TD II. Circuits linéaires du deuxième ordre

Exercice II.1. Résolutions d'équations différentielles du deuxième ordre ★ ★

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes.

1. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2.$$

2. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

3. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

4. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 3\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 3.$$

5. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} - 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2.$$

6. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} - 2\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 2 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

7. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 4f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -3.$$

8. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 2.$$

9. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = -1.$$

10. $$\frac{\mathrm{d}^2 f(t)}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t} + 2f(t) = 0 \qquad \text{et} \qquad f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}f(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0} = 1.$$

Exercice II.2. Circuit LC et générateur de courant ★ ★

Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

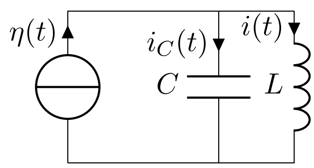


Figure 3.7 – Schéma électrique.

1. **Exprimer** la dérivée temporelle de l'énergie totale, $\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}/\mathrm{d}t$ en fonction de $i(t)$ et $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$.

2. **Justifier** qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$. Retrouver cette équation par application des lois de l'électronique.
3. **Établir** les conditions initiales sur $i(t)$ et sa dérivée.
4. **En déduire** l'expression de $i(t)$.

Exercice II.3. Circuit bouchon ★ ★

On souhaite déterminer l'équation d'évolution de l'intensité du courant i_2 circulant dans la bobine dans le circuit suivant. Le résistor a une résistance $R = 10$ kΩ, la bobine a une inductance $L = 100$ mH et le condensateur a une capacité $C = 0,1$ µF.

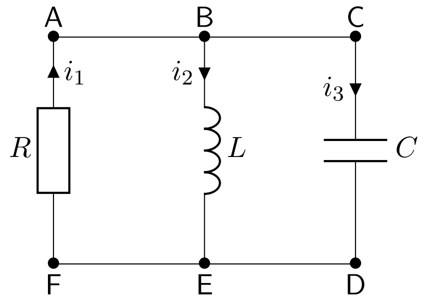


Figure 3.8 – Schéma électrique.

1. **Utiliser** la loi des nœuds pour **établir** une relation entre i_1, i_2 et i_3.
2. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ABEF pour **établir** une expression de i_1 dépendant de L, R et i_2.
3. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille BCDE pour **établir** une expression de u_C, la tension aux bornes du condensateur en fonction de L et i_2.
4. **Exprimer** i_3 en fonction de u_C, puis i_3 en fonction de L, C et i_2.
5. À partir des relations précédentes et de la loi des nœuds, **déterminer** l'équation différentielle que respecte i_2.
6. À partir de l'équation canonique impliquant le facteur de qualité Q, **exprimer** la pulsation propre du circuit ω_0 et Q en fonction des paramètres du système. **Donner** les valeurs de Q et ω_0.
7. **Déterminer** à quel type de régime sera soumis ce système. **Donner** l'équation d'évolution de i_2 dans ce régime à partir des conditions initiales suivantes : la charge initiale du condensateur est $q(t = 0) = 1$ µC et l'intensité initiale du courant la bobine est $i_2(t = 0) = 1$ mA.

Exercice II.4. Influence d'un condensateur sur un circuit RL ★ ★

Un générateur de tension continue de force électromotrice E et de résistance interne r est branché aux bornes d'une bobine d'inductance L et de résistance R.

Pour $t < 0$ l'interrupteur K est ouvert ; on suppose qu'à $t = 0$ le circuit a atteint un régime permanent. On ferme l'interrupteur K à $t = 0$ ce qui branche en parallèle sur la bobine un condensateur de capacité C.

L'objet de cet exercice est l'étude de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine pour $t > 0$.

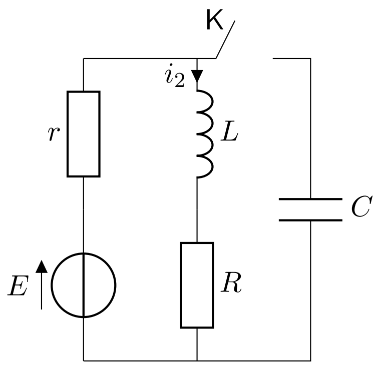
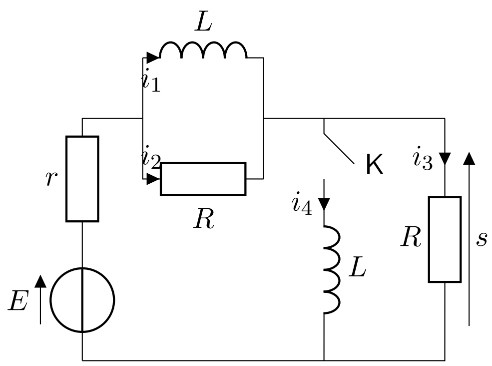


Figure 3.9 – Schéma électrique.

1. **Déterminer** $i(0^+)$ et $\left(\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t}\right)_{t=0}$.
2. **Établir** l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.
3. On donne $L = 43$ mH, $R = 9{,}1$ Ω, $r = 50$ Ω et $E = 5{,}0$ V. **Déterminer** les valeurs de C permettant d'observer un régime quadipériodique.

Exercice II.5. Étude d'un circuit à deux bobines ★ ★

On considère le circuit représenté ci-dessous. Le générateur a une force électromotrice constante E. L'interrupteur K est ouvert depuis très longtemps et on le ferme à l'instant $t = 0$.



1. **Déterminer** les intensités i, i_1, i_2, i_3 et i_4 à l'instant $t = 0^-$ puis à l'instant $t = 0^+$.
2. Déterminer $s(\infty)$, $i(\infty)$, $i_1(\infty)$, $i_2(\infty)$, $i_3(\infty)$ et $i_4(\infty)$, c'est-à-dire les valeurs lorsqu'un régime permanent est atteint.
3. **Relier** $s(t)$ à $i_3(t)$, puis à $i_4(t)$. **En déduire** $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$ en fonction de R, L, $s(t)$ et $\mathrm{d}s(t)/\mathrm{d}t$.
4. **Relier** $i_2(t)$ et i_2(t). **En déduire** $\mathrm{d}i(t)/\mathrm{d}t$ en fonction de R, L, $i_2(t)$ et $\mathrm{d}i_2(t)/\mathrm{d}t$.
5. **Montrer** que
$$\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_3(t)}{\mathrm{d}t} = 0.$$
En déduire que
$$i_2(t) = \frac{3L}{R^2}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{2}{R}s(t).$$
6. **Trouver** une équation différentielle du second odre vérifiée par $s(t)$.
7. **Déterminer** $s(t)$.