Chapitre 3 - Circuits linéaires du premier et du deuxième ordre

Dans ce chapitre, nous allons aborder l'étude temporelle de circuits électriques linéaires du premier et du second ordre. Grâce aux connaissances et savoir-faire acquis au chapitre précédent, et à des nouvelles méthodes que nous allons introduire, nous pourrons exprimer **les variations temporelles des tensions ou intensités des circuits**.

Leçon I. Circuits linéaires du premier ordre

Dans cette leçon, nous allons étudier des circuits électriques dont les tensions et les intensités dépendent du temps en nous plaçons, bien évidemment, dans l'ARQS afin de pouvoir exploiter les lois et relations obtenues auparavant. Nous allons nous restreindre à l'étude de circuits dont les variations temporelles des grandeurs électrocinétiques sont régis par des **équations différentielles linéaires du premier ordre**, on les qualifie de **circuits linéaires du premier ordre**.

I.1. Étude de la tension d'un condensateur d'un circuit RC série

Étudions un circuit dans lequel un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C sont branchés en série. Ce circuit est alimenté par un générateur basses fréquences (GBF) qu'on modélise par un générateur de Thévenin de force électromotrice (fem) variable $e(t)$, et une résistance interne négligeable devant R.

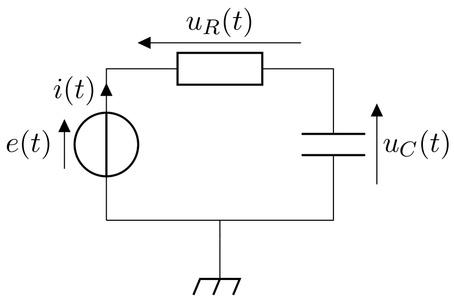


Figure 3.1 – Circuit RC alimenté par un générateur de tension

On impose au GBF de faire varier sa fem de telle manière qu'elle soit nulle avant l'instant $t_0 = 0$, et constante et égale à E_0 pour tous les instants supérieurs, soit

$$\begin{cases} e(t) = 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \\ e(t) = E_0 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

I.1.a Modélisation

Étudions la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

- **Équation différentielle sur $u_C(t)$**

  D'après la loi des mailles

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

  D'après la loi d'Ohm $u_R(t) = Ri(t)$, soit

$$e(t) = Ri(t) + u_C(t).$$

Or nous avons vu que l'intensité du courant traversant un condensateur était lié à la variation de la tension à ses bornes en fonction du temps

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.$$

L'intensité $i(t)$ étant la même dans tout le circuit, on peut remplacer son expression par celle impliquant la variation de $u_C(t)$ en fonction du temps

$$\boxed{e(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t).}$$

Nous venons d'exprimer l'équation qui lie à tout instant t la tension aux bornes du condensateurs $u_C(t)$ à sa dérivée première $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$ et à la tension $e(t)$ imposée par le GBF.
Une telle relation est appelée **équation différentiel du premier ordre** (ou d'ordre un) car elle contient la grandeur que l'on étudie $u_C(t)$ et sa dérivée d'ordre un $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$. Cette équation est aussi dite **linéaire** car elle n'implique que des puissance de 1 de la variable qu'on étudie.

- **Constante de temps**

Nous observons que le terme à gauche de l'équation $e(t)$ et que le deuxième terme à droite de l'équation $u_C(t)$ correspondent à une tension. Afin que l'équation soit homogène au niveau dimensionnelle, la dimension de chaque terme doit être celle d'une tension. Donc le terme

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

doit aussi avoir la dimension d'une tension, soit, si nous menons une analyse dimensionnelle

$$\left[RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathsf{V}$$

avec V le symbole représentant **la dimension** de la tension, et **les crochets représentant l'analyse dimensionnelle**.
Or si on analyse morceau par morceau les dimensions de ce terme, il vient que

$$[RC] \times \frac{[\mathrm{d}u_C(t)]}{[\mathrm{d}t]} = [RC] \times \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{T}}$$

avec T la dimension temporelle qui correspond à celle du terme $\mathrm{d}t$. Ainsi

$$[RC] \times \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{T}} = \mathsf{V}$$

et si on isole le terme $[RC]$ il vient que

$$[RC] = \mathsf{V} \times \frac{\mathsf{T}}{\mathsf{V}} = \mathsf{T}.$$

On constate que **la dimension du terme RC correspond à la dimension** d'un temps, plus exactement **d'une durée qu'on appelle constante de temps du circuit** et que l'on note τ tel que

$$\boxed{\tau = RC.}$$

OdG : nous avons vu que la valeur moyenne d'une résistance était de quelques kΩ, et celle d'une capacité de quelques µF, ainsi la valeur moyenne de $\tau = RC$ est de quelques ms.

- **Calcul de la tension $u_C(t)$**

  (a) **Tension $u_C(t)$ pour $t<0$**

  On sait que pour $t<0$ la tension délivrée par le GBF est nulle $e(t)=0$, le circuit n'est donc pas encore alimenté, donc $u_C(t<0)=0$. La tension $u_C(t<0)=0$ est donc constante, donc sa dérivée est nulle $\mathrm{d}u_C(t<0)/\mathrm{d}t=0$, donc l'équation différentielle est bien respectée

  $$e(t)=\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)$$
  $$0=\tau\times 0+0.$$

  (b) **Continuité de la tension $u_C(t)$**

  Pour $t>0$, la tension imposée par le GBF est $e(t)=E_0$, l'équation différentielle devient

  $$E_0=\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t).$$

  On peut résoudre cette équation différentielle si on connaît **une condition initiale** : la valeur d'une des variable $u_C(t)$ ou $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$ pour un certains instant t. Essayons de trouver une condition initiale.

  Lorsqu'on modélise un circuit, on considère que certaine grandeur sont discontinues, par exemple, la tension $e(t)$ imposée par le GBF, on voit qu'elle varie de manière discontinue : elle passe instantanément de 0 à E_0. Dans la réalité la variation ne se fait pas instantanément mais durant une durée très courte. Néanmoins il est plus facile pour nous de modéliser cette variation par une fonction discontinue.
  En revanche, il y a des grandeurs que l'on ne peut pas modéliser par une fonction discontinue. C'est le cas de la tension aux bornes d'un générateur $u_C(t)$ et le courant traversant une bobine $i_L(t)$. En effet, nous savons que les puissances reçues par un condensateur et par une bobine sont telles que

  $$\mathcal{P}_C=\frac{1}{2}Cu_C(t)\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\qquad\text{et}\qquad\mathcal{P}_L=\frac{1}{2}Li_L(t)\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}.$$

  Une discontinuité sur la tension d'un générateur ou l'intensité d'une bobine correspond à une variation instantanée, soit une durée caractéristique de variation $\mathrm{d}t$ qui tend vers 0, soit

  $$\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\mathcal{P}_C=\frac{1}{2}Cu_C(t)\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\to\infty\qquad\text{et}\qquad\lim_{\mathrm{d}t\to 0}\mathcal{P}_L=\frac{1}{2}Li_L(t)\frac{\mathrm{d}i_L(t)}{\mathrm{d}t}\to\infty.$$

  On voit qu'une discontinuité sur ces grandeurs implique que le condensateur et la bobine reçoivent une puissance instantanée infinie, ce qui n'est pas acceptable physiquement.

  La tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur et l'intensité $i_L(t)$ traversant une bobine sont donc des grandeurs continues.
  L'expression de la puissance instantanée reçue par un résistor n'impliquant pas de dérivée temporelle, la tension et l'intensité d'un résistor ne sont pas forcément continues.

  Dans notre situation on peut donc affirmer que la valeur de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t=0^+)$ **immédiatement après** le changement de valeur de la tension imposée par le GBF, est égale à la valeur de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t=0^-)$ **immédiatement avant** le changement de valeur de la tension imposée par le GBF, dont on a obtenu la valeur précédemment, soit

  $$u_C(t=0^+)=u_C(t=0^-)=0.$$

Nous avons trouvé la condition initiale pour une des variables de notre équation différentielle : pour $t = 0$, $u_C(t = 0) = 0$.

(c) **Tension $u_C(t)$ pour $t > 0$**
À l'aide de la condition initiale nous pouvons résoudre cette équation différentielle du premier ordre pour $u_C(t)$

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = E_0.$$

Cette équation possède aussi un **second membre non nul** : le second membre correspond au terme qui ne dépend ni de la variable, ni de ses dérivée, soit ici E_0.
Pour obtenir la solution d'une équation différentiel du premier ordre avec un second membre non nul, il faut trouver deux types de solutions : la solution particulière et la solution homogène. **La solution est alors la somme des solutions particulière et homogène**.

- **Solution particulière**
La solution particulière $u_{C,p}(t)$ pour cette équation est recherchée de manière à ce qu'elle soit de la même forme que le second membre. Dans notre cas, le second membre E_0 est constant, donc on recherche une solution particulière $u_{C,p}(t)$ constante : $u_{C,p}(t) \equiv u_{C,p}$.
Comme cette solution $u_{C,p}$ est constante, sa dérivée est nulle $\mathrm{d}u_{C,p}/\mathrm{d}t$: il n'y a pas de variation dans le temps. On peut réécrire l'équation

$$\tau \times 0 + u_{C,p} = E_0$$

soit

$$\boxed{u_{C,p} = E_0.}$$

- **Solution homogène**
La solution homogène $u_{C,h}(t)$ est par définition **la solution de l'équation homogène : l'équation sans second membre**, soit

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_{C,h}(t)}{\mathrm{d}t} + u_{C,h}(t) = 0.$$

Modifions cette équation

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_{C,h}(t)}{\mathrm{d}t} = -u_{C,h}(t)$$
$$\frac{\mathrm{d}u_{C,h}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} u_{C,h}(t).$$

On aboutit à une relation entre $u_{C,h}(t)$ et sa dérivée. On constate que la dérivée par rapport au temps de $u_{C,h}(t)$ est égale à cette même fonction multipliée par une constante, soit

$$f'(x) = bf(x).$$

Il existe deux méthodes pour résoudre cette équation.

Méthode 1
On peut "sentir" la solution. En effet, on connaît la fonction $f(x) = ae^{bx}$, avec a et b des constantes, dont la dérivée est

$$f'(x) = \left(ae^{bx} + c\right)' = bae^{\alpha x} = bf(x)$$

si on identifie

$$x \equiv t \quad ; \quad f(x) \equiv u_{C,h}(t) \quad ; \quad f'(x) = bf(x) \equiv -\frac{1}{\tau}u_{C,h}(t) \quad \text{donc} \quad b \equiv -\frac{1}{\tau}$$

on obtient l'expression de

$$\boxed{u_{C,h}(t) = ae^{-t/\tau}}$$

qui vérifie bien que

$$\frac{u_{C,h}(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}ae^{-t/\tau} = -\frac{1}{\tau}u_{C,h}(t).$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante a.

Méthode 2

On peut intégrer la relation $f'(x) = bf(x)$. Avant cela il nous la modifier de telle manière que

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = b.$$

L'intégration donne

$$\int_Y^Z \frac{f'(x)}{f(x)}\mathrm{d}x = \int_Y^Z b\mathrm{d}x$$
$$F(Z) - F(Y) = bZ - bY$$

avec F la primitive de la fonction f'/f.

Or si on calcule la dérivée de la fonction $\ln(f)$, il vient que

$$\ln(f) \equiv h \circ f \quad \text{avec} \quad h \equiv \ln X$$

$$(\ln(f))' \equiv f'h' \circ f \quad \text{avec} \quad h' \equiv \frac{1}{X}$$

donc

$$(\ln(f))' = f'\frac{1}{f}.$$

Ainsi $F = \ln(f)$, soit

$$F(Z) - F(Y) = bZ - bY$$
$$\ln(f(Z)) - \ln(f(Y)) = bZ - bY$$

soit

$$\ln\left(\frac{f(Z)}{f(Y)}\right) = bZ - bY$$

On utilise la fonction exponentielle

$$\frac{f(Z)}{f(Y)} = e^{bZ-bY}$$

soit

$$f(Z) = f(Y)e^{-bY}e^{bZ}.$$

La valeur de $f(Y)e^{-bY}$ est fixée pour une valeur de Y donnée, on peut l'assimiler à une constante qu'on nomme a, soit $a = f(Y)e^{-bY}$, et donc

$$f(Z) = ae^{bZ}.$$

On reconnaît l'expression de la fonction utilisée dans la méthode 1 (on aurait pu fixée la valeur de $f(Z)e^{-bZ}$, et exprimer $f(Y)$).

- **Solution générale**
La solution générale est la somme des solutions particulière et homogène

$$u_C(t) = u_{C,p} + u_{C,h}(t)$$

$$u_C(t) = E_0 + ae^{-t/\tau}.$$

Afin de déterminer la constante a on utilise la condition initiale $u_C(t=0) = 0$ soit

$$u_C(t=0) = 0 = E_0 + ae^{-0/\tau}$$

$$0 = E_0 + a$$

donc

$$a = -E_0.$$

La solution générale est donc

$$u_C(t) = E_0 - E_0e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_C(t) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right).}$$

I.1.b Interprétation physique

Observons sur la voie 1 d'un oscilloscope la tension $e(t)$ imposée par le GBF et sur la voie 2 la tension $u_C(t)$.

Lorsqu'on impose cette forme à la tension délivrée par le GBF, on appelle cela un **échelon de tension**.

La réponse du circuit à un échelon de tension est appelée **réponse indicielle**, elle peut correspondre à n'importe quelle tension aux bornes des éléments récepteurs du circuit. Dans notre cas nous avons choisi la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur comme réponse indicielle du circuit.

On constate qu'à $t = 0$ la tension imposée par le GBF passe de 0 à $E_0 = 1$ V. Alors que la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ passe de 0 à $E_0 = 1$ V pendant une certaine durée : cette durée délimite **le régime transitoire** de fonctionnement du circuit. Après cette durée le circuit fonctionne dans **le régime permanent**.

La tension $u_C(t)$ respecte la solution générale que l'on a trouvée plus tôt. On voit que cette tension admet deux asymptotes en $t \to 0$ et $t \to \infty$.

Pour $t \to 0$, on utilise le développement limité en 0 au premier ordre de la fonction exponentielle e^x quand $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} e^x = e^0 + x \times (e^x)'_{x=0}$$

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 + x \times (e^x)_{x=0}$$

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 + x.$$

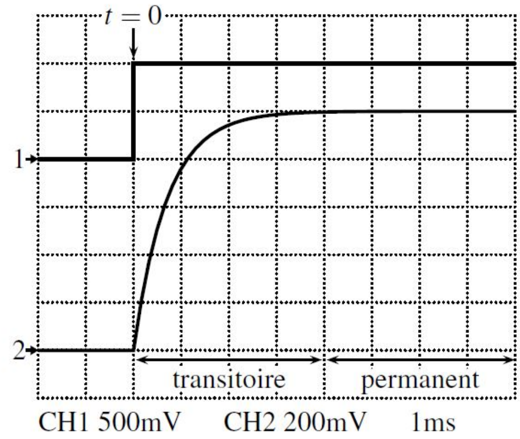


Figure 3.2 – Tension $e(t)$ délivrée par le GBF et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

Ainsi on peut remplacer $e^{-t/\tau}$ par $1 - t/tau$ dans l'expression de $u_C(t)$ lorsque $t \to 0$

$$\lim_{t \to 0} u_C(t) = E_0 \left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$\lim_{t \to 0} u_C(t) = E_0 \frac{t}{\tau}$$

cette fonction correspond à la tangente à l'origine de $u_C(t)$ représentée sur la Figure 3.3.

Pour $t \to \infty$, nous constatons que $e^{-t/\tau} \to e^{-\infty} = 0$, donc lorsque $t \to \infty$ la tension $u_C(t)$ devient

$$\lim_{t \to \infty} u_C(t) = E_0.$$

Cela correspond à l'asymptote représentée sur la Figure 3.3.

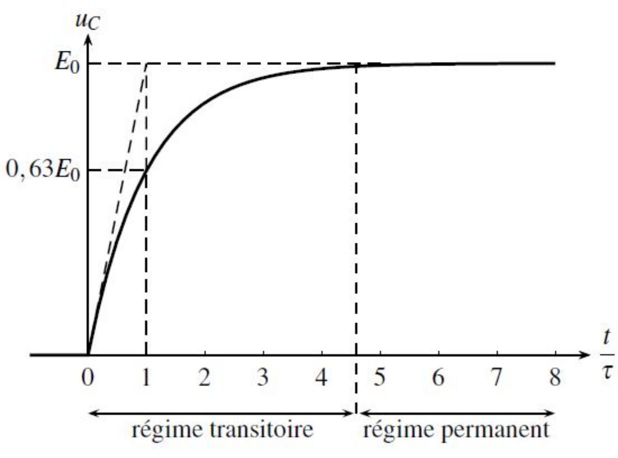


Figure 3.3 – Variation de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

On constate que ces deux asymptotes se coupent à l'instant t tel que

$$\lim_{t \to 0} u_C(t) = \lim_{t \to \infty} u_C(t)$$

$$E_0 \frac{t}{\tau} = E_0$$

$$t = \tau.$$

Ainsi, **la constante temps du circuit $\tau = RC$ correspond à l'instant où les asymptotes de la fonction $u_C(t)$ se recoupent.**

On peut aussi obtenir la valeur de la tension $u_C(t)$ à l'instant $t = \tau$

$$u_C(\tau) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$u_C(\tau) = E_0\left(1 - e^{-\tau/\tau}\right)$$

$$u_C(\tau) = E_0\left(1 - e^{-1}\right)$$

$$u_C(\tau) = E_0\left(1 - e^{-1}\right)$$

$$u_C(\tau) = 0,63E_0.$$

♥ Définition

La constante de temps du circuit $\tau = RC$ correspond à la durée pour laquelle la tension $u_C(t) = 0,63E_0$.

Pour obtenir la valeur de τ à l'oscilloscope, il faut repérer la la valeur de $u_C = 0,63E_0$ sur l'axe des ordonnées, et lire la durée entre l'instant où $u_C = 0$ et l'instant où $u_C = 0,63E_0$.

Par convention, on considère que le régime permanent est atteint lorsque la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ est égale à 99% de la tension E_0 du régime permanent, soit

$$u_C(t) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$E_0\frac{99}{100} = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

$$\frac{99}{100} = 1 - e^{-t/\tau}$$

$$e^{-t/\tau} = 1 - \frac{99}{100}$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

$$t = -\tau\ln\left(1 - \frac{99}{100}\right)$$

$$t = 4,6\tau.$$

♥ Définition

Le temps de réponse du circuit, noté T_R, est défini par convention comme la durée pour laquelle la tension $u_C(t)$ atteint 99% de la tension E_0 du régime permanent, soit

$$T_R = 4,6\tau.$$

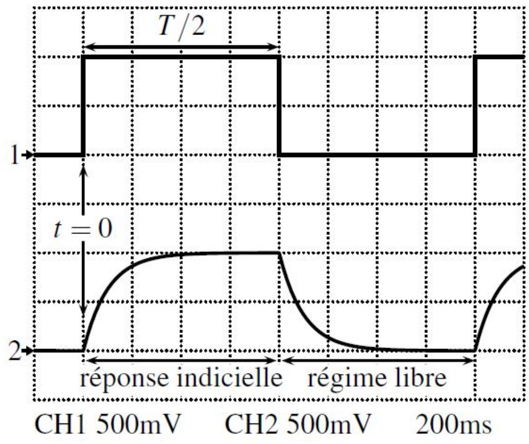


Figure 3.4 – Tension $e(t)$ délivrée par le GBF et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.

I.1.c Régime libre du circuit RC

Étudions le même circuit, mais cette fois-ci en imposant au GBF de délivrer, non pas un échelon de tension, mais une tension créneau de période T valant E_0 sur une demi-période et 0 sur l'autre, comme cela est illustré Figure 3.4.

Pour $t \in [0, T/2]$, $e(t) = E_0$, et la réponse indicielle du circuit, si l'on choisit la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ est celle que nous avons trouvé précédemment. On constate ici, que la demi-période $T/2$ est plus importante que le temps de réponse du circuit $T_R = 0,46\tau$ car le régime permanent est atteint ($u(t) = E_0$).

Pour $t \in [T/2, T]$, $e(t) = 0$, plus aucune tension n'est imposée au circuit : cela correspond au **régime libre**.

Pour obtenir l'expression de la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ en régime libre, on réécrit la loi des mailles, en considérant toujours le condensateur et le résistor en convention récepteur

$$u_C(t) + u_R(t) = 0$$

$$u_C(t) + Ri(t) = 0$$

$$u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

On retrouve une équation différentielle du premier ordre, mais cette fois avec un second membre différent de E_0, ce second membre est nul, soit

$$\tau\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) = 0.$$

On reconnaît l'équation homogène. La solution particulière est nulle et la solution homogène est en fait la solution générale. On peut utiliser la solution homogène obtenue plus tôt

$$u_C(t) = u_{C,h}(t) = ae^{-t/\tau}.$$

La constante a s'obtient de nouveau à partir d'une condition initiale. D'après la Figure 3.4, le régime libre débute à $t = T/2$. La tension aux bornes du condensateur juste avant le régime libre $u_C(T/2^-)$ est égale à E_0. La tension aux bornes du condensateur étant continue, sa valeur juste après le régime libre $u_C(T/2^+)$ est aussi égale à E_0, soit

$$u_C(T/2) = ae^{-T/(2\tau)} = E_0$$

ainsi

$$a = E_0 e^{T/(2\tau)}$$

et donc

$$u_C(t) = E_0 e^{T/(2\tau)} e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{u_C(t) = E_0 e^{-(t-T/2)/\tau}.}$$

Recherchons la valeur de t pour laquelle $u_C(t)$ a perdu 99% de sa valeur initiale en régime libre, soit $E_0 1/100$:

$$\begin{aligned}
u_C(t) = \frac{1}{100}E_0 &= E_0 e^{-(t-T/2)/\tau} \\
\frac{1}{100} &= e^{-(t-T/2)/\tau} \\
\ln\left(\frac{1}{100}\right) &= -\frac{t-\frac{T}{2}}{\tau} \\
-\tau \ln\left(\frac{1}{100}\right) &= t - \frac{T}{2} \\
t &= \frac{T}{2} - \tau \ln\left(\frac{1}{100}\right) \\
t &= \frac{T}{2} + 4,6\tau.
\end{aligned}$$

Le régime libre commençant à $t = T/2$, on voit bien que $u_C(t)$ v 99% de sa valeur initiale en régime libre après $4,6\tau$ ce qui correspond bien au **temps de réponse** du circuit.

I.1.d Bilan énergétique

Afin de réaliser le bilan de puissances et d'énergie échangées dans le circuit RC, nous devons partir de l'expression des différentes tensions obtenue grâce à la loi des mailles

$$e(t) = u_R(t) + u_C(t).$$

Multiplions les tensions de chacun des éléments par l'intensité du courant qui le traverse afin d'obtenir la puissance échangée par chacune des éléments

$$e(t)i(t) = u_R(t)i(t) + u_C(t)i(t).$$

On peut identifier chacun des termes de cette expression et les associer à une certaine puissance instantanée :

$$\mathcal{P}_{GBF}(t) = \mathcal{P}_{Joule}(t) + \mathcal{P}_C(t) = u_C(t)i(t)$$

- $\mathcal{P}_{GBF}(t) = e(t)i(t)$, la puissance instantanée fournie par le GBG au reste du circuit
- $\mathcal{P}_{Joule}(t) = u_R(t)i(t)$, la puissance instantanée dissipée par le résistor par **effet Joule**
- $\mathcal{P}_C(t) = u_C(t)i(t)$, la puissance instantanée reçue par le générateur.

Nous pouvons utiliser la loi du condensateur qui lie l'intensité du courant qui le parcourt $i(t)$ à la tension $u_C(t)$ à ses bornes afin d'obtenir une expression de $i(t)$ en fonction de $u_C(t)$ qui est connue

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dans le cas de la charge du condensateur, soit lorsqu'on regarde la réponse indicielle du circuit face à une tension imposée du GBF $e(t) = E_0$, la tension aux bornes du condensateur est

$$u_C(t) = E_0\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

si l'on dérive par rapport au temps, il vient que

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{E_0}{\tau}e^{-t/\tau}$$

l'intensité du courant $i(t)$ est donc

$$i(t) = \frac{E_0 C}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

- On peut ainsi exprimer **la puissance instantanée fournie par le GBF**

$$\mathcal{P}_{GBF}(t) = e(t)i(t)$$

$$\mathcal{P}_{GBF}(t) = E_0\frac{E_0 C}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$\mathcal{P}_{GBF}(t) = \frac{E_0^2 C}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

L'énergie délivrée par le GBF $\mathcal{E}_{GBF}$ entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \to \infty$ s'obtient en intégrant sa puissance instantanée fournie

$$\mathcal{E}_{GBF} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{GBF}(t)\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{E}_{GBF} = \int_0^\infty \frac{E_0^2 C}{\tau}e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$$

$$\mathcal{E}_{GBF} = \frac{E_0^2 C}{\tau}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\mathcal{E}_{GBF} = \frac{E_0^2 C}{\tau}\left[-\tau e^{-\infty/\tau} + \tau e^{-0/\tau}\right]$$

$$\mathcal{E}_{GBF} = \frac{E_0^2 C}{\tau}\left[0 + \tau\right]$$

$$\mathcal{E}_{GBF} = E_0^2 C.$$

- On peut également exprimer **la puissance dissipée par effet Joule par le résistor**

$$\mathcal{P}_{Joule}(t) = u_R(t)i(t)$$

or d'après la loi d'Ohm $u_R(t) = Ri(t)$ donc

$$\mathcal{P}_{Joule}(t) = Ri^2(t)$$

soit

$$\mathcal{P}_{Joule}(t) = R\frac{E_0^2 C^2}{\tau^2}e^{-2t/\tau}$$

on peut simplifier par RC car $\tau = RC$

$$\mathcal{P}_{Joule}(t) = RC\frac{E_0^2 C}{RC\tau}e^{-2t/\tau}$$
$$\mathcal{P}_{Joule}(t) = \frac{E_0^2 C}{\tau}e^{-2t/\tau}.$$

L'énergie dissipée par effet Joule $\mathcal{E}_{Joule}$ entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \to \infty$ s'obtient en intégrant sa puissance instantanée fournie

$$\mathcal{E}_{Joule} = \int_0^\infty \mathcal{P}_{Joule}(t)\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{E}_{Joule} = \int_0^\infty \frac{E_0^2 C}{\tau}e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{E}_{Joule} = \frac{E_0^2 C}{\tau}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t\right]_0^\infty$$
$$\mathcal{E}_{Joule} = \frac{E_0^2 C}{\tau}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-\infty/\tau} + \frac{\tau}{2}e^{0/\tau}\right]$$
$$\mathcal{E}_{Joule} = \frac{E_0^2 C}{\tau}\left[0 + \frac{\tau}{2}\right]$$
$$\mathcal{E}_{Joule} = \frac{E_0^2 C}{2}.$$

- Nous avons déjà exprimer **la puissance instantanée reçue par un condensateur** lors de la leçon précédente

$$P_C(t) = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)}{\mathrm{d}t}$$

avec $\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)$ l'énergie électrique instantanée stockée par le condensateur telle que

$$\mathcal{E}_{\text{élec}}(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2(t).$$

On peut exploiter cette relation pour obtenir **l'énergie électrique stockée par le condensateur** $\mathcal{E}_{\text{élec}}$ entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \to \infty$

$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \int_0^\infty \mathcal{P}_C(t)\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = [\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)]_0^\infty$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \left[\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right]_0^\infty$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2}Cu_C^2(\infty) - \frac{1}{2}Cu_C^2(0)$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2}CE_0^2\left(1 - e^{-\infty/\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}CE_0^2\left(1 - e^{-0/\tau}\right)^2$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2}CE_0^2(1-0)^2 - E_0^2(1-1)^2$$
$$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2}CE_0^2.$$

Nous constatons que l'énergie fournie par le GBF entre l'instant $t = 0$ et l'instant $t \to \infty$, est bien répartie en parts égales entre le condensateur, dans lequel elle est stockée sous forme d'énergie électrique, et le résistor, dans lequel elle est dissipée par effet Joule

$$\mathcal{E}_{GBF} = \mathcal{E}_{Joule} + \mathcal{E}_{\text{élec}}$$

$$E_0^2 C = \frac{E_0^2 C}{2} + \frac{E_0^2 C}{2}.$$

Synthèse

Connaissances

- Modèle du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.
- Charge d'un condensateur par une source de tension constante, décharge d'un condensateur, temps caractéristique.
- Régime transitoire, régime permanent, réponse indicielle, régime libre.
- Stockage et dissipation d'énergie.
- Modèle du circuit RL série.

Savoir-faire

- **Établir** l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur du circuit RC série alimenté par une source idéale de tension.
- **Déterminer** en fonction du temps la tension aux bornes d'un condensateur dans le cas de sa charge et de sa décharge.
- **Déterminer** un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire du circuit RC.
- **Réaliser** un bilan énergétique sur le circuit RC série.
- **Établir et résoudre** l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant du circuit RL série alimenté par une source idéale de tension.
- **Déterminer** un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire du circuit RL.
- **Réaliser** un bilan énergétique sur le circuit RL série.

Leçon II. Circuits linéaires du deuxième ordre

Dans cette leçon, nous allons montrer que certains circuits électriques ont un comportement similaire à d'autres systèmes physiques. Par exemple, un pendule que l'on éloignerait de sa position d'équilibre, soumis à une légère perturbation, revient à cette position après un certain nombre d'oscillations dont l'amplitude finit par s'annuler. On appelle un tel système, un oscillateur amorti.

Nous allons montrer qu'un circuit LC et qu'un circuit RLC correspondent à deux grands types de systèmes : respectivement **l'oscillateur harmonique** et **l'oscillateur amorti**.

II.1. Oscillateur harmonique : le circuit LC

II.1.a Obtention de l'équation différentielle du circuit LC

Considérons un circuit électrique constitué d'un générateur idéal de fem E, d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L.

Un interrupteur positionné initialement au point A permet d'éviter d'alimenter la bobine et de charger le condensateur grâce au générateur jusqu'à ce qu'il atteigne une tension $u_C(t) = E$.

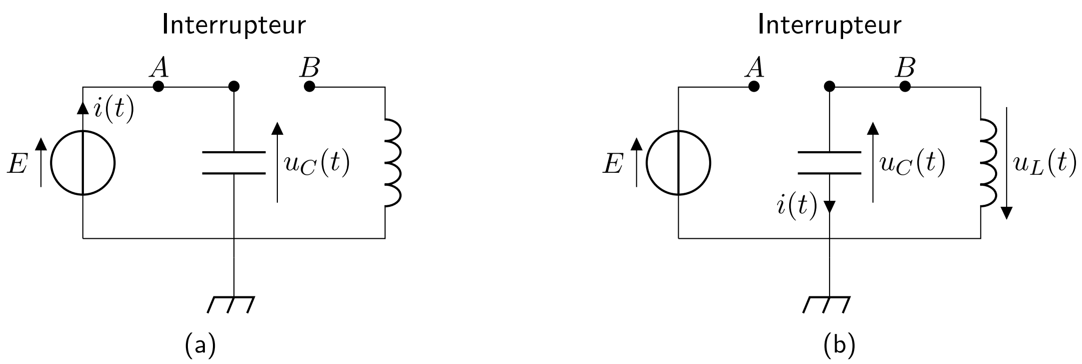


Figure 3.5 – Circuit LC à (a) $t < 0$ et (b) à $t > 0$.

À un instant $t = 0$, l'interrupteur est positionné au point B. Le générateur n'est plus relié au circuit et le condensateur est alors branché en série avec la bobine. Le condensateur peut alors se décharger dans la bobine.

Si on utilise la convention récepteur pour le condensateur et la bobine, la loi des mailles appliquée dans le circuit LC donne

$$u_C(t) + u_L(t) = 0.$$

En utilisant la loi de la bobine, il vient que

$$u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Or la loi du condensateur nous permet d'obtenir une relation entre la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ et l'intensité du courant qui le traverse $i(t)$. Cette loi s'exprime telle que

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.$$

On peut introduire cette expression de $i(t)$ dans l'équation précédente, ce qui donne

$$u_C(t) + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

comme la capacité du condensateur C ne varie pas au cours du temps, on la considère comme un facteur multiplicatif, soit

$$u_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right) = 0.$$

On reconnaît l'expression de la dérivée seconde par rapport au temps

$$\boxed{u_C(t) + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0.}$$

Nous avons obtenue l'équation du second ordre que vérifie le circuit LC.

II.1.b Analyse dimensionnelle

Le terme LC, le produit d'une capacité et d'une inductance est difficile à interpréter : à quelle grandeur correspond ce terme ?

Pour interpréter cette grandeur, faisons menons une analyse dimensionnelle, comme nous l'avons fait dans le cas du produit RC. Pour cela étudions les dimensions des termes de l'équation différentielle.

Le terme $u_C(t)$ correspond à une tension, soit

$$[u_C(t)] = \mathsf{V}.$$

Comme $u_C(t)$ correspond à une tension, le terme $LC\mathrm{d}^2u_C(t)/\mathrm{d}t^2$ doit également correspondre à une tension pour que l'équation soit homogène. Or le terme $\mathrm{d}^2u_C(t)/\mathrm{d}t^2$ correspond à une différence de tensions divisée par une durée au carré, soit

$$\left[\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}\right] = \frac{\mathsf{V}}{\mathsf{T}^2}.$$

Si on isole le terme LC de l'équation il vient que

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} = -u_C(t)$$

$$LC = -\frac{1}{\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}}u_C(t).$$

On peut alors mener l'analyse dimensionnelle sur LC

$$[LC] = \left[-\frac{1}{\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}}u_C(t)\right]$$

$$[LC] = \frac{1}{\left[\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}\right]}[-u_C(t)]$$

$$[LC] = \frac{1}{\frac{\mathsf{V}}{\mathsf{T}^2}}\mathsf{V}$$

$$[LC] = \frac{\mathsf{T}^2}{\mathsf{V}}\mathsf{V}$$

$$[LC] = \mathsf{T}^2.$$

Le terme LC est donc homogène à un temps au carré, en fait la résolution de l'équation différentielle montrera que LC est homogène à un temps au carré divisé par un angle exprimé en radians au carré, son unité est donc $\mathrm{s}^2.\mathrm{rad}^{-2}$.

On peut ainsi introduire une nouvelle grandeur : la pulsation. Elle est notée ω et correspond à un angle exprimé en radian par unité de temps, son unité est le $\mathrm{rad.s}^{-1}$.

On peut ainsi montrer que $1/\sqrt{LC}$ correspond à une pulsation, telle que

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Cette pulsation caractéristique du circuit LC est appelée **pulsation propre du circuit** et est notée ω_0. La pulsation est liée à la fréquence f de telle manière que

$$\omega = 2\pi f.$$

II.1.c Solution générale

On peut réécrire l'équation différentielle du circuit LC en utilisant la pulsation propre ω_0 du circuit

$$u_C(t) + \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

ou

$$\boxed{\omega_0^2 u_C(t) + \frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} = 0.}$$

Nous souhaitons obtenir une expression de $u_C(t)$ à partir de la résolution de cette équation qui est une équation différentielle du second ordre sans second membre.

Si nous isolons la dérivée seconde de $u_C(t)$ nous obtenons cette relation

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2 u_C(t).$$

Nous constatons que la dérivée seconde de $u_C(t)$ par rapport au temps est égale à $u_C(t)$ multiplié par une constante, nous devons donc trouver une fonction du temps $f(t)$ telle que

$$f''(t) = -\omega_0^2 f(t)$$

or, nous connaissons deux fonctions qui se comportent ainsi :

$$(\sin(\omega_0 t))'' = (\omega_0 \cos(\omega_0 t))' = -\omega_0^2 \sin(\omega_0 t)$$

et

$$(\cos(\omega_0 t))'' = (-\omega_0 \sin(\omega_0 t))' = -\omega_0^2 \cos(\omega_0 t).$$

La forme générale de la fonction solution de l'équation différentielle d'ordre deux sans second membre est donc

$$f(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t)$$

avec A et B des constantes à déterminer à partir des conditions initiales du problème.

☛ *Nota bene*

On comprend mieux pourquoi ω_0 est homogène à un angle en radian divisé par un temps (ou un angle en radian multiplié par une fréquence) : la fonction $\sin(x)$ et la fonction $\cos(x)$ peut s'appliquer sur x si et seulement si x est un angle (on dit aussi que x est l'argument de la fonction). Ainsi, par résolution de l'équation différentielle, nous obtenons une fonction $\sin(\omega_0 t)$, cela signifie que $\omega_0 t$ a la dimension d'un angle. Cela est possible si ω_0 a la dimension d'un angle divisé par un temps

$$[\omega_0 t] = \frac{\mathsf{angle}}{\mathsf{T}}\mathsf{T} = \mathsf{angle}.$$

Il en découle que LC correspond bien à l'inverse du carré d'une pulsation

$$LC = \frac{1}{\omega_0^2}.$$

La tension du condensateur $u_C(t)$ dans le circuit LC a donc pour expression

$$u_C(t) = A\sin(\omega_0 t) + B\cos(\omega_0 t).$$

II.1.d Résolution de l'équation différentielle

Afin d'obtenir l'expression des constantes A et B en fonction des données du problème, comme nous avons affaire à une équation du second ordre, nous devons utiliser deux conditions initiales que respecte le circuit LC.

Nous devons trouver une condition initiale sur la variable au cœur de l'équation $u_C(t)$: c'est-à-dire trouver la valeur de $u_C(t)$ à l'instant initial 0 ; et trouver une condition initiale sur la dérivée de la variable $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$. Dans notre cas, cette condition initiale sur $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$ est donné par la condition initiale sur $i(t)$, car les deux grandeurs sont directement liées par la loi du condensateur

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.$$

- **Condition initiale sur** $u_C(t)$
  Juste avant l'instant $t = 0$, à l'instant $t = 0^-$, le condensateur est chargé, il a une tension égale à celle imposée par le GBF, soit $u_C(0^-) = E_0$.
  De part la continuité de la valeur de la tension aux bornes d'un condensateur, il vient qu'à l'instant juste après $t = 0$, à l'instant $t = 0^+$, la tension du condensateur est $u_C(0^+) = E_0$. Nous avons obtenu la condition initiale sur $u_C(0) = 0$.

  Exploitons cette condition initiale avec la solution générale de $u_C(t)$

  $$u_(0) = A\sin(\omega_0 \times 0) + B\cos(\omega_0 \times 0) = E_0$$

  $$u_(0) = B = E_0.$$

  Ainsi si la constante $B = E_0$, la nouvelle expression de $u_C(t)$ est

  $$\boxed{u_C(t) = A\sin(\omega_0 t) + E_0\cos(\omega_0 t).}$$

- **Condition initiale sur** $i(t)$
  Nous allons ici exploiter la continuité du courant traversant une bobine. La puissance instantanée reçue par la bobine étant

  $$\mathcal{P}(t) = Li(t)\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}$$

la variation de l'intensité du courant $i(t)$ ne peut être discontinue.
Ainsi, juste avant l'instant $t = t_0$, à l'instant $t = t_0^-$, le courant qui circule dans la bobine est nul, soit $i(t_0^-) = 0$. Et, donc à l'instant juste après $t = t_0$, soit l'instant $t = t_0^+$, le courant qui circule dans la bobine est aussi nul, $i(t_0^+) = 0$. Et donc la dérivée temporelle de $u_C(t)$ est aussi nulle

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=t_0} = \frac{i(t_0)}{C} = 0.$$

Exploitons cette condition initiale avec l'expression de la dérivée temporelle de $u_C(t)$

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(A\sin(\omega_0 t) + E_0\cos(\omega_0 t)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = \omega_0 A\cos(\omega_0 t) - \omega_0 E_0 \sin(\omega_0 t)$$

or à $t = 0$

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

$$\omega_0 A\cos(\omega_0 \times 0) - \omega_0 E_0 \sin(\omega_0 \times 0) = 0$$

$$\omega_0 A = 0$$

$$A = 0.$$

La solution de l'équation différentielle impliquant $u_C(t)$ est donc

$$\boxed{u_C(t) = E_0\cos(\omega_0 t).}$$

II.1.e Interprétation physique

Nous constatons que la tension aux bornes du condensateur **oscille** entre deux valeurs E_0 et $-E_0$ avec une période T_0 telle que

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}.$$

comme on peut le visualiser à l'aide la simulation du circuit LC réalisée sur le site Falstad.

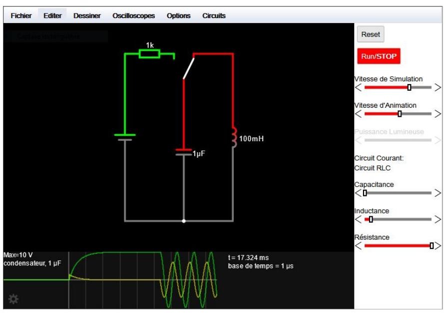


Figure 3.6 – Capture d'écran du site de simulation de circuit électrique Falstad.

Si nous calculons l'expression de l'intensité du courant $i(t)$ dans le circuit à partir de la loi du condensateur

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_0\cos(\omega_0 t)\right)$$

$$\boxed{i(t) = -\omega_0 C E_0 \sin(\omega_0 t).}$$

Nous constatons que l'intensité du courant $i(t)$ **oscille** également entre deux valeurs $\omega_0 C E_0$ et $-\omega_0 C E_0$ avec la même période $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$.

Mais l'intensité du courant atteint sa valeur maximale $\omega_0 C E_0$, lorsque la tension $u_C(t)$ est nulle, et la tension $u_C(t)$ atteint sa valeur maximale E_0 lorsque l'intensité du courant $i(t)$ est nulle : on dit que $i(t)$ **et** $u_C(t)$ **sont en quadrature de phase**.

On peut le constater en utilisant la relation trigonométrique

$$\cos(\alpha + \pi/2) = -\sin(\alpha)$$

soit

$$i(t) = -\omega_0 C E_0 \sin(\omega_0 t) = \omega_0 C E_0 \cos(\omega_0 t + \pi/2).$$

La tension u_C varie selon un cosinus d'argument $\omega_0 t$, et l'intensité du courant $i(t)$ varie selon un cosinus d'argument $\omega_0 t + \pi/2$: leur évolution temporelle est décalée d'une durée $\pi/2\omega_0$, on dit qu'**ils sont en quadrature de phase**.

En conclusion, la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ (qui est égale à l'opposé de la tension aux bornes de la bobine $u_L(t)$) et l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans le circuit LC suivent des lois de variation périodique, ce qui est caractéristique d'un certain type de système qu'on appelle **oscillateur**. **Le circuit LC est un oscillateur particulier**, car les lois de variations périodiques de la tension et de l'intensité du courant sont particulières, elles sont caractéristiques d'un certain type d'oscillateur qu'on appelle **oscillateur harmonique**.

♥ Définitions

- **Un oscillateur** est un système capable de maintenir au cours du temps une loi de variation périodique pour l'un au moins des paramètres qui définissent son état. Le nombre de paramètres variables définit le nombre de degrés de liberté de l'oscillateur.
  Dans notre cas, l'oscillateur est le circuit LC, nous pouvons définir son état à l'aide de deux paramètres : la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$ (qui est égale à l'opposé de la tension aux bornes de la bobine $u_L(t)$) et l'intensité du courant $i(t)$ qui circule dans le circuit. Il y a deux paramètres, donc l'oscillateur qu'est le circuit LC a deux degrés de liberté.

- **L'oscillateur harmonique** est un système physique dont un paramètre $x(t)$ suit une loi de variation périodique sinusoïdale telle que

  $$x(t) = A\sin(\omega_0 t + \varphi)$$

  avec A **l'amplitude** de l'oscillateur, ω_0 **la pulsation propre** de l'oscillateur et φ **la phase initiale ou déphasage** de l'oscillateur (pour $\varphi = \pi/2$ $x(t) = A\cos(\omega_0 t)$).
  Il vient que le paramètre $x(t)$ qui décrit un oscillateur harmonique vérifie une équation différentielle du second ordre sans second membre telle que

  $$\frac{\mathrm{d}^2 x(t)}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 x(t) = 0.$$

  Le qualificatif **harmonique** est synonyme de **sinusoïdal**, on pourra donc aussi trouver l'expression **oscillateur sinusoïdal**.

☛ *Nota bene*

De nombreux systèmes, autre que les circuits électriques, sont des oscillateurs. On peut montrer qu'un ressort entre deux masses, un pendule, une molécule, des flux de population de proie et de prédateurs, les concentrations d'espèces chimiques durant une réaction chimique sont des oscillateurs.

L'oscillateur harmonique est un oscillateur particulier. On peut montrer qu'**un oscillateur quelconque peut être décrit comme une association d'oscillateurs harmoniques différents**, d'où l'intérêt de ce dernier.

II.1.f Bilans de puissance et d'énergie

Afin de réaliser le bilan de puissance, nous allons partir de la loi des mailles

$$u_C(t)+u_L(t)=0.$$

En multipliant les tensions de chaque élément du circuit par l'intensité circulant dans le circuit, nous faisons émerger les puissances instantanées reçues par ces éléments : nous obtenons **le bilan de puissance**.

$$u_C(t)i(t)+u_L(t)i(t)=0\times i(t)$$

$$\boxed{\mathcal{P}_C(t)+\mathcal{P}_L(t)=0}$$

ou

$$\mathcal{P}_C(t)=-\mathcal{P}_L(t)$$

ce qui signifie qu'**il y échange de puissance à chaque instant t entre le condensateur et la bobine** : lorsque le condensateur cède de la puissance, c'est pour la fournir à la bobine ; lorsque le condensateur gagne de la puissance, elle provient de la bobine.

La loi du condensateur et la loi de la bobine nous permettent d'exprimer $\mathcal{P}_C(t)$ et $\mathcal{P}_L(t)$ en fonction de $u_C(t)$ et $i(t)$ respectivement

$$\mathcal{P}_C(t)=u_C(t)i(t)=Cu_C(t)\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_L(t)=u_L(t)i(t)=L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t)$$

$$\mathcal{P}_C(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{P}_L(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right).$$

Nous pouvons réécrire le bilan de puissance tel que

$$\mathcal{P}_C(t)+\mathcal{P}_L(t)=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)\right)=0$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2(t)+\frac{1}{2}Li^2(t)\right)=0.$$

Nous pouvons intégrer cette expression pour obtenir **le bilan d'énergie** (la puissance étant égale à la dérivée temporelle de l'énergie). Nous constatons que la dérivée temporelle du membre de gauche de l'équation est nulle, or nous savons qu'une fonction dont la dérivée est nulle correspond à une constante donc

$$\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)+\mathcal{E}_{\text{mag}}(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)+\frac{1}{2}Li^2(t)=K$$

avec K une constante à déterminer. **Ainsi nous voyons que l'énergie se conserve dans le circuit LC.**

Pour déterminer la constante K nous devons trouver un instant t pour lequel nous connaissons la valeur de $u_C(t)$ et $i(t)$. Cet instant, c'est l'instant initial $t=0$, nous savons que $u_C(0)=E_0$ et $i(0)=0$ donc

$$K=\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)+\mathcal{E}_{\text{mag}}(t)=\mathcal{E}_{\text{élec}}(0)+\mathcal{E}_{\text{mag}}(0)=\frac{1}{2}CE_0^2+0$$

donc

$$K=\frac{1}{2}CE_0^2.$$

Le bilan d'énergie du circuit LC est donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{élec}}(t)+\mathcal{E}_{\text{mag}}(t)=\frac{1}{2}CE_0^2.}$$

L'énergie se conserve dans le circuit LC car il n'y a pas de résistance dans le circuit, donc **il n'y a pas d'effet Joule** : il n'y a pas d'énergie perdue par conversion en chaleur. Il faut bien comprendre qu'un tel système n'est qu'un modèle théorique, car en réalité il y a toujours une valeur de résistance non nulle, les fils, mais aussi les éléments électroniques en général, résistent plus ou moins au courant.

Nous allons voir dans la deuxième partie de cette leçon comment modéliser un circuit avec une certaine résistance, qui entraînera donc la perte de l'énergie stockée par le condensateur et la bobine, il s'agit du circuit RLC.

II.2. Oscillateur amorti : le circuit RLC

Étudions un circuit RLC série dont la tension à ses bornes est imposée par un générateur considéré comme idéal (un GBF dont la résistance interne est très faible devant celle du circuit). De plus, on utilise une boîte à décade de résistance afin de pouvoir faire varier la valeur de R.

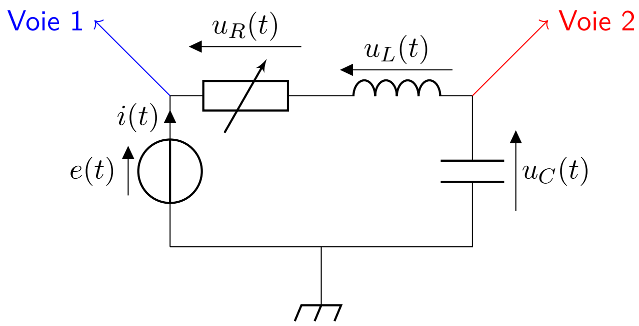
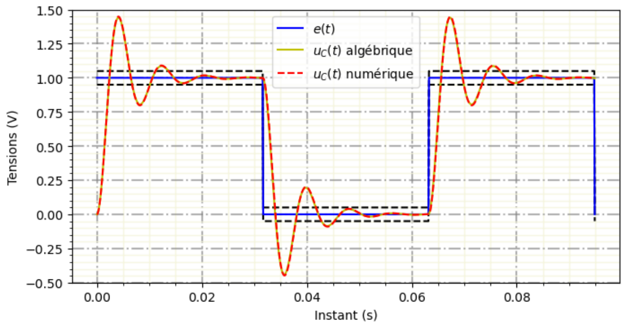


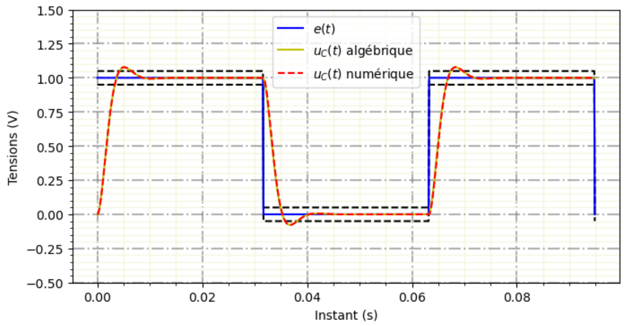
Figure 3.7 – Circuit RLC alimenté par un générateur de tension avec $C=1{,}6$ µF et $L=1$ H.

Sur la première voie d'un oscilloscope, nous visualisons la tension $e(t)$ imposée par le GBF, sur la deuxième voie, nous visualisons la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$. Comme la tension aux bornes d'un condensateur est proportionnelle à la charge $q(t)$ accumulée sur ces armatures, nous pouvons dire qu'en étudions la variation de la tension du condensateur, nous étudions la variation de la charge dans le circuit RLC lorsque celui-ci est soumis à une certaine tension : **on dit qu'on étudie la réponse en charge du circuit RLC**.

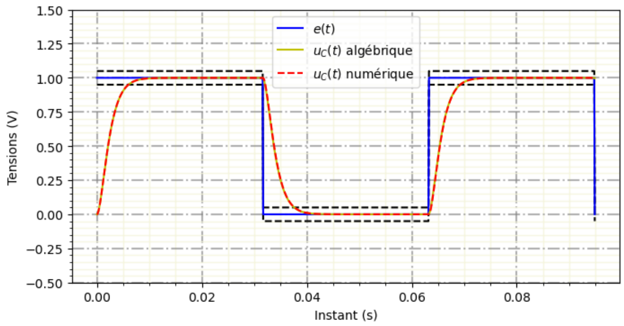
Visualisons cette réponse en charge vis-à-vis d'un échelon de tension imposée par un GBF lorsqu'on fait varier la résistance et qu'on garde constant les valeurs de capacité et d'inductance du circuit, comme illustré Figure 3.8.



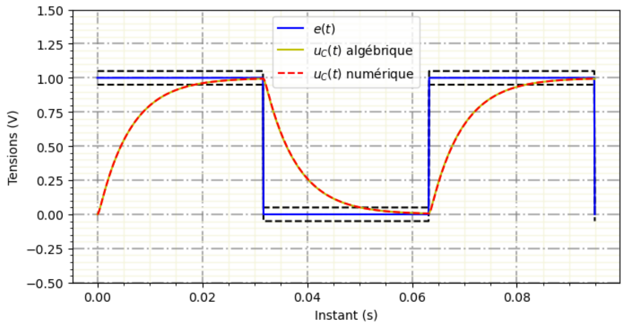
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure 3.8 – Réponses en charge du circuit RLC pour (a) $R = 400\ \Omega$, (b) $R = 1{,}00$ kΩ (c) $R = 1{,}60$ kΩ et (c) $R = 4{,}00$ kΩ.

Nous constatons que le profil de la réponse en charge du circuit RLC varie fortement selon la valeur de la résistance.

Nous observons deux types de profils. Les réponses présentées Figure 3.8a et Figure 3.8b présentent des oscillations qui s'amortissent, aussi bien dans le domaine de réponse indicielle et que celui du régime libre.

Les réponses présentées Figure 3.8c et Figure 3.8d ne présentent pas d'oscillations.

Afin d'obtenir l'expression de la tension aux bornes du condensateur, et donc la réponse en charge du circuit RLC, nous allons faire apparaitre **une équation différentielle du second ordre**.

La résolution de cette équation fera apparaitre **trois solutions différentes** selon les valeurs de R, L et C du circuit RLC. Ces solutions correspondent à trois natures ou **trois régimes différents de la réponse en charge** du circuit RLC. Nous montrerons que le calcul de deux nouvelles grandeurs nous permettra d'obtenir directement des informations sur le régime d'un circuit RLC en fonction des valeurs de R, L et C.

II.2.a Équation différentielle

Utilisons la loi des mailles dans ce circuit pour faire émerger l'équation différentielle.

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$

soit d'après la loi d'Ohm et la loi de la bobine

$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t).$$

Or la loi du condensateur implique que

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

expression de $i(t)$ que l'on peut introduire dans la loi des mailles

$$e(t) = RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right) + u_C(t)$$

$$\boxed{e(t) = LC\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t).}$$

Nous obtenons une équation différentielle du deuxième ordre impliquant $u_C(t)$, sa dérivée du premier ordre et sa dérivée du deuxième ordre, ainsi qu'un second membre non nul, $e(t)$.

II.2.b Formes canoniques

On peut mettre l'équation différentielle obtenue précédemment sous la forme de deux expressions dîtes **formes canoniques**

$$\boxed{e(t) = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t) \qquad \text{ou} \qquad e(t) = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t).}$$

À partir de l'expression précédente on peut identifier les deux nouvelles grandeurs Q et ξ.

Grâce au coefficient du premier terme du membre de droite de l'équation, on retrouve l'expression de la pulsation propre du circuit ω_0 telle que

$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

On peut ainsi étudier le coefficient du deuxième terme du membre de droite de l'équation

$$RC = \frac{1}{Q\omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{Q}$$

$$\frac{RC}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{Q}$$

$$Q = \frac{\sqrt{LC}}{RC}$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

On appelle le terme sans unité Q, **le facteur de qualité du circuit**. Nous verrons plus loin quelle information apporte la valeur du facteur de qualité Q.

L'identification des coefficients des deuxièmes termes du membre de droite de chaque forme canonique nous permet d'écrire

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{2\xi}{\omega_0}$$

soit

$$\frac{1}{Q} = 2\xi$$

donc

$$\boxed{\xi = \frac{1}{2Q} = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}.}$$

On appelle le terme sans unité ξ, **le facteur d'amortissement du circuit**. Nous verrons plus loin quelle information apporte la valeur du facteur d'amortissement ξ.

II.2.c Résolution de l'équation différentielle

Nous allons nous placer dans le cas général ou le circuit RLC est soumis à une tension non nulle constante de la part du GBF à partir d'un instant $t = 0$: $e(t \geq 0) = E_0$. **On étudie donc la réponse indicielle du circuit RLC**.

À partir de cette étude de la réponse indicielle, on peut réaliser l'étude du régime libre du circuit RLC, en déterminant convenablement les conditions initiales du système (de la même manière que l'on s'est inspiré de l'étude de la réponse indicielle du circuit RC pour étudier le régime libre de ce circuit).

Ces conditions initiales sont au nombre de deux, car nous étudions une équation différentielle du deuxième ordre. Il nous faut une condition initiale sur la grandeur inconnue de l'équation différentielle : $u_C(t)$, et une condition sur sa dérivée première : $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$. D'après la loi du condensateur, nous savons que l'intensité du courant $i(t)$ traversant ce dernier est proportionnelle à $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$, nous pouvons donc chercher la condition initiale de $i(t)$ pour obtenir celle de $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$.

Nous avons vu que les expressions des puissances instantanées reçues par le condensateur et la bobine impliquaient respectivement que la tension aux bornes de la bobine $u_C(t)$ soit continue, et que l'intensité du courant $i(t)$ traversant la bobine soit également continue, cela nous permet de déterminer les conditions initiales sur $u_C(t)$ et $i(t)$.

Car nous savons qu'à $t = 0^-$:

- la tension est nulle aux bornes du condensateur, soit $u_C(0^-) = 0$, donc à l'instant initial $t = 0$, $u_C(0) = 0$
- l'intensité du courant est nulle dans le circuit, soit $i(0^-) = 0$, donc à l'instant initial $t = 0$, $i(0) = 0$, donc $i(0) = C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}_{t=0} = 0$, soit $\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}_{t=0} = 0$.

Nous avons ainsi tous les éléments pour résoudre l'équation différentielle du deuxième ordre. La méthode est similaire à la résolution de l'équation différentielle du premier ordre : recherche de la solution particulière $u_{C,p}(t)$, de la solution homogène $u_{C,h}(t)$ et obtention de la solution générale $u_C(t) = u_{C,p}(t) + u_{C,h}(t)$.

- **Solution particulière**

  On recherche la solution particulière, c'est-à-dire la solution qui est de la même forme que le second membre. Ici le second membre est $e(t \geq 0) = E_0$, soit une constante, on cherche donc $u_{C,p} =$ cst.
  Il vient donc que

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,p}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2 u_{C,p}}{\mathrm{d}t^2} = 0.$$

  On peut réécrire la forme canonique de l'équation différentielle

$$e(t) = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + u_C(t)$$

$$E_0 = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,p}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_{C,p}}{\mathrm{d}t} + u_{C,p}$$

$$E_0 = 0 + 0 + u_{C,p}.$$

  Ainsi

$$\boxed{u_{C,p} = E_0.}$$

- **Solution homogène**
Afin de trouver la solution homogène, on considère l'équation homogène, c'est-à-dire l'équation différentielle sans second membre, soit

$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,h}(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_{C,h}(t)}{\mathrm{d}t}+u_{C,h}(t)=0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+u_C(t)=0.$$

On peut montrer, comme cela a été fait en cours de Mathématiques qu'il existe trois solutions pour l'équation de la forme

$$a\frac{\mathrm{d}^2 u_{c,h}(t)}{\mathrm{d}t^2}+b\frac{\mathrm{d}u_{c,h}(t)}{\mathrm{d}t}+cu_{c,h}(t)=0.$$

Ces solutions dépendent de la valeur du discriminant $\Delta=b^2-4ac$.
On peut identifier les constantes a, b et c à celles qui nous intéressent dans le cas du circuit RLC

$$a\equiv\frac{1}{\omega_0^2} \qquad \text{et} \qquad b\equiv\frac{1}{Q\omega_0}\equiv\frac{2\xi}{\omega_0} \qquad \text{et} \qquad c\equiv 1.$$

Le discriminant de notre équation est donc

$$\Delta=b^2-4ac=\frac{1}{Q^2\omega_0^2}-\frac{4}{\omega_0^2}=\frac{1}{\omega_0^2}\left(\frac{1}{Q^2}-4\right)$$

ou

$$\Delta=b^2-4ac=\frac{1}{\omega_0^2}\left(4\xi^2-4\right)=\frac{4}{\omega_0^2}\left(\xi^2-1\right).$$

Étudions **les trois solutions possibles selon les trois types de valeurs de Δ.**

1. **Si $\Delta>0$, soit**

$$\frac{1}{Q^2}-4>0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{Q^2}>4 \quad \text{donc} \quad \boxed{Q<\frac{1}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \xi^2-1>1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\xi>1}$$

On peut montrer que la solution homogène $u_{c,h}(t)$ est

$$u_{c,h}(t)=K_1e^{r_1 t}+K_2e^{r_2 t}$$

avec K_1 et K_2 deux constantes à déterminer, et r_1 et r_2 les deux racines réelles de l'équation du second ordre $ax^2+bx+c=0$ telles que

$$r_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{soit} \quad r_1=-\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right) \quad \text{ou} \quad r_1=-\omega_0\xi\left(1-\sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}}\right)$$

$$r_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{soit} \quad r_2=-\frac{\omega_0}{2Q}\left(1+\sqrt{1-4Q^2}\right) \quad \text{ou} \quad r_2=-\omega_0\xi\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\xi^2}}\right).$$

2. **Si $\Delta = 0$, soit**

$$\frac{1}{Q^2} - 4 = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{Q^2} = 4 \quad \text{donc} \quad \boxed{Q = \frac{1}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \xi^2 - 1 = 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\xi = 1.}$$

On peut montrer que la solution homogène $u_{c,h}(t)$ est

$$u_{c,h}(t) = e^{r_0 t}\left(K_1 t + K_2\right)$$

avec K_1 et K_2 deux constantes à déterminer et r_0 la racine double de l'équation du second ordre $ax^2 + bx + c = 0$ telle

$$r_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{Q\omega_0} \times \frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} = \omega_0 \qquad \text{ou} \qquad r_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2\xi}{\omega_0} \times \frac{\omega_0^2}{2} = -\omega_0\xi = \omega_0.$$

3. **Si $\Delta < 0$, soit**

$$\frac{1}{Q^2} - 4 < 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{Q^2} < 4 \quad \text{donc} \quad \boxed{Q > \frac{1}{2}} \qquad \text{ou} \qquad \xi^2 - 1 < 1 \quad \text{donc} \quad \boxed{\xi < 1.}$$

On peut montrer que la solution homogène $u_{c,h}(t)$ est

$$u_{c,h}(t) = K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

avec K_1 et K_2 deux constantes à déterminer, et r_1 et r_2 les deux racines complexes de l'équation du second ordre $ax^2 + bx + c = 0$ telles que

$$r_1 = \frac{-b + i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{soit} \quad r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \quad \text{ou} \quad r_1 = -\omega_0\xi + i\omega_0\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1}$$

$$r_2 = \frac{-b - i\sqrt{4ac - b^2}}{2a} \quad \text{soit} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \quad \text{ou} \quad r_2 = -\omega_0\xi - i\omega_0\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1}.$$

Il vient donc que

$$u_{c,h}(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(K_1 e^{i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}t} + K_2 e^{-i\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}t}\right) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

$$u_{c,h}(t) = e^{-\omega_0\xi t}\left(K_1 e^{i\omega_0\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}t} + K_2 e^{-i\omega_0\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}t}\right) = e^{-\omega_0\xi t}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

car en utilisant les formules d'Euler

$$A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = A\frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2} + B\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} = \left(\frac{A}{2} - i\frac{B}{2}\right)e^{i\omega t} + \left(\frac{A}{2} + i\frac{B}{2}\right)e^{-i\omega t}$$

on peut identifier les différents termes

$$\left(\frac{A}{2} - i\frac{B}{2}\right) = K_1 \quad ; \quad \left(\frac{A}{2} + i\frac{B}{2}\right) = K_2 \quad ; \quad \omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \quad \text{ou} \quad \omega = \omega_0\xi\sqrt{\frac{1}{\xi^2} - 1}.$$

C'est trois solutions homogènes possibles pour $u_C(t)$ selon la valeur du discriminant Δ correspondent à trois types, natures ou régime de la réponse en charge du circuit RLC. Étudions chacune de ces natures de réponse.

II.2.d Régime pseudopériodique

Étudions le dernier cas où $\Delta < 0$, c'est-à-dire le cas où **le facteur de qualité Q est supérieur à $1/2$, ou le facteur d'amortissement est inférieur à 1**.

La solution générale pour la tension $u_C(t)$ aux bornes du générateur est

$$u_C(t) = E_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(K_1\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right).$$

À $t = 0$ la tension aux bornes du condensateur est nulle, soit

$$u_C(0) = E_0 + K_1 = 0$$

donc

$$K_1 = -E_0$$

ainsi

$$u_C(t) = E_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-E_0\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right).$$

La dérivée temporelle de la tension aux bornes du condensateur est donc

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(-E_0\cos(\omega t) + K_2\sin(\omega t)\right) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\omega E_0\sin(\omega t) + \omega K_2\cos(\omega t)\right).$$

À $t = 0$, nous avons vu que la dérivée temporelle était nulle, soit

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = \frac{\omega_0}{2Q}E_0 + \omega K_2 = 0$$

soit

$$K_2 = -E_0\frac{\omega_0}{2Q}\frac{1}{\omega}$$

$$K_2 = -E_0\frac{\omega_0}{2Q}\frac{2Q}{\omega_0\sqrt{4Q^2-1}}$$

$$K_2 = -E_0\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

ainsi

$$u_C(t) = E_0\left(1 - e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{4Q^2-1}}\right)\right)$$

ou

$$u_C(t) = E_0\left(1 - e^{-\omega_0\xi t}\left(\cos(\omega t) + \frac{\sin(\omega t)}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}}\right)\right)$$

Cette expression, comme celle de la réponse en charge des autres régimes, n'est pas à apprendre. Mais il faut savoir l'interpréter.

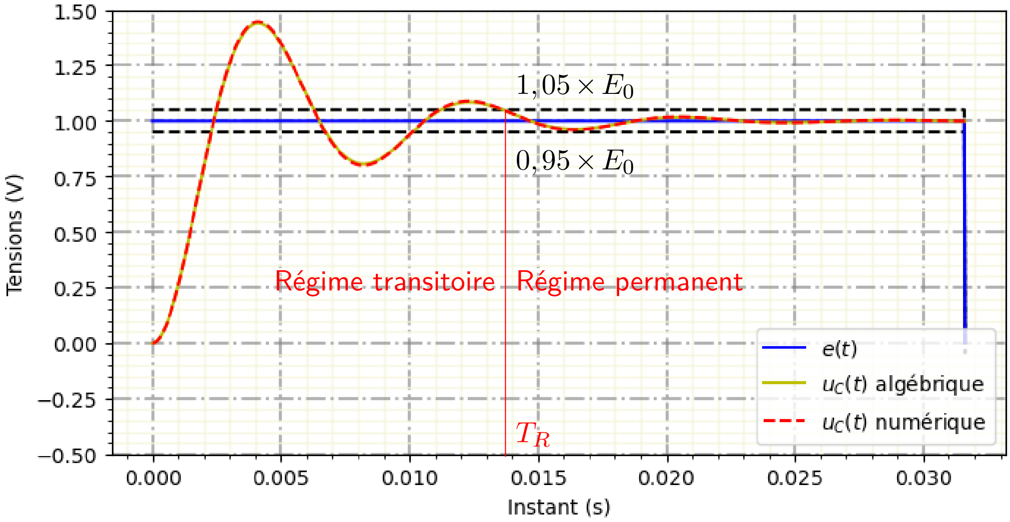


Figure 3.9 – Réponse indicielle du circuit RLC pour $Q = 2$ ou $\xi = 0,25$.

Les termes en $\cos(\omega t)$ **et** $\sin(\omega t)$ **traduisent des oscillations** en quadrature de phase. Le terme prédominant est celui avec le coefficient multiplicateur le plus important. Dans notre cas, comme $Q > 1/2$ ou $\xi < 1$, il vient que

$$\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}} > 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\xi^2}-1}} > 1.$$

C'est donc le terme en $\cos(\omega t)$ qui prédomine dans l'expression.

L'exponentielle traduit une décroissance du terme de droite de l'expression avec le temps : plus t augmente, plus la valeur de $\exp\left(-\omega_0 t/(2Q)\right)$ ou de $\exp\left(-\omega_0 \xi t\right)$ tend vers 0. Cette fonction exponentielle traduit **un amortissement des oscillations** qui augmente avec le temps t. Après une durée très importante, le terme de droite est négligeable et la tension aux bornes du condensateur tend vers E_0, la tension imposée par le GBF.

On peut voir sur la Figure 3.9 que le circuit RLC se comporte comme un oscillateur amorti.

On note que plus l'argument négatif de l'exponentielle sera proche de 0 et plus longtemps perdureront les oscillations. **Plus le facteur de qualité** Q **sera grand et plus les oscillations du système perdureront et seront pilotées par la fonction** $\cos(\omega t)$**.** Ces oscillations de pseudopulsation ω sont à l'origine du nom de ce régime : **le régime pseudopériodique.**

Plus le facteur d'amortissement ξ sera petit devant 1 et plus l'amortissement de l'oscillation du signal sera faible : on pourra distinguer de nombreuses oscillations. **Plus** ξ **est faible plus les oscillations du système perdureront.**

Pourquoi provoquer des oscillations qui perdurent ? On veut souvent qu'un système oscille très longtemps avec une même pulsation afin de s'en servir comme une référence de fréquence, par exemple les vibrations du cristal de quartz dans les montres à quartz. Dans ce cas, il faut maximiser le facteur de qualité Q, ce qui revient à minimiser ξ le facteur d'amortissement. (On souhaite également qu'une oscillation persiste pour le plaisir de l'entendre, par exemple la corde de piano.)

On rappelle les expressions de Q, ξ, ω_0 et ω

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad \xi = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}.$$

D'après les expressions de Q et ξ, on peut maximiser Q et minimiser ξ en réduisant la résistance R du circuit. Dans ce cas on ne fait pas varier la pulsation propre ω_0 qui ne dépend que de l'inductance L et de la capacité C du circuit. Mais on augmentera la pseudo-pulsation ω du système qui dépend de Q ou de ξ, donc de R, L et C.

On peut voir que pour des valeurs du facteur de qualité Q importantes ou des valeurs du facteur d'amortissement ξ faibles, soit $Q >> 1$ ou $\xi << 1$, il vient

$$\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} \approx \frac{\omega_0}{2Q}2Q = \omega_0$$

$$\omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} \approx \omega_0$$

la pseudo-pulsation tend vers la pulsation propre du circuit RLC.

La pseudopulsation est exactement égale à la pulsation si le facteur de qualité Q tend vers l'infini, ou le facteur d'amortissement ξ est nul. Ce qui peut-être le cas **lorsque la résistance R du circuit est nul : le circuit RLC devient un circuit LC, soit un oscillateur harmonique comme nous l'avons étudié, et non plus un oscilalteur amorti.**

Par convention, on définit le temps de réponse à 5% du système, noté T_R, comme la durée au bout de laquelle la réponse atteint une valeur comprise entre 0,95 et 1,05 fois sa valeur finale. On l'a déterminé graphiquement sur la Figure 3.11 telle que $T_R = 0,0138$ s. **Cette durée T_R correspond à la durée du régime transitoire.**

Nous constatons que durant cette durée T_R, la réponse en charge du circuit RLC a effectué un peu plus de deux oscillations. **Le dénombrement du nombre d'oscillations durant le régime transitoire permet d'estimer approximativement la valeur du facteur de qualité** Q, soit deux dans notre cas. On retiendra que dans le régime pseudopériodique le système oscille Q fois avant de se stabiliser.

On peut ainsi obtenir **une estimation en ordre de grandeur du temps de réponse du système** T_R en considérant que le nombre d'oscillations du système durant le régime transitoire, noté N, est le rapport entre la durée du régime transitoire T_R et la durée d'une oscillation. La durée d'une oscillation correspond à la période d'une oscillation. On peut lier la pseudopulsation à cette période que l'on **nomme pseudopériode** $T = 2\pi/\omega$. Ainsi

$$N = \frac{T_R}{T}$$

en remplaçant N par Q, et en exprimant la pseudopériode en fonction de la pseudopulsation, il vient que

$$Q \approx \frac{T_R}{2\pi}\omega$$

et donc

$$\boxed{T_R \approx \frac{2\pi Q}{\omega}.}$$

II.2.e Régime apériodique

Étudions le cas où $\Delta > 0$, c'est-à-dire le cas où **le facteur de qualité Q est inférieur à $1/2$, ou le facteur d'amortissement est supérieur à 1**.

D'après l'étude précédente, la réponse en charge du circuit RLC est

$$u_C(t) = E_0 + K_1 e^{r_1 t} + K_2 e^{r_2 t}$$

avec

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right) \qquad \text{ou} \qquad r_1 = -\omega_0\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)$$

$$r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1+\sqrt{1-4Q^2}\right) \qquad \text{ou} \qquad r_2 = -\omega_0\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right).$$

Il vient que

$$u_C(t) = E_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\left(K_1 e^{-\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}t} + K_2 e^{\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}t}\right)$$

ou

$$u_C(t) = E_0 + e^{-\omega_0\xi t}\left(K_1 e^{-\omega_0\sqrt{\xi^2-1}t} + K_2 e^{\omega_0\sqrt{\xi^2-1}t}\right)$$

✎ **Application 1**

À partir des conditions initiales de $u_C(t)$ et $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$ **montrer** que

$$K_1 = -\frac{E_0}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}\right) \qquad \text{et} \qquad K_2 = -\frac{E_0}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}\right).$$

La réponse en charge du circuit est ainsi telle que

$$u_C(t) = E_0 - \frac{E_0}{2}e^{-\omega_0\xi t}\left(\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}\right)e^{-\omega_0\sqrt{\xi^2-1}t} + \left(1-\frac{1}{\sqrt{1-4Q^2}}\right)e^{\omega_0\sqrt{\xi^2-1}t}\right).$$

Nous constatons sur la Figure 3.10 qu'**il n'y a pas de terme traduisant une oscillation** (pas de fontion sinus ou cosinus), c'est pourquoi **on nomme ce type de régime, le régime apériodique**. Ce régime est caractérisé par un facteur de qualité $Q < 1/2$ et un facteur d'amortissement $\xi > 1$. Dans ce régime, le circuit RLC correspond à un oscillateur fortement amorti.

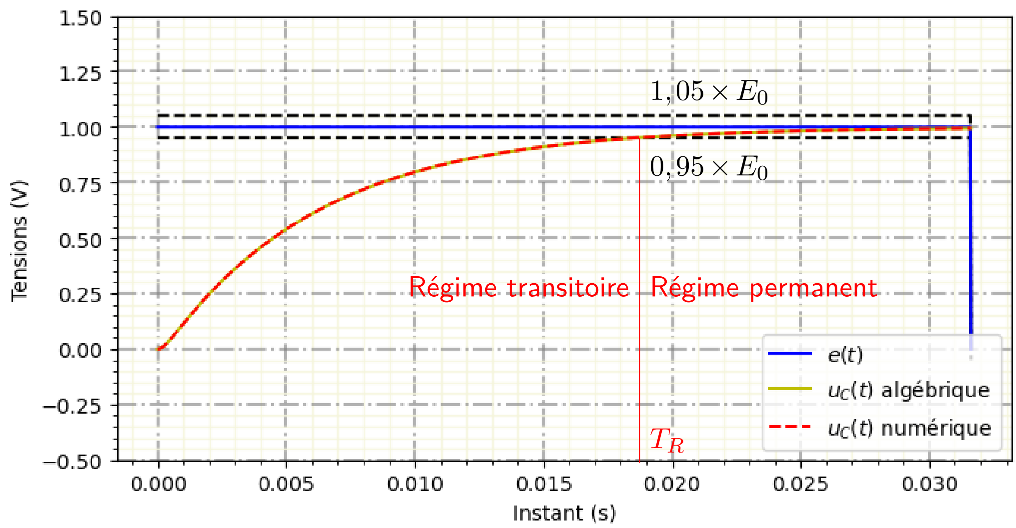


Figure 3.10 – Réponse indicielle du circuit RLC pour $Q = 0,2$ ou $\xi = 2,5$.

De la même manière que nous l'avons fait dans le cas du régime pseudopériodique, nous avons déterminé graphiquement sur la Figure 3.11 la valeur du **temps de réponse du système** T_R. Il vaut dans ce cas $0,0188$ s.

II.2.f *Régime critique*

Étudions finalement le cas où $\Delta = 0$, soit le cas limite entre le régime pseudopériodique et le régime apériodique, c'est-à-dire lorsque **le facteur de qualité $Q = 1/2$, ou le facteur d'amortissement $\xi = 1$**.

D'après l'étude précédente, la réponse en charge du circuit RLC est

$$u_{c,h}(t) = E_0 + e^{-\omega_0\ t}(K_1 t + K_2).$$

Application 2

À partir des conditions initiales de $u_C(t)$ et $\mathrm{d}u_C(t)/\mathrm{d}t$ **montrer** que

$$K_1 = \omega_0 E_0 \qquad \text{et} \qquad K_2 = -E_0.$$

La réponse en charge du circuit est ainsi telle que

$$u_C(t) = E_0\left(1 + e^{-\omega_0\ t}(\omega_0 t - 1)\right).$$

Nous constatons sur la Figure 3.11 que dans le régime critique, la réponse du circuit RLC a la même allure que celle du régime apériodique, **il n'y a pas de terme traduisant une oscillation**. Dans ce régime le circuit RLC correspond également à un oscillateur fortement amorti.

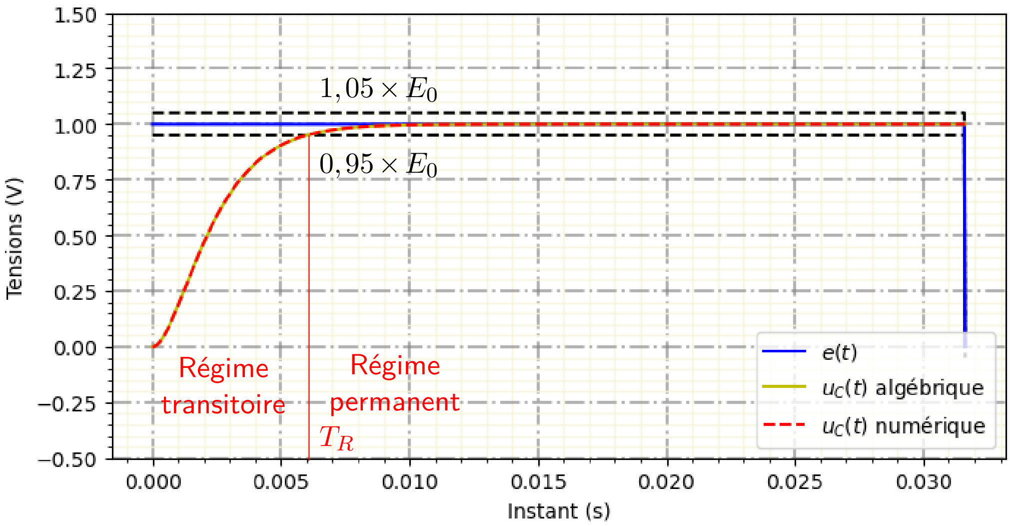


Figure 3.11 – Réponse indicielle du circuit RLC pour $Q = 1/2$ ou $\xi = 1$.

De la même manière que nous l'avons fait dans le cas des deux autres régimes, nous avons déterminé graphiquement sur la Figure 3.11 la valeur du **temps de réponse du système** T_R. Il vaut dans ce cas $0{,}060$ s. Nous constatons que dans le cas du régime critique, le temps de réponse est très court, c'est la caractéristique de ce régime : **le régime critique est le régime pour lequel la stabilisation de la réponse du système est la plus rapide.**

Le qualificatif "critique" vient du fait que ce régime se situe à la limite entre le régime pseudopériodique et le régime apériodique.

Pourquoi paramétrer un système afin que sa réponse corresponde au régime critique ? Il arrive que l'on désire qu'un système soumis à une excitation se stabilise le plus rapidement possible, par exemple, les amortisseurs d'une voiture, il faut alors les paramétrer afin que leur réponse se fasse dans le régime critique.

II.2.g Bilans de puissance et d'énergie

Comme nous l'avons dans le cas du circuit RC, RL et LC, le bilan de puissance s'obtient en multipliant la loi des mailles par la valeur de l'intensité du courant traversant chacun des éléments du circuit

$$e(t)i(t) = u_R(t)i(t) + u_L(t)i(t) + u_C(t)i(t)$$

$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + L\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}i(t) + u_C(t)C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}$$

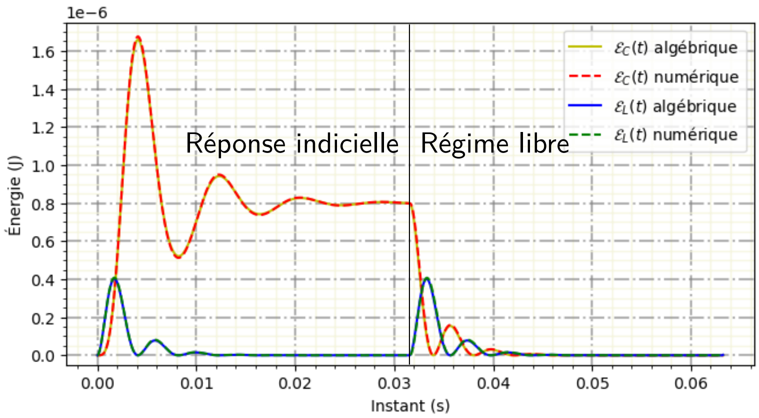
$$e(t)i(t) = Ri^2(t) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li(t)^2(t)\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu(t)^2(t)\right).$$

On peut alors identifier chacun des termes de cette dernière expression

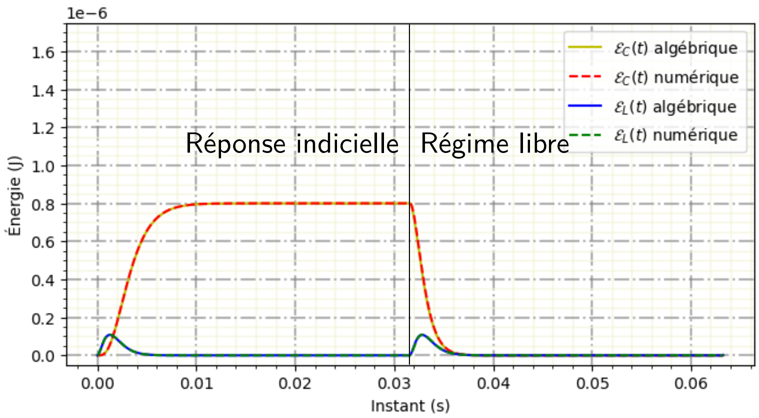
$$\mathcal{P}_{\mathsf{GBF}}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_L(t) + \mathcal{E}_C(t)\right) + \mathcal{P}_{\mathsf{Joule}}(t)$$

avec $\mathcal{P}_{\mathsf{GBF}}(t)$ la puissance instantanée fournie par le GBF, $\mathcal{P}_{\mathsf{Joule}}(t)$ la puissance dissipée du fait de la résistance du système par effet Joule, $\mathcal{E}_L(t)$ l'énergie magnétique stockée dans la bobine et $\mathcal{E}_C(t)$ l'énergie électrique stockée dans le condensateur.

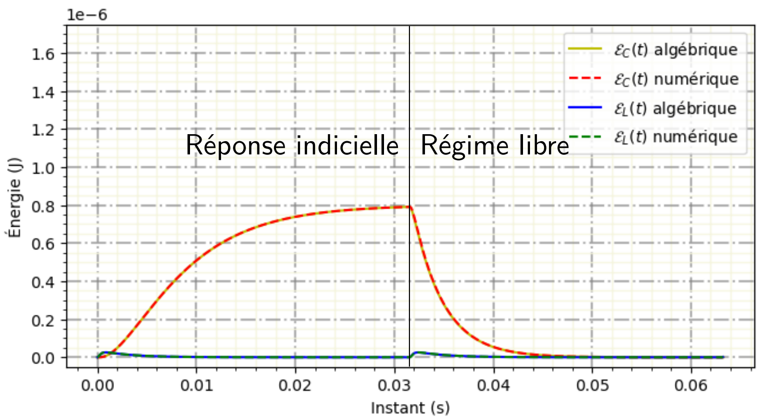
On peut observer ci-dessous, la variation de l'énergie stockée dans le condensateur et la bobine au cours du temps dans le cas de la réponse indicielle et du régime libre pour différentes valeurs du facteur de qualité Q ou du facteur d'amortissement ξ.



(a)



(b)



(c)

Figure 3.12 – Variation des énergies stockées dans le condensateur et la bobine, $\mathcal{E}_C(t)$ et $\mathcal{E}_L(t)$, dans le circuit RLC au cours de la réponse indicielle et du régime libre pour (a) $Q = 2$ ou $\xi = 0,25$, (b) $Q = 1/2$ ou $\xi = 1$ et (c) $Q = 0,2$ ou $\xi = 25,$.

L'énergie fournie par le GBF est en partie stockée dans le condensateur et dans la bobine, et en partie dissipée par effet Joule.

Nous constatons sur la Figure 3.12 que dans tous les cas (systèmes en régime pseudopériodique, apériodique ou critique), au début de la réponse indicielle l'énergie provenant du GBF est d'abord stockée sous forme magnétique dans la bobine, puis sous forme électrique dans le condensateur. Il y a échange d'énergie entre le condensateur et la bobine jusqu'à ce que le condensateur soit complément chargé. En fin de réponse indicielle, l'énergie est uniquement stokée sous forme d'énergie électrique, sa valeur est $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE_0^2$.

Dans le cas du régime libre, comme la tension imposée par le GBF est nulle $e(t) = 0$, il vient que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{E}_L(t) + \mathcal{E}_C(t)\right) = -\mathcal{P}_{\text{Joule}}(t).$$

Les énergies stockées dans le condensateur et la bobine sont totalement dissipées par effet Joule. Nous pouvons voir sur la Figure 3.12, qu'au début du régime libre, c'est l'énergie électrique dans le condensateur qui est d'abord dissipée. Une part de cette énergie est fournie à la bobine qui la stocke sous forme magnétique. Cette énergie magnétique est aussi dissipée par effet Joule, mais une partie est aussi fournie au condensateur. Il y a en réalité un échange d'énergie entre condensateur et bobine, mais à chaque échange une partie de cette énergie est perdue par effet Joule jusqu'à épuisement.

✎ Application 3

- **Exprimer** la réponse en charge du circuit RLC en régime libre pour $Q > 1/2$, $Q = 1/2$ et $Q < 1/2$.
- **Exprimer** la réponse en courant du circuit RLC en réponse indicielle pour $Q > 1/2$, $Q = 1/2$ et $Q < 1/2$.
- **Exprimer** la réponse en courant du circuit RLC en régime libre pour $Q > 1/2$, $Q = 1/2$ et $Q < 1/2$.

Synthèse

Connaissances

- Modèle du circuit LC.
- Oscillateur harmonique, pulsation propre, fréquence propre, période propre, amplitude et phase.
- Modèle du circuit RLC série.
- Facteur de qualité, facteur d'amortissement.
- Pseudopulsation, pseudopériode, temps de réponse du circuit.
- Régime pseudopériodique, régime apériodique, régime critique.

Savoir-faire

- **Établir** l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur caractéristique d'un oscillateur harmonique et la résoudre compte-tenu des conditions initiales.
- **Écrire** sous forme canonique l'équation différentielle qui caractérise l'évolution d'une grandeur caractéristique d'un oscillateur amorti afin d'identifier sa pulsation propre et son facteur de qualité.
- **Identifier** la nature de la réponse libre d'un oscillateur amorti en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- **Déterminer** la réponse d'un oscillateur amorti dans le cas d'un régime libre ou indiciel en recherchant les racines du polynôme caractéristique et en tenant compte des conditions initiales.
- **Déterminer** un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité d'un oscillateur amorti.
- **Réaliser** un bilan énergétique pour un circuit RLC série.