,

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l \Leftrightarrow \forall a > 0, \exists N_a \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_a, u_n \in [l-a, l+a]$$

On note encore $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Méthode : Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on souhaite démontrer une propriété de la forme "$\exists a \in E$ telle que $\mathcal{P}(a)$ est vraie". On peut raisonner en deux étapes.

1. **Analyse** : on suppose qu'un telle élément a existe et vérifie la propriété $\mathcal{P}$ et on cherche à déterminer sa forme dans ce cas là.
2. **Synthèse** : on tente de démontrer en considérant l'élément a avec la structure déterminée à l'étape d'analyse que la propriété $\mathcal{P}(a)$ est vraie.

Exemple

La suite $(\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ converge vers 0 en $+\infty$. En effet

— Soit $\epsilon > 0$.
— **Analyse** : $\frac{1}{n} \in]0-\epsilon, 0+\epsilon[\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \epsilon \Rightarrow \frac{1}{\epsilon} \leq n$. Or on remarque que $N_\epsilon = (\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1)$ est entier et supérieur à $\frac{1}{\epsilon}$.
— **Synthèse** Or pour tout $n \geq N_\epsilon$, $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\lfloor \frac{1}{\epsilon} \rfloor + 1} \leq \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$.

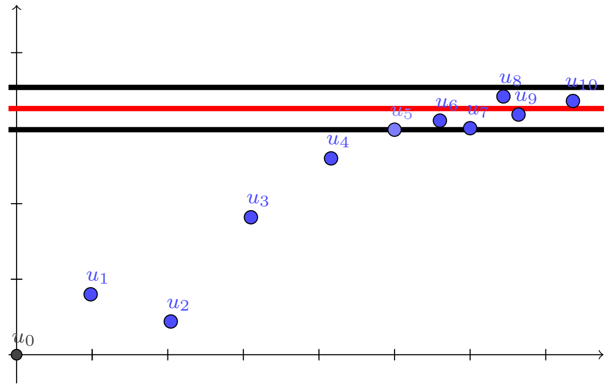

Figure 2 – Convergence d'une suite (u_n)

— Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N_\epsilon$, $\frac{1}{n} \in [-\epsilon, \epsilon]$, donc la suite converge vers 0.

Exercice 6 *Montrer que* $(1 + \frac{1}{n^2})_{n\geq 1})$ *converge vers* 1.

Dans la définition précédente, on a employé le terme "**la limite**" et pas "**une limite**". Ceci est dû à la proposition suivante :

Proposition
Soient l_1 et l_2 deux réels et une suite (u_n) tels que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_1$ et $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l_2$. Alors $l_1 = l_1$.

Cette dernière proposition indique qu'une limite est unique.

Vocabulaire 2 *Par unicité, on peut noter* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$ *pour* $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$.

Il existe par ailleurs une notion de limite infinie.

Définition
Soit (u_n) une suite. On dit que (u_n) **tend vers** $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si pour tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a]$), il existe un rang $N_a \in \mathbb{N}$ tel que tous les termes de rangs supérieurs à N_a, u_n appartiennent à $[a, +\infty[$ (respectivement $]-\infty, a]$). On dit alors que (u_n) tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) ou encore qu'elle diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$). Plus formellement, cela signifie que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty(-\infty) \Leftrightarrow \forall a \in \mathbb{R}, \exists N_a \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_a, u_n \geq a (u_n \leq a)$$

Exemple
La suite $(\sqrt{n})$ tend vers $+\infty$ lorsque $n \to +\infty$. En effet, soit $a \in \mathbb{R}$ et $I_a = [a, +\infty[$. On recherche un entier $N_a \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $n \geq N_a$, $\sqrt{n} \geq a$.
On distingue deux cas :

1. si $a < 0$ l'inégalité $\sqrt{n} \geq a$ est vérifiée pour tout $n \in \mathbb{N}$. On peut donc choisir $N_a = 0$.
2. si $a \geq 0$, par croissance de la fonction carrée sur $[0, +\infty[$, on obtient que $\sqrt{n} \geq a \Rightarrow n \geq a^2$ donc on peut choisir N_a un entier supérieur à a^2, par exemple $\lfloor a^2 \rfloor + 1$ convient.

Dans tous les cas, il existe N_a tel que pour tout $n \geq N_a$, $\sqrt{n} \geq a$, on en conclut que $(\sqrt{n})$ tend

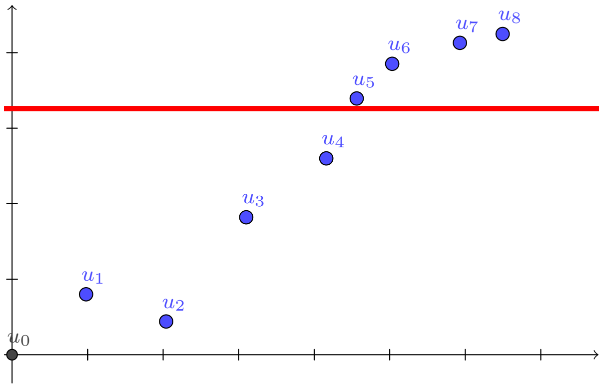

FIGURE 3 – Une suite (u_n) divergente vers $+\infty$

. vers $+\infty$.

Exercice 7 *Montrer que la suite* $(1+n-n^2)$ *diverge vers* $-\infty$*.*

Il est très pratique, une fois connue la limites de certaines suites, de calculer la limite si elle existe de suites plus complexes obtenues à partir d'opérations algébriques de suites simples.

5.1 Cas des limites finies

Proposition

Soit (u_n) une suite convergente de limite $l_1 \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite convergente de limite $l_2 \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = l_1 + l_2$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = l_1 - l_2$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = l_1 \times l_2$
4. si $l_2 \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{l_1}{l_2}$

Démonstration : Admise.

Exemple

Soient les suites $(2+\frac{1}{n})_{n\geq 1}$ et $(3+(\frac{1}{2})^n)$. Alors :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\frac{1}{n}+3+(\frac{1}{2})^n = 2+3=5$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\frac{1}{n})-(3+(\frac{1}{2})^n) = 2-3=-1$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} (2+\frac{1}{n})\times(3+(\frac{1}{2})^n) = 2\times 3 = 6$
4. s $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2+\frac{1}{n}}{3+(\frac{1}{2})^n} = \dfrac{2}{3}$

On sait que si l'on divise une quantité positive fixée non nulle par des nombres positifs de plus en plus proche de 0, le quotient devient de plus en plus grand. Si la quantité tend elle-même vers 0, cela est beaucoup plus délicat de dire quelque chose sur le comportement de la suite.

Risque d'erreur

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes dont la limite est 0. Alors la suite $(\frac{u_n}{v_n})$, si elle est définie, n'a pas forcément de limites et peut même tendre vers tout réel ou diverger en l'infini.

Exercice 8 *Déterminer si les suites suivantes sont convergentes et le cas échéant, déterminer leur limite :*

1. $\left(\frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n+1}}\right)_{n\geq 1}$
2. $\left(\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$
3. $\left(\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\right)_{n\geq 1}$
4. $\left(\frac{\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{1}{n}}\right)_{n\geq 1}$

5.2 Cas des limites infinies

Risque d'erreur

L'infini n'est pas un nombre mais on adopte la convention suivante :
- soit $\lambda > 0$, $\lambda \times +\infty = +\infty$ et $\lambda \times -\infty = -\infty$.
- soit $\lambda < 0$, $\lambda \times +\infty = -\infty$ et $\lambda \times -\infty = +\infty$.
- $0 \times +\infty$ n'est pas défini.

On se sert de cette convention pour formaliser les opérations sur les limites infinies de suites.

Proposition

Soit (u_n) une suite convergente de limite $l \in \mathbb{R}$ et (v_n) une suite divergente vers $+\infty$. On a les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n - v_n = -\infty$
3. si $l \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = \text{signe}(l)\infty$
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$
5. $(+\infty \times +\infty) = +\infty$.
6. $+\infty \times -\infty = -\infty$.

Exemple

Les limites suivantes illustrent la précédente proposition.

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} 2 - 3n^2 = -\infty$
3. si $l \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (3 - \frac{1}{n}) \times n^2 = \text{signe}(3)\infty = +\infty$
4. si $l \neq 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-2}{1+n} = 0$

Savoir si un quotient de deux suites divergentes est convergent est une question délicate.

Risque d'erreur

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes dont la limite est $+\infty$. Alors la suite $(\frac{u_n}{v_n})$, si elle est définie, n'a pas forcément de limites et peut même tendre vers tout réel ou diverger en l'infini.

Exercice 9 *Déterminer deux suites divergentes (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs dont la limite est égale à $+\infty$ et telles que :*

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$
4. $\frac{u_n}{v_n}$ *n'a pas de limite.*

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites divergentes vers $+\infty$. On a les propriétés suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n = +\infty$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n = +\infty$
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} -u_n - v_n = -\infty$

Remarque 9 *On ne peut rien dire pour la différence des limites de la forme $+\infty - \infty$ ainsi que du quotient de limites infinies comme nous l'avions constaté dans l'exercice* 3.

5.3 Relations d'ordre et limites

Proposition

Soit (u_n) une suite convergente vers une limite $l \in \mathbb{R}$. Si :
- (u_n) est majorée par $M \in \mathbb{R}$ alors $l \leq M$.
- (u_n) est minorée par $m \in \mathbb{R}$ alors $m \leq l$.

Exemple

- La suite $(4 + 3^{-n})$ est majorée par 6 et converge vers 4.
- la suite $(1 - \frac{3}{n})$ est minorée par -2 et converge vers 1.

Proposition

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel $l > 0$ alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.

Démonstration admise.

6 Théorèmes d'existence de limite

Nous avons rencontré dans les précédentes sections la notion de suite convergente et divergente. Certaines suites ne sont pas dans ce cas comme la suite $((-1)^n)$. Il est donc primordiale, lorsqu'on étudie une suite, de déterminer si elle admet une limite avant d'en parler. On examine dans cette section, certains cas dans lesquels on peut affirmer qu'une suite donnée admet une limite.

6.1 Théorème de la limite monotone

Théorème

Soit (u_n) une suite réelle. Si :
- (u_n) est croissante et majorée, alors elle est convergente.
- (u_n) est décroissante et minorée, alors elle est convergente.
- (u_n) est croissante et non-majorée, alors elle divergente vers $+\infty$.
- (u_n) est décroissante et non-minorée, alors elle diverge vers $-\infty$.

Démonstration : admise

Exemple

1. $(1 - \dfrac{1}{n})$ est croissante et majorée donc converge.
2. $(e^{-n} \times n)$ décroissante minorée par 0 donc convergente.
3. $(2 \times n!)$ croissante non-majorée donc divergente.
4. $(-n^3)$ décroissante non-minorée donc divergente.

6.2 Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si
- la suite (v_n) est croissante.
- la suite (u_n) est décroissante.
- la suite $(u_n - v_n)$ est convergente de limite $\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - v_n) = 0$.

Théorème

Soit (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes.
Les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Démonstration :

Exemple

La suite $(u_n) = (1 - \frac{1}{n})$ et $(v_n) = (1 + \frac{1}{n})$ sont adjacentes. En effet,
- (u_n) est croissante.
- (v_n) est décroissante.
- pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $1 - \frac{1}{n} - (1 + \frac{1}{n}) = \frac{-2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Méthode *Comment montrer que deux suites sont adjacentes ?*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. On procède en 3 étapes pour montrer qu'elles sont adjacentes.

1. On montre que la suite (u_n) est décroissante.
2. On montre que la suite (v_n) est croissante.
3. On montre que la suite $(u_n - v_n)$ converge vers 0.

Exercice 10 *Deux suites adjacentes Soient (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ et (v_n) par $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. Montrer que ces deux suites sont adjacentes et en déduire que (u_n) converge.*

6.3 Un théorème d'encadrement

Théorème des gendarmes

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites réelles telles que :
- (u_n) et (w_n) convergent vers une même limite l.
- il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Alors (v_n) est une suite convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

Démonstration : Admise.

Remarque 10 *On appelle parfois ce résultat le "Théorème des gendarmes".*

Proposition

Soient (u_n) et (v_n) deux suites. Supposons qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$.
Si :
- $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Démonstration : Admise

Méthode

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite $l \in \mathbb{R}$ par encadrement, il suffit de majorer la suite $|u_n - l|$ par une suite (v_n) qui converge vers 0.

Exercice 11 *Sachant que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leq x \leq \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n}$, déterminer vers quel réel converge la suite $(\frac{\lfloor nx \rfloor}{n})_{n \geq 1}$.*

6.4 Croissances comparées

On cherche dans cette section à comparer indéterminées à partir de suites classiques :

Théorème *Croissances comparées*

1. $\forall q \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$.
2. $\forall q \in]-1;1[$ et $\forall a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^a} = \lim\limits_{n \to +\infty} q^n$.
3. $\forall a > 0$, $\forall b \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{(\ln(n))^b}{n^a} = 0$.
4. $\forall a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$.

Démonstration : Admise.

Exercice 12 *Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2} + n^2 \times (\frac{1}{2})^n + 1$.*

7 Suites extraites et théorème de Bolzano-Weierstrass

7.1 Généralités

Une suite extraite d'une suite (u_n) est une "sous-suite" composée d'une infinité de termes de la suite (u_n). Plus précisément on a la définition suivante :

Définition: Suite extraite

Soit $(u_n)_n$ une suite et $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante et telle que $\lim_{n\to+\infty} \varphi(n) = +\infty$. On appelle **suite extraite de** $(u_n)_n$ une suite de la forme $(u_{\varphi(n)})_n$.

Exemple

- La suite constante égale à 1 est une suite extraite de la suite $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- La suite $\left(\exp(n^2+1)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(\exp(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Proposition

Soit $(u_n)_n$ une suite **convergente** et une suite extraite $(u_{\varphi(n)})_n$ de $(u_n)_n$. Alors la suite $(u_{\varphi(n)})_n$ est convergente de même limite que $(u_n)_n$.

Démonstration :

Risque d'erreur

Il faut faire attention à ne pas dire qu'une suite non convergente a toutes ses suites extraites non convergentes. On pensera à l'exemple de la suite de terme génréral $(-1)^n$.

La contraposée de la proposition précédente permet de montrer qu'une suite est divergente.

Corollaire

Soit (u_n) une suite. S'il existe $l_1 \neq l_2$ et deux suites extraites de (u_n) notées (v_n) et (w_n) convergentes telles que $\lim_{n\to+\infty} v_n = l_1$ et $\lim_{n\to+\infty} w_n = l_2$, alors la suite (u_n) est divergente.

Exemple

La suite $(-1)^n$ n'est pas convergente car les suites extraites de terme général $(-1)^{2n} = 1$ et $(-1)^{2n+1} = -1$ sont convergentes de limites respectives 1 et -1 qui sont différentes.

Exercice 13 *Montrer que la suite de terme général* $(\cos(\frac{\pi n}{2})_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas convergente.*

7.2 Le théorème de Bolzano-Weierstrass

Le théorème suivant permet de s'assurer de la convergence d'une suite $(u_n)_n$ seulement en montrant que les extractions sur les indices paires et impaires convergent vers une limite commune.

Théorème: Recollement

Soit $(u_n)_n$ une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. Si $u_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$ et $u_{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l$, alors :

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} l.$$

Démonstration : : admise.

Même si une suite n'est pas convergente le fait qu'elle soit bornée induit que nécessairement une de ses sous-suites converge. C'est le théorème de Bolzano-Weiestrass.

Théorème: Bolzano-Weiestrass

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée. Il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$$

Démonstration : : La démonstration de ce théorème repose sur le principe de dichotomie (voir feuille).

Vocabulaire 3 *L'ensemble des limites de suites extraites d'une suite s'appelle l'ensemble des valeurs d'adhérence.*

Exemple

L'ensemble des valeurs d'adhérence de la suite $(-1)^n$ *est* $\{-1; 1\}$.

8 Brève extension aux suites complexes

La convergence d'une suite à valeurs complexes est liée à celle de sa partie réelle et imaginaire. Pour une suite à valeurs complexes (u_n) *on notera en général son terme général* $u_n = R_n + i.I_n$ *où pour tout* n, $R_n = Re(u_n)$ *et* $I_n = Im(u_n)$.
L'ensemble des suites à valeurs complexes est noté $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définition: Suite bornée

Soit (u_n) *une suite à valeurs complexes. On dit que* (u_n) *est* ***bornée*** *si la suite réelle* $(|u_n|)$ *des modules de* u_n *est borneé*

Définition: Convergence d'une suite à valeurs complexes

Soit (u_n) *une suite à valeurs complexes. On dit que* (u_n) ***converge vers*** $l \in \mathbb{C}$ *et on note* $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ *si la suite réelle* $(|u_n - l|)_n$ *converge vers* 0.

Exercice 14 *Donner une définition à l'aide d'epsilon de la convergence et du caractère borné d'une suite à valeurs complexes.*

Proposition

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n = R_n + i.I_n)_n$ est convergente si et seulement si il existe deux réels l_1, l_2 tel que (R_n) converge vers l_1 et (I_n) converge vers l_2.

Démonstration :

Proposition

Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$

1. *Si (u_n) est convergente sa limite est unique.*
2. *Si (u_n) est convergente alors elle est bornée.*
3. *Si (u_n) est convergente toutes ses suites extraites sont convergentes.*
4. *Si (u_n) et (v_n) sont convergentes, alors*
   - (a) *$(u_n.v_n)_n$ est convergente.*
   - (b) *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $\lambda.u_n + \mu/v_n$ est convergente.*
   - (c) *$\left(\frac{1}{u_n}\right)$ est convergente si pour tout n, $u_n \neq 0$.*

Démonstration admise

Risque d'erreur

Il n'y a pas de relation d'ordre intéressante dans $\mathbb{C}$, il faut donc prendre garde à ne pas parler de **monotonie** *et de limite égale à $+\infty$ ou $-\infty$ pour une suite à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

En particulier, on ne peut pas appliquer les théorèmes de la limite monotone, ou celui des suites adjacentes à une suite à valeurs complexes.

Exercice 15 *Montrer que la suite de terme général $u_n = \left(\frac{1+i}{2}\right)^n$ est convergente et déterminer sa limite.*

Théorème: Bolzano-Weierstrass version complexe

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite complexe bornée. Il existe une extraction $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ et $l \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\lim_{n\to+\infty} u_{\varphi(n)} = l$$