Travaux dirigés

Chapitre 4 - Propagation d'un signal

TD I. Ondes et signaux

Exercice I.1. Relation entre fréquences et longueurs d'onde ★

1. **Calculer** la longueur d'onde de l'onde électromagnétique qui existe dans un four micro-onde sachant que sa fréquence est $f = 2,45$ GHz et que l'on considère que l'indice de réfraction de l'air dans le four est égal à celui du vide. **Déterminer** si les ondes micro-ondes correspondent à des ondes de longueurs d'onde micrométriques.

   La relation entre la fréquence f, la longueur d'onde dans un milieu λ_n et la célérité c d'une onde électromagnétique (EM) dans un milieu d'indice de réfraction n est

   $$c = \lambda_n f$$

   avec c en m.s^{-1} ; λ en m et f en Hz ou s^{-1}. Il vient donc que

   $$\lambda_n = \frac{c}{f}.$$

   Or on sait que la célérité d'une onde EM dans un milieu d'indice de réfraction n est lié à célérité d'une onde EM dans le vidé c_0 de telle manière que

   $$c = \frac{c_0}{n}.$$

   Si on considère que l'indice de réfraction de l'air est le même que celui du vide, alors

   $$c = c_0$$

   donc

   $$\lambda_n = \frac{c_0}{f}.$$

   A.N.

   $$\lambda = \frac{3 \times 10^8 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}}{2{,}45 \times 10^9 \,\mathrm{s^{-1}}}$$

   $$\lambda = 1,22.10^{-1} \text{ m} = 12{,}2\,\mathrm{cm}.$$

   La longueur d'onde est centimétrique. **Les ondes micro-ondes ne sont pas des ondes de longueurs d'onde micrométriques.**

2. La vitesse du son dans l'air c dépend de la température T selon la formule

   $$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M_{air}}}$$

   avec le rapport des capacités thermiques de l'air $\gamma = 1,4$, la constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ et la masse molaire de l'air $M_{air} = 29 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.

   Montrer que le terme sous la racine de la formule précédente est bien homogène à une vitesse au carré, sachant qu'une énergie peut s'exprimer en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$.

   On mène l'analyse dimensionnelle suivante (en utilisant les unités)

   $$\left[\sqrt{\gamma \frac{RT}{M_{air}}}\right] = \left([\gamma]\,\frac{[R]\,[T]}{[M_{air}]}\right)^{1/2}$$

comme γ est un coefficient sans dimension, il vient que

$$\left[\sqrt{\gamma\frac{RT}{M_{air}}}\right]=\left(\frac{\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{mol}^{-1}\cdot\mathrm{K}}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{mol}^{-1}}\right)^{1/2}$$

$$\left[\sqrt{\gamma\frac{RT}{M_{air}}}\right]=\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}$$

or comme 1 J = 1 kg.m^2.s^{-2}

$$\left[\sqrt{\gamma\frac{RT}{M_{air}}}\right]=\left(\frac{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{kg}}\right)^{1/2}$$

$$\left[\sqrt{\gamma\frac{RT}{M_{air}}}\right]=\left(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)^{1/2}=\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Le terme sous la racine est bien homogène à une vitesse au carré, l'équation proposée est bien homogène.

3. **Calculer** la fréquence d'un son de longueur d'onde $\lambda = 78\,\mathrm{cm}$ lorsque la température vaut $T_1 = 290\,\mathrm{K}$, puis $T_2 = 300\,\mathrm{K}$.
On sait que la célérité d'une onde acoustique c est liée à sa fréquence et sa longueur d'onde de telle manière que

$$c=\lambda f$$

donc

$$f=\frac{c}{\lambda}.$$

Ainsi, comme la célérité d'une onde acoustique dépend de la température, $c(T)$, la fréquence doit également en dépendre $f(T)$ telle que

$$f(T)=\sqrt{\gamma\frac{RT}{M_{air}}}\frac{1}{\lambda}.$$

A.N.

$$f(T)=\sqrt{\gamma\frac{R}{M_{air}}}\frac{1}{\lambda}\sqrt{T}$$

$$f(T)=\sqrt{1,4\frac{8,314}{29.10^{-3}}}\frac{1}{78.10^{-2}}\sqrt{T}$$

$$f(T)=26,3\ \mathrm{s}^{-1}.\mathrm{K}^{-1/2}\sqrt{T}.$$

$$f(T_1)=26,3\times\sqrt{290}=448\mathrm{kHz}.$$

$$f(T_2)=26,3\times\sqrt{300}=456\mathrm{Hz}.$$

Exercice I.2. Cuve à ondes ★

On peut voir sur la Figure 4.1 la surface d'un liquide dans une cuve sur lequel se propage une onde éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est produite par un vibreur perturbant la surface du liquide à la fréquence $f = 18$ Hz. L'image est claire là où la surface du liquide est convexe, foncée là où elle est concave.

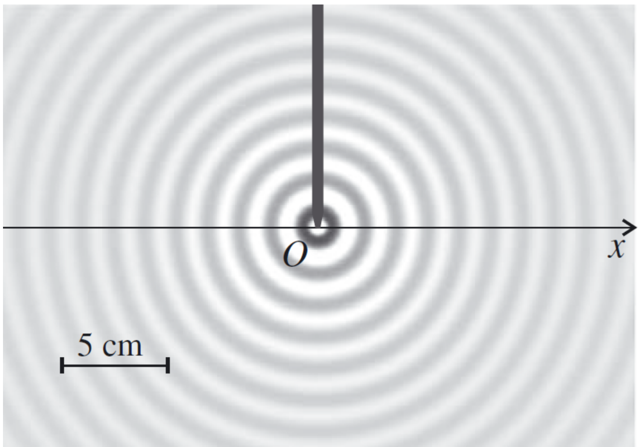

Figure 4.1 – Cuve à ondes.

1. **Déterminer** la longueur d'onde de l'onde de surface se propageant sur le liquide à partir de l'image.
La longueur d'onde sépare deux valeurs identiques du signal. Le signal, ici, est la hauteur du liquide par rapport à sa position d'équilibre. On peut constater que les cercles sombres correspondent à des surfaces d'eau concave (soit un creux, la surface forme une "cave"), donc à des minima d'altitudes de la surface. On voit que deux minima consécutifs, soit deux cercles sombres, sont séparés de 1,5 cm d'après l'échelle fournie. **La longueur d'onde est de 1,5 cm**.
2. **En déduire** la célérité de l'onde.
La célérité de l'onde est
$$c = \lambda f.$$
A.N.
$$c = 1,5.10^{-2}\ \text{m} \times 18\ \text{s}^{-1}$$
$$c = 0,27\ \text{m.s}^{-1}.$$
3. On suppose que l'onde est sinusoïdale, d'amplitude A constante et de phase initiale nulle en O. **Exprimer** le signal $s(x,t)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.
Pour $x > 0$ l'onde se propage vers les $x > 0$ on peut donc exprimer le signal tel que
$$s(x,t) = A\cos\left(2\pi f t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$
Pour $x < 0$ l'onde se propage vers les $x < 0$ on peut donc exprimer le signal tel que
$$s(x,t) = A\cos\left(2\pi f t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$
4. **Justifier** pourquoi A ne peut pas être constant en réalité.
L'amplitude n'est pas constante car l'énergie fournie par le vibreur réparti sur un cercle dont le périmètre augmente au cours de la propagation de l'onde : il y a donc de moins en moins d'énergie pour chaque point du cercle se propageant, donc une amplitude A, une altitude de l'onde par rapport à sa position d'équilibre, de moins en moins important.

Exercice I.3. Modèle de l'onde progressive ★

On considère une onde progressive $s(x,t)$ se propageant à la vitesse c dans un milieu homogène non dispersif.

1. On note $s(x_0,t) = f(t)$ le signal en un point d'abscisse x_0. Le signal se propage vers les x positifs. À un instant t_0 le signal en x_0 $s(x_0,t_0)$ prend la valeur A. À un instant t_1, le signal en un point $x_1 > x_0$ $s(x_1,t_1)$ reprend la valeur A.
   Exprimer l'instant t_0 en fonction de t_1, c, x_1 et x_0.
   L'onde se propage vers les x positifs, elle va donc atteindre à l'instant t_1 le point $x_1 > x_0$ après le point x_0, qu'elle atteint à l'instant t_0. t_1 est donc supérieur à t_0 de telle manière que

$$t_1 = t_0 + \frac{x_1 - x_0}{c}$$

   avec $\frac{x_1-x_0}{c}$ le délai nécessaire à l'onde pour se propager de x_0 à x_1 avec une célérité c. Il vient donc que

$$t_0 = t_1 - \frac{x_1 - x_0}{c}.$$

2. **Déterminer** l'expression du signal $s(x_1,t)$ au point d'abscisse x_1 en fonction du temps.
   On connaît la variation temporelle du signal de l'onde en x_0 noté $s(x_0,t)$, elle est décrit par la fonction f telle que

$$s(x_0,t) = f(t).$$

   On sait qu'à l'instant t_1 et à la position x_1 le signal de l'onde est égal à A et est identique au signal quand elle était en x_0 à l'instant t_0, soit

$$s(x_1,t_1) = s(x_0,t_0)$$

   or on peut décrire le signal en x_0 grâce à la fonction f, soit

$$s(x_1,t_1) = f(t_0)$$

   en exprimant t_0 en fonction de t_1, il vient que

$$s(x_1,t_1) = f(t_1 - \frac{x_1 - x_0}{c}).$$

   Cette relation est valable à n'importe quel instant t, donc

$$s(x_1,t) = f(t - \frac{x_1 - x_0}{c}).$$

   Pour une onde se propageant selon les $x > 0$, la variation temporelle du signal en un point x_1 est égal à la variation temporelle de ce même signal en un point $x_0 < x_1$ mais retardé du délai nécessaire à l'onde pour se propager de x_0 à x_1 avec une célérité c.

3. On considère les mêmes signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$, les mêmes points $x_1 > x_0$, mais le signal se propage cette fois vers les x négatifs. **Reprendre et appliquer** les deux énoncés précédents.
   Lorsque l'onde se propage vers les x négatifs, l'onde arrive en x_0 après être passé en x_1, donc $t_0 > t_1$, soit

$$t_0 = t_1 + \frac{x_1 - x_0}{c}$$

   donc

$$x_1 - x_0 = -c(t_1 - t_0)$$
$$x_0 = x_1 + c(t_1 - t_0).$$

   Comme on l'a vu plus haut on peut exprimer le signal en x_1 et t_1 tel que

$$s(x_1,t_1) = s(x_0,t_0)$$

$$s(x_1,t_1) = g(x_0)$$

$$s(x_1,t_1) = g(x_1 + c(t_1 - t_0)).$$

Cette relation est valable à n'importe quel position x, donc

$$s(x,t_1) = g(x + c(t_1 - t_0)).$$

Pour une onde se propageant selon les $x < 0$, la variation spatial du signal à un instant t_1 est égal à la variation spatial de ce même signal à un instant ultérieur $t_0 > t_1$ mais avancé de la distance parcourue par l'onde entre les instant de t_1 et t_0 avec une célérité c.

4. On note $s(x,t_0) = g(x)$ le signal à un instant t_0. Le signal se propage vers les x positifs. À une position x_0 le signal $s(x_0,t_0)$ prend la valeur A. À une position $x_1 > x_0$, le signal à un instant t_1 $s(x_1,t_1)$ reprend la valeur A.
   Exprimer la position x_0 en fonction de x_1, c, t_1 et t_0.
   L'onde se propage vers les x positifs, elle va donc atteindre à l'instant t_1 le point $x_1 > x_0$ après le point x_0, qu'elle atteint à l'instant t_0. t_1 est donc supérieur à t_0 de telle manière que

$$t_1 = t_0 + \frac{x_1 - x_0}{c}$$

   avec $\frac{x_1 - x_0}{c}$ le délai nécessaire à l'onde pour se propager de x_0 à x_1 avec une célérité c. Il vient donc que

$$x_1 - x_0 = c(t_1 - t_0)$$

$$x_0 = x_1 - c(t_1 - t_0).$$

5. **Déterminer** l'expression du signal $s(x,t_1)$ à l'instant t_1 en fonction de la position.
   On connaît la variation spatial du signal de l'onde à l'instant t_0 noté $s(x,t_0)$, elle est décrit par la fonction g telle que

$$s(x,t_0) = g(x).$$

   On sait qu'à l'instant t_1 et à la position x_1 le signal de l'onde est égal à A et est identique au signal quand elle était en x_0 à l'instant t_0, soit

$$s(x_1,t_1) = s(x_0,t_0)$$

   or on peut décrire le signal à t_0 grâce à la fonction g, soit

$$s(x_1,t_1) = g(x_0)$$

   en exprimant x_0 en fonction de x_1, il vient que

$$s(x_1,t_1) = g(x_1 - c(t_1 - t_0)).$$

   Cette relation est valable à n'importe quel position x, donc

$$s(x,t_1) = g(x - c(t_1 - t_0)).$$

   Pour une onde se propageant selon les $x > 0$, la variation spatial du signal à un instant t_1 est égal à la variation spatial de ce même signal à un instant antérieur $t_0 < t_1$ mais reculé de la distance parcourue par l'onde entre les instant de t_0 et t_1 avec une célérité c.

6. On considère les mêmes signaux $s(x,t_0)$ et $s(x,t_1)$, les mêmes points $x_1 > x_0$, mais le signal se propage cette fois vers les x négatifs. **Reprendre et appliquer** les deux énoncés précédents.
   Lorsque l'onde se propage vers les x négatifs, l'onde arrive en x_0 après être passé en x_1, donc $t_0 > t_1$, soit
   $$t_0 = t_1 + \frac{x_1 - x_0}{c}$$
   donc
   $$x_1 - x_0 = -c(t_1 - t_0)$$
   $$x_0 = x_1 + c(t_1 - t_0).$$
   Comme on l'a vu plus haut on peut exprimer le signal en x_1 et t_1 tel que
   $$s(x_1,t_1) = s(x_0,t_0)$$
   $$s(x_1,t_1) = g(x_0)$$
   $$s(x_1,t_1) = g(x_1 + c(t_1 - t_0)).$$
   Cette relation est valable à n'importe quel position x, donc
   $$s(x,t_1) = g(x + c(t_1 - t_0)).$$
   Pour une onde se propageant selon les $x < 0$, la variation spatial du signal à un instant t_1 est égal à la variation spatial de ce même signal à un instant ultérieur $t_0 > t_1$ mais avancé de la distance parcourue par l'onde entre les instant de t_1 et t_0 avec une célérité c.

Exercice I.4. Modèle de l'onde progressive sinusoïdale ★

On considère une onde progressive sinusoïdale $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ se propageant à la vitesse c dans un milieu homogène non dispersif.

1. **Déterminer** le sens de propagation de l'onde.
2. **Exprimer** k, la pulsation spatiale ou norme du vecteur d'onde, en fonction de la longueur d'onde λ, puis **l'exprimer** en fonction de la fréquence f.
3. **Déterminer** à quelle condition les signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$ sont en phase.
4. **Déterminer** à quelle condition les signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$ sont en opposition de phase.
5. **Déterminer** à quelle condition les signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$ sont en quadrature de phase.

Exercice I.5. Propagation d'un signal périodique ★

Une onde se propage dans le sens positif de (Ox) à la célérité c. En $x = 0$ son signal quelconque est périodique de fréquence f_S et peut être décomposé sous la forme :

$$s(0,t) = g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n).$$

On appelle la composante sinusoïdale de rang $n = 1$ $A_1\cos(2\pi f_S t + \varphi_1)$, **le fondamental**. Il varie à la fréquence f_S, fréquence qu'on appelle **fréquence fondamentale** ou fréquence du fondamental. Les composantes de rang $n > 1$ $A_n\cos(2\pi n f_S t + \varphi_1)$, **les harmoniques de rang** n. Ils oscillent à des fréquences égales à des multiples n de la fréquence fondamentale.

1. **Exprimer** la longueur d'onde λ_S associée au fondamental du signal $f(t)$.
2. **Exprimer** la longueur d'onde λ_n associée à l'harmonique de rang n du signal $f(t)$.
3. **Déterminer** la période spatiale de l'onde.
4. **Montrer** que le signal reçu en un point x quelconque de l'espace s'écrit
   $$s(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A'_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi'_n).$$
5. **Exprimer** A'_n et φ'_n à partir de x, λ_n, A_n et φ_n.

Exercice I.6. Mesure de la célérité du son dans l'air ★

Un émetteur d'ultrasons E produit une onde sinusoïdale de fréquence $f = 42\,\mathrm{kHz}$ mesurée à l'aide de deux récepteurs R_1 et R_2 reliés à un oscilloscope.

Le récepteur R_1 est fixe. Le récepteur R_2 peut être déplacé le long d'une règle graduée parallèle à la direction entre l'émetteur et les récepteurs. On positionne le récepteur R_2 à la même position que le récepteur R_1, soit à $x_i = 26$ cm. Leur signal est identique sur l'oscilloscope.

On recule progressivement R_2 en observant l'écran de l'oscilloscope : les signaux reçus par R_1 et R_2 sont alternativement en phase et en opposition de phase. Quand les signaux sont pour la vingtième fois de suite en phase on note la position finale du récepteur R_2, soit $x_f = 42$ cm.

1. **Déterminer** la valeur de la célérité c de l'onde ultrasonore.

La variation temporelle du signal sinusoïdal émis par l'émetteur E, considéré à la position $x_0 = 0$

$$s(x_0,t) = A\cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x_0\right)$$
$$s(x_0,t) = A\cos(2\pi ft).$$

Comme ce signal se propage vers les $x > 0$, sa variation temporelle à n'importe quelle position x est

$$s(x,t) = A\cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}(x - x_0)\right)$$
$$s(x,t) = A\cos\left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x\right).$$

Les récepteurs R_1 et R_2 mesurent ce signal. Les signaux respectifs mesurés sont noté $s(x_1,t)$ et $s(x_2,t)$, avec x_1 la position de R_1 et x_2 la position de R_2. Lorsque $x_i = x_1 = x_2 = 26$ cm la différence de phase $\Delta\varphi$ entre $s(x_1,t)$ et $s(x_2,t)$ est

$$\Delta\varphi = 2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x_1 - \left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x_2\right)$$
$$\Delta\varphi = 0 = m2\pi$$

avec $m = 0$. On dit que les signaux sont en phase. Ainsi quand on déplace R_2 à une position $x_2 = x_f$ après avoir obtenu pour la vingtième fois de suite des signaux en phase, cela veut dire que pour cette valeur de x_2, le déphasage est $\Delta\varphi = 20 \times 2\pi$ (après avoir déplacé R_2 à une position x_2 différente de x_1 on a observé que les signaux étaient en phase une première fois pour $m = 1$, une deuxième fois pour $m = 2$, etc. et une vingtième fois pour $m = 20$). Ainsi, si on exprime le déphase entre R_2 en $x_2 = x_f$ et R_1 en $x_1 = x_i$, il vient que

$$\Delta\varphi = 20 \times 2\pi = 2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x_i - \left(2\pi ft - \frac{2\pi}{\lambda}x_f\right)$$
$$\Delta\varphi = 20 \times 2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_f - x_i).$$

Ainsi

$$\lambda = \frac{x_f - x_i}{20}.$$

A.N.

$$\lambda = \frac{42.10^{-2} - 26.10^{-2}}{20} = 8{,}0.10^{3}\ \text{m}.$$

On peut alors calculer la célérité de l'onde $c = \lambda f$, soit **A.N.**

$$c = 8{,}0.10^{-3} \times 42.10^{3} = 336{,}0\ \text{m.s}^{-1}.$$

2. La règle est graduée en millimètre, **déterminer** la demi-étendue a délimitant l'intervalle dans lequel se trouve le résultat de la mesure de x_f, puis l'incertitude-type $u(x_f)$ sur x_f. **En déduire** l'incertitude $u(c)$ sur c.
   La demi-étendue est égale à la moitié de la précision de l'instrument soit ici $a = 0,5$ mm. L'incertitude type est donc
   $$u(x_f) = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$
   A.N.
   $$u(x_f) = \frac{0,5.10^{-3}}{\sqrt{3}} = 3.10^{-4} \text{ m}.$$
   L'incertitude type sur la célérité c est obtenu à partir de l'expression de c à partir de x_f
   $$c = \lambda f = \frac{x_f - x_i}{20} f.$$
   D'après la formule de propagation des incertitudes, on peut obtenir l'incertitude $u(X)$ sur une grandeur X, à partir de l'incertitude $u(Y)$ sur une grandeur Y si la relation qui les lie est de la forme
   $$X = aY.$$
   Dans ce cas
   $$u(X) = X\frac{u(Y)}{Y}.$$
   Ainsi dans notre cas
   $$u(c) = c\frac{u(x_f)}{x_f}.$$
   A.N.
   $$u(c) = 336\frac{3.10^{-4}}{42.10^{-2}} = 0,2 \text{ m.s}^{-1}.$$
   Ainsi la mesure de la célérité du son c est $c = (336,0 \pm 0,2)$ m.s^{-1}.

Exercice I.7. Produit de fonctions sinusoïdales ★ ★

On considère le signal $s(t) = A\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_1 t + \varphi)$ où A et φ sont des constantes.

1. À l'aide de formules trigonométriques, **déterminer** les n composantes de $s(t)$ ainsi que leur fréquence f_n et leur phase à l'origine φ_{0n}.
2. **Faire de même** pour le signal $s(t) = A\sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_1 t + \varphi)$.

Exercice I.8. Ondes émises par un mobile oscillant ★ ★

Une corde très longue, orientée selon un axe (Ox), est attachée au niveau de son extrémité en O à un ressort qui peut se déplacer selon l'axe (Oy) perpendiculaire à l'axe (Ox). L'autre extrémité se situe vers $x \to +\infty$ Le ressort est mis en mouvement à partir de l'instant $t = 0$ selon l'équation horaire

$$Y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$$

avec $Y_0 = 1$ cm et $\omega = 2\pi$ rad.s^{-1}.

La corde suit le déplacement vertical $Y(t)$ du ressort à partir de l'instant $t = 0$.

1. **Décrire** la nature de l'onde sur la corde pour $t > 0$.
   Il s'agit d'une onde progressive sinusoïdale.

2. L'onde se propage avec une célérité $c = 1$ m.s^{-1} sur la corde. À l'instant $t = 10$ s, **déterminer** les points de la corde atteints par l'onde.
L'onde se propage à la célérité c, elle parcourt donc une distance ct pendant entre l'instant initial $t = 0$ s et l'instant $t = 10$ s. Ainsi les points de la corde atteints par l'onde sont ceux dont la position x est telle que $x < ct$. **A.N.**
$$x < 1\text{m.s}^{-1} \times 10 = 10\,\text{m}.$$

3. En distinguant deux cas, donner l'expression littérale de $y(x,t)$ la position selon la verticale d'un point quelconque de la corde situé à l'abscisse x.
On doit distinguer les points de la corde atteint par l'onde $x < 10$ m et les points de la corde non encore atteint par l'onde $x \geq 10$.
Pour les points atteints par l'onde, la position verticale des points de la corde est donné par le mouvement du ressort mais retardé du délai x/c, soit
$$y(x,t) = Y_0 \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right).$$
Pour les points non encore atteints par l'onde, la position verticale est nulle
$$y(x,t) = 0.$$

4. **Dessiner** l'allure de la corde à l'instant $t = 10$ s, puis la variation de position selon la verticale du point de la corde d'abscisse $x = 10$ m au cours du temps.
L'allure de la corde est dessiné sur la Figure 4.2

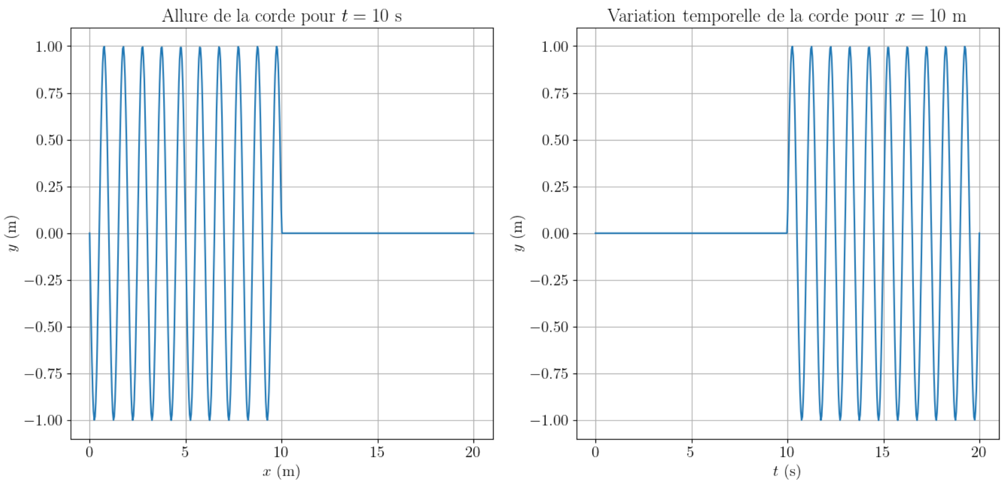

Figure 4.2

5. Le mouvement du ressort est cette fois décrit par cette équation horaire : $Y(t) = Y_0 e^{-t/\tau} \sin(\omega t)$ avec $\tau = 5$ s. **Reprendre** les quatre derniers énoncés dans ce cas.
Dans ce cas, il s'agit d'une onde progressive sinusoïdale amorti (pour $t \longrightarrow \infty$ $e^{-t/\tau} \longrightarrow 0$).

La célérité de l'onde est la même, donc les deux types de points sont également les mêmes.
Pour les points atteints par l'onde, la position verticale des points de la corde est donné par le mouvement du ressort mais retardé du délai x/c, soit
$$y(x,t) = Y_0 e^{-(t-x/c)/\tau} \sin\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right).$$

Pour les points non encore atteints par l'onde, la position verticale est nulle

$$y(x,t) = 0.$$

L'allure de la corde est dessiné sur la Figure 4.3

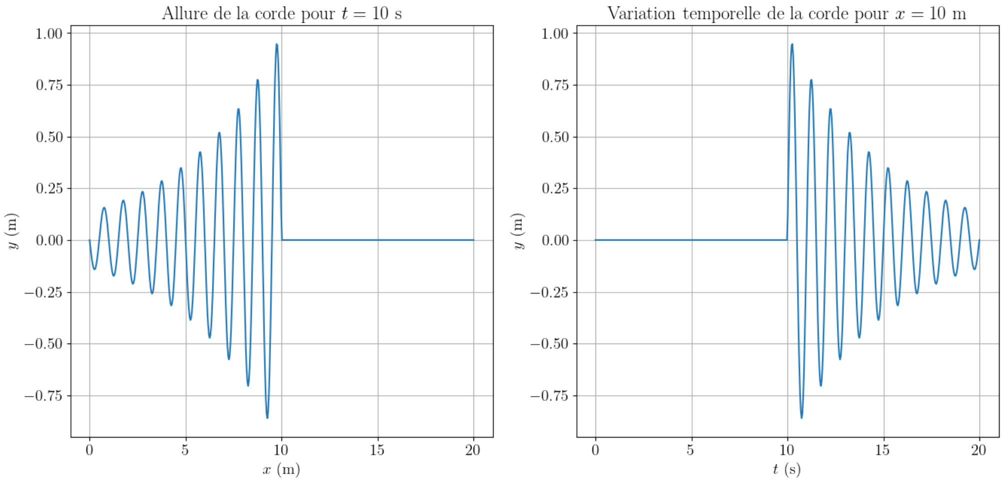

Figure 4.3

Exercice I.9. Trains d'ondes ★ ★

Une onde se propage dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif avec la célérité c. La source, située en $x = 0$, émet un train d'onde de durée τ de telle manière que

$$s(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t < \tau. \end{cases}$$

1. **Exprimer** $s(x,t)$ pour une position x positive quelconque.
2. **Représenter** $s(x,t)$ pour une position x positive quelconque et une valeur de $\tau = 4T$.
3. **Représenter** $s(x,\tau/2)$ et $s(x,3\tau/2)$ en fonction de x pour $x > 0$ et une valeur de $\tau = 4T$.
4. **Détermine** la longueur L du train d'ondes.

Exercice I.10. Effet Doppler ★ ★ ★

Une onde sinusoïdale de fréquence f se propage dans la direction de (Ox) dans le sens des x positifs avec la célérité c. Un observateur se déplace avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u_x}$ avec $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire de l'axe (Ox) orienté vers les x positifs.

1. **Exprimer** le signal $s(x,t)$ de l'onde en définissant les notations nécessaires.
2. Pour l'observateur en mouvement, le point d'abscisse x est repéré par une abscisse le long d'un axe (Ox') qui lui est lié telle que $x' = x - vt$. **Exprimer** $s(x',t)$.
3. **En déduire** l'expression de la fréquence f' pour l'observateur en mouvement. **Comparer** f' et f suivant le signe de v.
4. Vous marchez dans la rue et un camion de pompier, sirène en marche, arrive de derrière et vous dépasse. **Décrire** ce que vous entendez et**déterminer** en ordre de grandeur la différence de fréquences Δf entre l'instant où le camion est derrière vous et l'instant où il est devant vous.