

DS 2 : circuits électriques

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en 6 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction $f(x) = e^{\alpha x}$ pour $x \ll 1$: $f(x) \approx 1 + \alpha x$.

1 Équivalence triangle-étoile : théorème de Kennely



Figure 1: Schémas des circuits électriques

On se propose de montrer que les deux circuits présentés sur la Figure 1 sont équivalents.

1. Dans le cas où $i_3 = 0$ pour les deux circuits, déterminer la résistance équivalente du circuit étoile $R_{eq,a}$, et la résistance équivalente du circuit triangle $R'_{eq,a}$. On considérera par la suite que $R_{eq,a} = R'_{eq,a}$.
2. Dans le cas où $i_2 = 0$ pour les deux circuits, déterminer la résistance équivalente du circuit étoile $R_{eq,b}$, et la résistance équivalente du circuit triangle $R'_{eq,b}$. On considérera par la suite que $R_{eq,b} = R'_{eq,b}$.
3. Dans le cas où $i_3 = 0$ pour les deux circuits, déterminer la résistance équivalente du circuit étoile $R_{eq,c}$, et la résistance équivalente du circuit triangle $R'_{eq,c}$. On considérera par la suite que $R_{eq,c} = R'_{eq,c}$.
4. À partir des relations précédentes, exprimer R_1 en fonction de R'_1 , R'_2 et R'_3 .
5. À partir des relations précédentes, exprimer R_2 en fonction de R'_1 , R'_2 et R'_3 .
6. À partir des relations précédentes, exprimer R_3 en fonction de R'_1 , R'_2 et R'_3 .

2 Comparaison de tensions

On considère le circuit représenté Figure 2. On notera I_1 l'intensité du courant traversant le résistor de résistance $R_1 - x$ et I_2 celle du courant traversant le résistor de résistance R_2 .

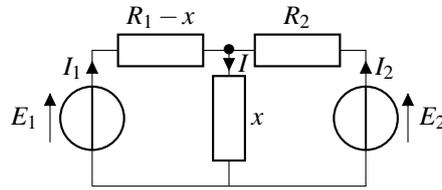


Figure 2: Schéma du circuit électrique.

7. Exprimer I_1 en fonction de I_2 , x , R_1 , R_2 , E_1 et E_2 .
8. Exprimer I_2 en fonction de I_1 , x , R_1 , R_2 , E_1 et E_2 .
9. Exprimer I_1 en fonction de x , R_1 , R_2 , E_1 et E_2 .
10. Exprimer I_2 en fonction de x , R_1 , R_2 , E_1 et E_2 .
11. Exprimer I l'intensité du courant passant dans le résistor de résistance x en fonction de x , R_1 , R_2 , E_1 et E_2 .
12. On règle la valeur de x pour que I_2 soit nulle. Déterminer le rapport E_2/E_1 .
13. Justifier qu'on puisse comparer deux tensions à l'aide de ce dispositif.

3 Étude d'un circuit RL

Adapté du concours concours agronomique et vétérinaire - BCPST (2004)

Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur idéal de tension continue de force électromotrice E . À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K .

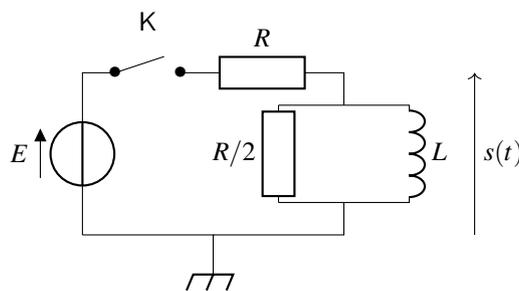


Figure 3: Schéma du circuit électrique

14. Y a-t-il continuité de la tension $s(t)$ en $t = 0$? Y a-t-il continuité du courant dans la résistance R en $t = 0$? Commenter physiquement les réponses. En déduire le comportement de $s(t)$ au voisinage de $t = 0^+$.
15. Déterminer également le comportement asymptotique de $s(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.
16. Utiliser la loi des mailles dans les trois mailles du circuits.
17. À partir de la loi des mailles dans la maille adaptée, exprimer l'intensité du courant dans la branche contenant R en fonction de l'intensité du courant dans la branche contenant L .
18. À partir de la loi des mailles dans la maille adaptée, exprimer l'intensité du courant dans la branche contenant $R/2$ en fonction l'intensité du courant dans la branche contenant L .

19. Utiliser la loi des noeuds pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans la branche contenant L .
20. Exprimer $s(t)$ en fonction du courant dans la branche contenant L .
21. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.
22. En déduire $s(t)$.
23. Tracer l'allure de $s(t)$.
24. Exprimer en fonction de L et R le temps t_0 au bout duquel $s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10}$.
25. En déduire une méthode expérimentale pour déterminer t_0 à l'oscilloscope. On précisera le montage électrique à réaliser et la mesure à effectuer concrètement.
26. On mesure expérimentalement : $t_0 = 3,0\mu\text{s}$. On donne : $R = 1000\Omega$. En déduire L .
27. On remplace le générateur continu par un générateur délivrant un signal périodique en créneaux. Quel doit être l'ordre de grandeur de la fréquence du générateur pour qu'on puisse effectivement mesurer t_0 , en utilisant la méthode indiquée à la question 25, à l'oscilloscope ?

4 Charge d'un condensateur à travers une résistance

Adapté du concours communs polytechniques - TSI (2005)

Un dipôle comporte entre deux bornes A et B une résistance R et un condensateur de capacité C placés en série.

On place aux bornes A et B du dipôle un générateur de tension idéal de force électromotrice constante E et un interrupteur K.

Initialement le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit v_s la tension aux bornes du condensateur.

A l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

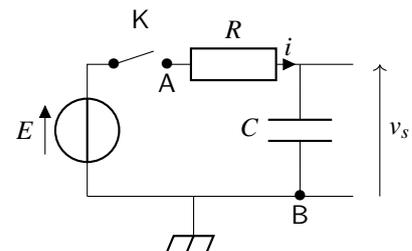


Figure 4: Schéma du circuit électrique

28. Quel est le comportement du condensateur au bout d'un temps très long (infini) après la fermeture de l'interrupteur ? En déduire les valeurs correspondantes de v_s et de l'intensité i dans le circuit au bout d'un temps très long.
29. Exprimer la constante de temps τ du circuit en fonction des paramètres du système.
30. Déterminer son unité à partir d'une analyse dimensionnelle.
31. On se place à $t \geq 0$. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit v_s .
32. Établir l'expression de la tension $v_s(t)$ au cours du temps (pour $t \geq 0$). Trouver à partir de cette expression la valeur de $v_s(t)$ pour un temps très long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu dans la question 28.
33. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v_s(t)$ en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe à $t = 0$. Tracer la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.
34. Déterminer, en fonction de τ , l'expression du temps t_1 à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1% de sa charge finale.
35. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit pour $t \geq 0$. (L'orientation de $i(t)$ est précisée sur le schéma).
36. Exprimer l'énergie \mathcal{E}_C emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de C et de E .

37. Déterminer, à partir des résultats de la partie précédente, l'expression de l'énergie \mathcal{E}_J dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge. On exprimera \mathcal{E}_J en fonction de C et de E .
38. Montrer, à partir des résultats de la partie précédente, que l'énergie \mathcal{E}_g fournie par le générateur au cours de la charge est égale à $\mathcal{E}_g = CE^2$. Vérifier la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur.

5 Potentiel d'action

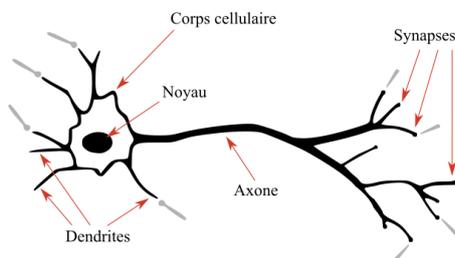
Adapté du concours Banque G2E - BCPST (2019)

Le fond de l'oeil est tapissé par la rétine, membrane très fragile, jaunâtre et transparente. C'est la partie sensible de l'oeil. Cette sensibilité est due à deux sortes de cellules :

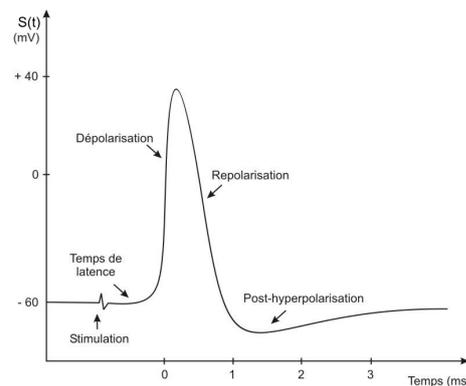
- Les bâtonnets : comme leur nom l'indique, ces cellules ont une forme allongée. Ils sont colorés en rose par le pourpre rétinien qui les rend sensibles à la lumière. Ils ne sont pas sensibles à la couleur et travaillent essentiellement en vision crépusculaire. On compte environ 120 millions de bâtonnets dans la rétine humaine.
- Les cônes : ce sont les seuls à être sensibles à la couleur. Ils participent essentiellement à la vision diurne.

Les cellules de la rétine transforment le signal lumineux en signal électrique, qui se propage ensuite vers le cerveau via les neurones. Comme le montre la Figure 5a, la propagation de l'information a principalement lieu dans l'axone. Elle est transmise aux neurones voisins via les dendrites et synapses.

Lorsque les cônes et bâtonnets sont stimulés, un signal électrique correspond à la différence de potentiel électrique entre l'intérieur et l'extérieur de l'axone, appelé potentiel d'action, se propage dans le nerf optique. Son profil temporel en un point donné de l'axone est donné par la Figure 5b.



(a) Schéma d'un neurone.



(b) Évolution du potentiel d'action $S = V_{int} - V_{ext}$ en fonction du temps lors de la stimulation d'un neurone. La stimulation provoque l'ouverture de canaux à sodium : les parois deviennent fortement perméables au sodium pendant un court instant, ce qui entraîne la polarisation. La diffusion des ions potassium et les pompes sodium-potassium permettent un retour au potentiel d'équilibre (repolarisation).

Figure 5: Schéma d'un neurone et profil temporel du potentiel d'action en un point de l'axone.

On cherche à reproduire ce signal à l'aide du matériel d'électricité disponible au laboratoire. Un circuit qui peut convenir est présenté sur la Figure 6.

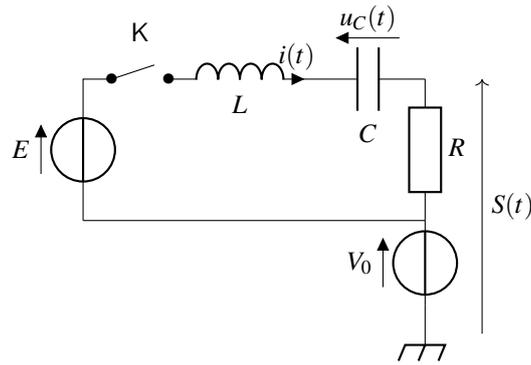


Figure 6: Schéma du circuit électrique

39. À partir de la Figure 5b, lire la valeur de repos S_0 , la valeur maximale S_{max} , la valeur minimale S_{min} de ce signal et sa durée caractéristique τ .
40. On étudie le circuit présenté Figure 6. Pour $t < 0$, l'interrupteur est ouvert, le condensateur est déchargé et le régime est permanent. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur. Pour $t < 0$, quelles sont les valeurs de i , u_C et S ? En déduire la valeur de V_0 à choisir pour que $S(t < 0) = S_0$.
41. Exprimer les valeurs de i , u_C et S à l'instant $t = 0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur.
42. Donner la relation entre $i(t)$, $S(t)$, V_0 et R . Donner la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$.
43. Écrire la loi des mailles et en déduire l'équation du deuxième ordre vérifiée par $S(t)$.
44. Mettre cette équation sous la forme canonique impliquant le facteur de qualité Q . Identifier et exprimer la pulsation ω_0 et Q en fonction de R , L et C .
45. Donner la forme générale de la solution $S(t)$ pour $Q > \frac{1}{2}$.
46. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration est nulle.
47. Écrire la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et en déduire l'expression de $\frac{dS(0^+)}{dt}$. Exprimer alors la deuxième constante d'intégration en fonction de ω , E et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$.

6 Problème ouvert

Dans le circuit électronique présenté Figure 7 on a $U = 6\text{V}$, $C_1 = 3\mu\text{F}$ et $C_2 = 6\mu\text{F}$. L'interrupteur se trouve d'abord dans la position A.

Quelle est la différence de potentiel entre les bornes du condensateur C_2 après que l'interrupteur ait été placé dans la position B ?

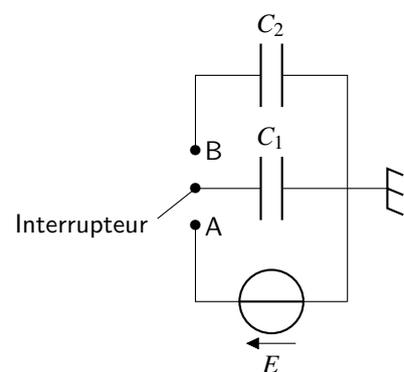


Figure 7: Schéma du circuit électrique.