

## TD II. Circuits linéaires du deuxième ordre

### Exercice II.1. Résolutions d'équations différentielles du deuxième ordre ★ ★

Déterminer les solutions des équations différentielles suivantes.

1.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2.$$

2.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

3.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

4.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 3 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 3.$$

5.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} - 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2.$$

6.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} - 2 \frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

7.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 4 \frac{df(t)}{dt} + 4f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = -3.$$

8.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2.$$

9.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{df(t)}{dt} + f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = -1.$$

10.

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + 2 \frac{df(t)}{dt} + 2f(t) = 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1.$$

1.

$$f_p(t) = 0 \quad ; \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1 > 0$$

$$r_1 = \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t} \quad \text{et} \quad \frac{df(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-t}$$

$$f(0) = 1 = K_1 + K_2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2 = -2K_1 - K_2 \quad \text{donc}$$

$$K_1 = -3 \quad \text{et} \quad K_2 = 4 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = -3e^{-2t} + 4e^{-t}.$$

2.

$$\begin{aligned}
 f_p(t) &= 0 & ; & \quad \Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1 > 0 \\
 r_1 &= \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2 & \text{et} & \quad r_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 & \text{donc} \\
 f(t) &= K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t} & \text{et} & \quad \frac{df(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-t} \\
 f(0) = 1 &= K_1 + K_2 & \text{et} & \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1 = -2K_1 - K_2 & \text{donc} \\
 K_1 &= -2 & \text{et} & \quad K_2 = 3 & \text{donc} \\
 f(t) &= -2e^{-2t} + 3e^{-t}.
 \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
 f_p(t) &= 0 & ; & \quad \Delta = -4 \times (-1) = 4 > 0 \\
 r_1 &= \frac{-\sqrt{4}}{2} = -1 & \text{et} & \quad r_2 = \frac{\sqrt{4}}{2} = 1 & \text{donc} \\
 f(t) &= K_1 e^{-t} + K_2 e^t & \text{et} & \quad \frac{df(t)}{dt} = -K_1 e^{-t} + K_2 e^t \\
 f(0) = 1 &= K_1 + K_2 & \text{et} & \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1 = -K_1 + K_2 & \text{donc} \\
 K_1 &= 0 & \text{et} & \quad K_2 = 1 & \text{donc} \\
 f(t) &= e^t.
 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
 f_p(t) &= 0 & ; & \quad \Delta = 3^2 - 4 \times 2 = 1 > 0 \\
 r_1 &= \frac{-3 - \sqrt{1}}{2} = -2 & \text{et} & \quad r_2 = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 & \text{donc} \\
 f(t) &= K_1 e^{-2t} + K_2 e^{-t} & \text{et} & \quad \frac{df(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} - K_2 e^{-t} \\
 f(0) = 2 &= K_1 + K_2 & \text{et} & \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 3 = -2K_1 - K_2 & \text{donc} \\
 K_1 &= -5 & \text{et} & \quad K_2 = 7 & \text{donc} \\
 f(t) &= -5e^{-2t} + 7e^{-t}.
 \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
 f_p(t) &= 0 & ; & \quad \Delta = 1^2 - 4 \times (-2) = 9 > 0 \\
 r_1 &= \frac{-1 - \sqrt{9}}{2} = -2 & \text{et} & \quad r_2 = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2} = 1 & \text{donc} \\
 f(t) &= K_1 e^{-2t} + K_2 e^t & \text{et} & \quad \frac{df(t)}{dt} = -2K_1 e^{-2t} + K_2 e^t \\
 f(0) = 1 &= K_1 + K_2 & \text{et} & \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2 = -2K_1 + K_2 & \text{donc} \\
 K_1 &= -\frac{1}{3} & \text{et} & \quad K_2 = \frac{4}{3} & \text{donc} \\
 f(t) &= -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{4}{3}e^t.
 \end{aligned}$$

6.

$$f_p(t) = 0 \quad ; \quad \Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 = 0$$

$$r = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

$$f(t) = (K_1 t + K_2) e^t \quad \text{et} \quad \frac{df(t)}{dt} = K_1 t e^t + K_1 e^t + K_2 e^t$$

$$f(0) = 2 = K_2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 1 = K_1 + K_2 \quad \text{donc}$$

$$K_1 = -1 \quad \text{et} \quad K_2 = 2 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = (-t + 2) e^t.$$

7.

$$f_p(t) = 0 \quad ; \quad \Delta = 4^2 - 4 \times 4 = 0$$

$$r = \frac{-4}{2} = -2$$

$$f(t) = (K_1 t + K_2) e^{-2t} \quad \text{et} \quad \frac{df(t)}{dt} = -2K_1 t e^{-2t} + K_1 e^{-2t} - 2K_2 e^{-2t}$$

$$f(0) = 1 = K_2 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = -3 = K_1 - 2K_2 \quad \text{donc}$$

$$K_1 = -1 \quad \text{et} \quad K_2 = 1 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = (-t + 1) e^{-2t}.$$

8.

$$f_p(t) = 0 \quad ; \quad \Delta = -4 \times 1 = -4 < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2} = 0 \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{\frac{1}{1}} = 1 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t) \quad \text{et} \quad \frac{df(t)}{dt} = -K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t)$$

$$f(0) = 1 = K_1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = 2 = K_2 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = \cos(t) + 2 \sin(t).$$

9.

$$f_p(t) = 0 \quad ; \quad \Delta = 1^2 - 4 \times 1 = -3 < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t/2} \left( K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) \quad \text{et}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -\frac{1}{2} e^{-t/2} \left( K_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right) + \frac{\sqrt{3}}{2} e^{-t/2} \left( -K_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + K_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right)$$

$$f(0) = 1 = K_1 \quad \text{et} \quad \left( \frac{df(t)}{dt} \right)_{t=0} = -1 = -\frac{1}{2} K_1 + \frac{\sqrt{3}}{2} K_2 \quad \text{donc}$$

$$K_1 = 1 \quad \text{et} \quad K_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t/2} \left( \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right).$$

10.

$$f_p(t) = 0 \quad ; \quad \Delta = 2^2 - 4 \times 2 = -4 < 0$$

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2} = -1 \quad \text{et} \quad \omega = \sqrt{\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}} = \sqrt{2 - \frac{4}{4}} = 1 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t}(K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t)) \quad \text{et}$$

$$\frac{df(t)}{dt} = -e^{-t}(K_1 \cos(t) + K_2 \sin(t)) + e^{-t}(-K_1 \sin(t) + K_2 \cos(t))$$

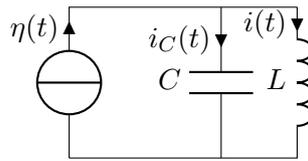
$$f(0) = 0 = K_1 \quad \text{et} \quad \left(\frac{df(t)}{dt}\right)_{t=0} = 1 = -K_1 + K_2 \quad \text{donc}$$

$$K_1 = 0 \quad \text{et} \quad K_2 = 1 \quad \text{donc}$$

$$f(t) = e^{-t} \sin(t).$$

**Exercice II.2. Circuit LC et générateur de courant ★ ★**

Dans le circuit ci-contre, le générateur supposé idéal est brusquement éteint. On le modélise par un échelon de courant,  $\eta(t)$  passant de  $I_0$  à 0 à l'instant  $t = 0$ . On appelle  $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$  l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

**Figure 2.1** – Schéma électrique.

1. **Exprimer** la dérivée temporelle de l'énergie totale,  $d\mathcal{E}_{\text{tot}}/dt$  en fonction de  $i(t)$  et  $di(t)/dt$ . Afin d'obtenir la dérivée temporelle de l'énergie totale  $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ , exprimons l'énergie totale dans le circuit LC, elle est telle que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C(t) + \mathcal{E}_L(t)$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu_C^2(t) + \frac{1}{2}Li^2(t).$$

En dérivant

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} = Cu_C(t) \frac{du_C(t)}{dt} + Li(t) \frac{di(t)}{dt}.$$

D'après la loi des mailles

$$u_C(t) = -u_L(t).$$

Or d'après la loi de la bobine  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , il vient donc que

$$u_C(t) = -L \frac{di(t)}{dt}.$$

On peut ainsi remplacer  $u_C(t)$  dans l'expression de la dérivée de l'énergie totale

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} = L^2C \frac{di(t)}{dt} \frac{d^2i(t)}{dt^2} + Li(t) \frac{di(t)}{dt}.$$

2. **Justifier** qualitativement que  $\mathcal{E}_{\text{tot}}$  est constante. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ . Retrouver cette équation par application des lois de l'électronique.

Dans un circuit LC il n'y a pas de résistor, il n'y a donc pas de pertes énergétiques, l'énergie totale du circuit LC reste donc constante. Il vient donc

$$\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt} = 0 = L^2 C \frac{di(t)}{dt} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + Li(t) \frac{di(t)}{dt}$$

soit en divisant par  $\frac{di(t)}{dt}$

$$0 = L^2 C \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + Li(t)$$

$$0 = LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + i(t).$$

Tentons de retrouver cette expression en utilisant les lois de l'électronique. D'après la loi des mailles utiliser plus tôt

$$u_C(t) = -u_L(t)$$

en dérivant par rapport au temps

$$\frac{du_C(t)}{dt} = -\frac{du_L(t)}{dt}.$$

D'après la loi du condensateur  $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$ , donc

$$\frac{1}{C} i(t) = -\frac{du_L(t)}{dt}.$$

D'après la loi de la bobine  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ , donc

$$\frac{1}{C} i(t) = -L \frac{d^2 i(t)}{dt^2}$$

donc

$$0 = LC \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + i(t).$$

3. **Établir** les conditions initiales sur  $i(t)$  et sa dérivée.

Afin de résoudre cette équation du deuxième ordre, il nous faut deux conditions initiales, concernant  $i(t=0)$  et concernant  $di(t=0)/dt$ .

Lorsque le condensateur est chargé, avant l'instant  $t=0$ , il agit comme un interrupteur ouvert, aucun courant ne le traverse. Le courant passe entièrement dans la bobine, son intensité fournie par le générateur de courant est  $I_0$ . Par continuité de la valeur de l'intensité du courant dans la bobine, il vient que  $i(t=0) = I_0$ .

En régime permanent, avant l'instant  $t=0$ , la valeur de l'intensité du courant dans la bobine est constante, ainsi sa dérivée par rapport au temps est nulle, donc  $di(t=0)/dt = 0$ .

4. **En déduire** l'expression de  $i(t)$ .

L'équation du deuxième ordre obtenue plus tôt est une équation homogène caractéristique d'un oscillateur harmonique, sa solution est donc

$$i(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec  $A$  et  $B$ , deux constantes à déterminer à partir des conditions initiales, et  $\omega_0$  la pulsation propre du circuit LC telle que  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

Il vient que

$$\frac{di(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t).$$

À partir de la condition initiale sur  $i(t)$  il vient que

$$i(t=0) = A = I_0.$$

À partir de la condition initiale sur  $di(t)/dt$  il vient que

$$\left(\frac{di(t)}{dt}\right)_{t=0} = B\omega_0 = 0$$

$$B = 0.$$

Il vient donc que

$$i(t) = I_0 \cos(\omega_0 t).$$

### Exercice II.3. Circuit bouchon ★ ★

On souhaite déterminer l'équation d'évolution de l'intensité du courant  $i_2$  circulant dans la bobine dans le circuit suivant. Le résistor a une résistance  $R = 10 \text{ k}\Omega$ , la bobine a une inductance  $L = 100 \text{ mH}$  et le condensateur a une capacité  $C = 0,1 \text{ }\mu\text{F}$ .

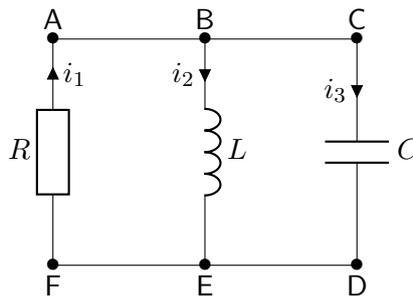


Figure 2.2 – Schéma électrique.

1. **Utiliser** la loi des nœuds pour **établir** une relation entre  $i_1$ ,  $i_2$  et  $i_3$ .  
Au nœud B, on voit que  $i_1 = i_2 + i_3$ .
2. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille ABEF pour **établir** une expression de  $i_1$  dépendant de  $L$ ,  $R$  et  $i_2$ .

La loi des mailles dans la maille ABEF donne

$$u_R(t) + u_L(t) = 0 \quad \text{soit} \quad Ri_1(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} = 0$$

donc

$$i_1(t) = -\frac{L}{R} \frac{di_2(t)}{dt}.$$

3. **Utiliser** la loi des mailles dans la maille BCDE pour **établir** une expression de  $u_C$ , la tension aux bornes du condensateur en fonction de  $L$  et  $i_2$ .

La loi des mailles dans la maille BCDE donne

$$u_L(t) - u_C(t) = 0 \quad \text{soit} \quad L \frac{di_2(t)}{dt} - u_C(t) = 0$$

donc

$$u_C(t) = L \frac{di_2(t)}{dt}.$$

4. **Exprimer**  $i_3$  en fonction de  $u_C$ , puis  $i_3$  en fonction de  $L$ ,  $C$  et  $i_2$ .  
D'après la loi du condensateur

$$i_3(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}.$$

En utilisant la relation précédente, il vient que

$$\frac{du_C(t)}{dt} = L \frac{d^2i_2(t)}{dt^2}$$

donc

$$C \frac{du_C(t)}{dt} = LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2}$$

soit

$$i_3(t) = LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2}.$$

5. À partir des relations précédentes et de la loi des nœuds, **déterminer** l'équation différentielle que respecte  $i_2$ .

D'après la loi des noeuds

$$i_1 = i_2 + i_3.$$

En utilisant les relations précédentes, il vient que

$$-\frac{L}{R} \frac{di_2(t)}{dt} = i_2(t) + LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2}$$

soit

$$LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = 0.$$

6. À partir de l'équation canonique impliquant le facteur de qualité  $Q$ , **exprimer** la pulsation propre du circuit  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction des paramètres du système. **Donner** les valeurs de  $Q$  et  $\omega_0$ .  
L'équation canonique impliquant  $Q$  appliquée à l'équation précédente donne

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = 0.$$

Ainsi

$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC \quad \text{soit} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{L}{R} \quad \text{soit} \quad Q = \sqrt{LC} \frac{R}{L} = R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

**A.N.**

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$Q = R \sqrt{\frac{C}{L}} = 10 \times 10^3 \Omega \sqrt{\frac{0,1 \times 10^{-6} \text{ F}}{100 \times 10^{-3} \text{ H}}} = 10$$

7. **Déterminer** à quel type de régime sera soumis ce système. **Donner** l'équation d'évolution de  $i_2$  dans ce régime à partir des conditions initiales suivantes : la charge initiale du condensateur est  $q(t=0) = 1 \mu\text{C}$  et l'intensité initiale du courant la bobine est  $i_2(t=0) = 1 \text{mA}$ .

Le facteur de qualité  $Q > \frac{1}{2}$  donc le système sera soumis à un régime pseudo-périodique.  
Dans ce cas, comme on a affaire à une équation sans second membre

$$i_2(t) = e^{-\frac{b}{2a}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec  $a = \frac{1}{\omega_0^2}$ ,  $b = \frac{1}{Q\omega_0}$ ,  $c = 1$  et  $\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$ .

Ainsi

$$-\frac{b}{2a} = -\frac{1}{Q\omega_0} \frac{\omega_0^2}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a} = \omega_0^2 \frac{\sqrt{\frac{4}{\omega_0^2} - \frac{1}{Q^2\omega_0^2}}}{2} = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}.$$

**A.N.**

$$\frac{\omega_0}{2Q} = \frac{1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}{2 \times 10} = 500 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} = 500 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \times \sqrt{4 \times 100 - 1} = 9987 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

À  $t = 0$

$$i_2(t=0) = A = 1 \times 10^{-3} \text{ A}.$$

De plus

$$u_C(t) = L \frac{di_2(t)}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} L e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + L \omega e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$$

donc

$$q(t) = C u_C(t) = -\frac{\omega_0}{2Q} LC e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + LC \omega e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (-A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)).$$

À  $t = 0$

$$q(t=0) = -\frac{\omega_0}{2Q} LC \times 1 \times 10^{-3} \text{ A} + LC \omega B = 1 \times 10^{-6} \text{ C}$$

soit

$$B = \frac{1 \times 10^{-6} \text{ C}}{\omega LC} + \frac{\omega_0}{2Q\omega} \times 1 \times 10^{-3} \text{ A} = \frac{2Q \times 1 \times 10^{-6} \text{ C}}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \omega_0 + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \times 1 \times 10^{-3} \text{ A}.$$

**A.N.**

$$B = \frac{20 \times 1 \times 10^{-6} \text{ C}}{\sqrt{399}} 1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} + \frac{1}{\sqrt{399}} \times 1 \times 10^{-3} \text{ A} = 5 \times 10^{-5} \text{ A}.$$

Finalement

$$i_2(t) = e^{-500 \text{ s}^{-1} \times t} \left( 1 \times 10^{-3} \cos(9987 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \times t) + 5 \times 10^{-5} \times \sin(9987 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \times t) \right)$$

### Exercice II.4. Influence d'un condensateur sur un circuit RL ★ ★

Un générateur de tension continue de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $r$  est branché aux bornes d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance  $R$ .

Pour  $t < 0$  l'interrupteur  $K$  est ouvert ; on suppose qu'à  $t = 0$  le circuit a atteint un régime permanent. On ferme l'interrupteur  $K$  à  $t = 0$  ce qui branche en parallèle sur la bobine un condensateur de capacité  $C$ . L'objet de cet exercice est l'étude de l'intensité  $i(t)$  traversant la bobine pour  $t > 0$ .

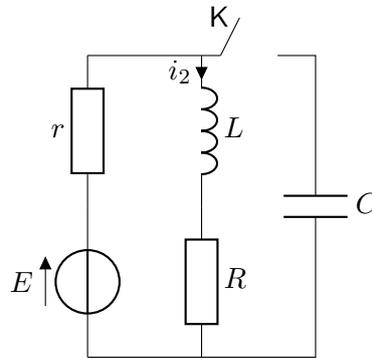


Figure 2.3 – Schéma électrique.

1. Déterminer  $i(0^+)$  et  $\left(\frac{di(t)}{dt}\right)_{t=0}$ .

Avant la fermeture de l'interrupteur l'intensité  $i(t) = i_2(t)$ . Le régime permanent étant atteint  $u_L(t) = 0$ , et d'après la loi des mailles

$$E = u_r(t = 0^-) + u_R(t = 0^-) = ri(t = 0^-) + Ri(t = 0^-)$$

donc

$$i(t = 0^-) = i_2(t = 0^-) = \frac{E}{r + R}.$$

Par continuité de l'intensité dans la bobine à  $t = 0^+$ , il vient que  $i(t = 0^-) = i_2(t = 0^-) = i(t = 0^+) = i_2(t = 0^+) = \frac{E}{r + R}$ .

Avant la fermeture, la tension aux bornes du condensateur est  $u_C(t = 0^-) = 0$ , ainsi dans la maille LRC il vient que

$$u_L(t = 0^-) + u_R(t = 0^-) = u_C(t = 0^-)$$

$$L \frac{di_2(t)}{dt} \Big|_{t=0^-} + Ri_2(t = 0^-) = u_C(t = 0^-)$$

et par continuité de l'intensité dans la bobine et de la tension aux bornes du condensateur, il vient que

$$L \frac{di_2(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} + Ri_2(t = 0^+) = u_C(t = 0^+)$$

$$L \frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} + Ri(t = 0^+) = 0$$

donc

$$\frac{di(t)}{dt} \Big|_{t=0^+} = -\frac{R}{L} \frac{E}{r + R}.$$

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $i_2(t)$ .

On se place  $t \geq 0$  et on étudie la maille RLC série. La loi des mailles donne

$$u_L(t) + u_R(t) = u_C(t)$$

$$L \frac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t) = u_C(t).$$

En dérivant cette relation il vient que

$$L \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + R \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{du_C(t)}{dt}$$

$$L \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + R \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{1}{C} i_3(t)$$

$$LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + RC \frac{di_2(t)}{dt} = i(t) - i_2(t).$$

Pour obtenir  $i(t)$  on étudie la maille avec le générateur,  $r$ , la bobine et  $R$

$$E = ri(t) + L \frac{di_2(t)}{dt} + Ri_2(t)$$

donc

$$i(t) = \frac{E}{r} - \frac{R}{r} i_2(t) - \frac{L}{r} \frac{di_2(t)}{dt}$$

et ainsi

$$LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + RC \frac{di_2(t)}{dt} = \frac{E}{r} - \frac{R}{r} i_2(t) - \frac{L}{r} \frac{di_2(t)}{dt} - i_2(t)$$

$$LC \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + \left( RC + \frac{L}{r} \right) \frac{di_2(t)}{dt} + \left( 1 + \frac{R}{r} \right) i_2(t) = \frac{E}{r}$$

$$\frac{rLC}{r+R} \frac{d^2i_2(t)}{dt^2} + \frac{rRC+L}{r+R} \frac{di_2(t)}{dt} + i_2(t) = \frac{E}{r+R}$$

3. On donne  $L = 43 \text{ mH}$ ,  $R = 9,1 \Omega$ ,  $r = 50 \Omega$  et  $E = 5,0 \text{ V}$ . **Déterminer** les valeurs de  $C$  permettant d'observer un régime pseudopériodique.

Pour déterminer la nature du régime on peut étudier la valeur du facteur de qualité  $Q$ . En identifiant les coefficients de l'équation différentielle et ceux de l'équation canonique, il vient que

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{rLC}{r+R} \quad \text{donc} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{r+R}{rLC}}.$$

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{rRC+L}{r+R}$$

$$\frac{1}{Q} \sqrt{\frac{rLC}{r+R}} = \frac{rRC+L}{r+R} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{Q} = \frac{rRC+L}{r+R} \sqrt{\frac{r+R}{rLC}} \quad \text{donc} \quad Q = \frac{\sqrt{rRLC+r^2LC}}{rRC+L}$$

Ainsi si  $Q > \frac{1}{2}$

$$\frac{\sqrt{rRLC+r^2LC}}{rRC+L} > \frac{1}{2}$$

donc

$$\frac{rRLC+r^2LC}{(rRC+L)^2} > \frac{1}{4}$$

$$rRLC+r^2LC > \frac{1}{4}r^2R^2C^2 + \frac{1}{4}L^2 + \frac{1}{2}rRCL$$

$$-\frac{1}{4}r^2R^2C^2 + \left( \frac{1}{2}rRL+r^2L \right) C - \frac{1}{4}L^2 > 0.$$

On reconnaît une équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta = \frac{1}{4}r^2R^2L^2 + r^4L^2 + r^3RL^2 - \frac{1}{4}r^2R^2L^2 = r^3L^2(r+R) > 0.$$

Les deux racines réelles de l'équation sont

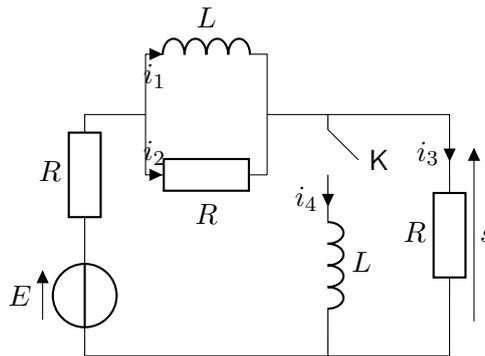
$$C_{\pm} = \frac{-\frac{1}{2}RL - rL \pm \sqrt{rL^2(r+R)}}{-\frac{1}{2}rR^2} = L \frac{R + 2r \mp 2\sqrt{r(r+R)}}{rR^2}.$$

Le coefficient du terme du second ordre étant négatif, les valeurs positives de l'équation sont comprises entre ces deux racines. **A.N.**

$$C_{\pm} = 43 \times 10^{-3} \text{H} \times \frac{9,1\Omega + 2 \times 50\Omega \mp 2\sqrt{50\Omega(50\Omega + 9,1\Omega)}}{50\Omega \times (9,1\Omega)^2} = 3,9 \times 10^{-6} \text{F} \quad ; \quad 2,3 \times 10^{-3} \text{F}.$$

### Exercice II.5. Étude d'un circuit à deux bobines ★ ★

On considère le circuit représenté ci-dessous. Le générateur a une force électromotrice constante  $E$ . L'interrupteur  $K$  est ouvert depuis très longtemps et on le ferme à l'instant  $t = 0$ .



1. **Déterminer** les intensités  $i$ ,  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  à l'instant  $t = 0^-$  puis à l'instant  $t = 0^+$ .
2. Déterminer  $s(\infty)$ ,  $i(\infty)$ ,  $i_1(\infty)$ ,  $i_2(\infty)$ ,  $i_3(\infty)$  et  $i_4(\infty)$ , c'est-à-dire les valeurs lorsqu'un régime permanent est atteint.
3. **Relier**  $s(t)$  à  $i_3(t)$ , puis à  $i_4(t)$ . **En déduire**  $di(t)/dt$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $s(t)$  et  $ds(t)/dt$ .
4. **Relier**  $i(t)$  et  $i_2(t)$ . **En déduire**  $di(t)/dt$  en fonction de  $R$ ,  $L$ ,  $i_2(t)$  et  $di_2(t)/dt$ .
5. **Montrer** que

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{di_2(t)}{dt} + \frac{di_3(t)}{dt} = 0.$$

**En déduire** que

$$i_2(t) = \frac{3L}{R^2} \frac{ds(t)}{dt} + \frac{2}{R} s(t).$$

6. **Trouver** une équation différentielle du second ordre vérifiée par  $s(t)$ .
7. **Déterminer**  $s(t)$ .