Travaux dirigés

Chapitre 4 - Propagation d'un signal

TD I. Ondes et signaux

Exercice I.1. Relation entre fréquences et longueurs d'onde ★

1. **Calculer** la longueur d'onde de l'onde électromagnétique qui existe dans un four micro-onde sachant que sa fréquence est $f = 2,45$ GHz et que l'on considère que l'indice de réfraction de l'air dans le four est égal à celui du vide. **Déterminer** si les ondes micro-ondes correspondent à des ondes de longueurs d'onde micrométriques.
2. La vitesse du son dans l'air c dépend de la température T selon la formule

$$c = \sqrt{\gamma \frac{RT}{M_{air}}}$$

avec le rapport des capacités thermiques de l'air $\gamma = 1,4$, la constante des gaz parfaits $R = 8{,}314\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$ et la masse molaire de l'air $M_{air} = 29 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg \cdot mol^{-1}}$.
Montrer que le terme sous la racine de la formule précédente est bien homogène à une vitesse au carré, sachant qu'une énergie peut s'exprimer en $\mathrm{kg \cdot m^2 \cdot s^{-2}}$.
3. **Calculer** la fréquence d'un son de longueur d'onde $\lambda = 78\,\mathrm{cm}$ lorsque la température vaut $T_1 = 290\,\mathrm{K}$, puis $T_2 = 300\,\mathrm{K}$.

Exercice I.2. Cuve à ondes ★

On peut voir sur la Figure 4.1 la surface d'un liquide dans une cuve sur lequel se propage une onde éclairée en éclairage stroboscopique. L'onde est produite par un vibreur perturbant la surface du liquide à la fréquence $f = 18$ Hz. L'image est claire là où la surface du liquide est convexe, foncée là où elle est concave.

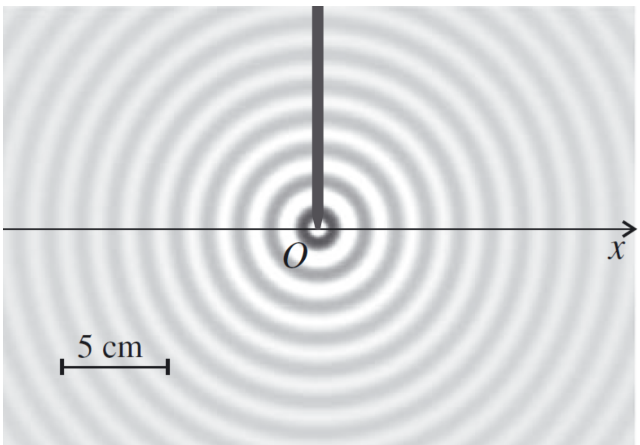

Figure 4.1 – Cuve à ondes.

1. **Déterminer** la longueur d'onde de l'onde de surface se propageant sur le liquide à partir de l'image.
2. **En déduire** la célérité de l'onde.
3. On suppose que l'onde est sinusoïdale, d'amplitude A constante et de phase initiale nulle en O. **Exprimer** le signal $s(x,t)$ pour $x > 0$ et pour $x < 0$.
4. **Justifier** pourquoi A ne peut pas être constant en réalité.

Exercice I.3. Modèle de l'onde progressive ★

On considère une onde progressive $s(x,t)$ se propageant à la vitesse c dans un milieu homogène non dispersif.

1. On note $s(x_0,t) = f(t)$ le signal en un point d'abscisse x_0. Le signal se propage vers les x positifs. À un instant t_0 le signal en x_0 $s(x_0,t_0)$ prend la valeur A. À un instant t_1, le signal en un point $x_1 > x_0$ $s(x_1,t_1)$ reprend la valeur A.
   Exprimer l'instant t_0 en fonction de t_1, c, x_1 et x_0.
2. **Déterminer** l'expression du signal $s(x_1,t)$ au point d'abscisse x_1 en fonction du temps.
3. On considère les mêmes signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$, les mêmes points $x_1 > x_0$, mais le signal se propage cette fois vers les x négatifs. **Reprendre et appliquer** les deux énoncés précédents.
4. On note $s(x,t_0) = g(x)$ le signal à un instant t_0. Le signal se propage vers les x positifs. À une position x_0 le signal $s(x_0,t_0)$ prend la valeur A. À une position $x_1 > x_0$, le signal à un instant t_1 $s(x_1,t_1)$ reprend la valeur A.
   Exprimer la position x_0 en fonction de x_1, c, t_1 et t_0.
5. **Déterminer** l'expression du signal $s(x,t_1)$ à l'instant t_1 en fonction de la position.
6. On considère les mêmes signaux $s(x,t_0)$ et $s(x,t_1)$, les mêmes points $x_1 > x_0$, mais le signal se propage cette fois vers les x négatifs. **Reprendre et appliquer** les deux énoncés précédents.

Exercice I.4. Modèle de l'onde progressive sinusoïdale ★

On considère une onde progressive sinusoïdale $s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$ se propageant à la vitesse c dans un milieu homogène non dispersif.

1. **Déterminer** le sens de propagation de l'onde.
2. **Exprimer** k, la pulsation spatiale ou norme du vecteur d'onde, en fonction de la longueur d'onde λ, puis **l'exprimer** en fonction de la fréquence f.
3. **Déterminer** à quelle condition les signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$ sont en phase.
4. **Déterminer** à quelle condition les signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$ sont en opposition de phase.
5. **Déterminer** à quelle condition les signaux $s(x_0,t)$ et $s(x_1,t)$ sont en quadrature de phase.

Exercice I.5. Propagation d'un signal périodique ★

Une onde se propage dans le sens positif de (Ox) à la célérité c. En $x = 0$ son signal quelconque est périodique de fréquence f_S et peut être décomposé sous la forme :

$$s(0,t) = g(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n).$$

On appelle la composante sinusoïdale de rang $n = 1$ $A_1\cos(2\pi f_S t + \varphi_1)$, **le fondamental**. Il varie à la fréquence f_S, fréquence qu'on appelle **fréquence fondamentale** ou fréquence du fondamental. Les composantes de rang $n > 1$ $A_n\cos(2\pi n f_S t + \varphi_1)$, **les harmoniques de rang** n. Ils oscillent à des fréquences égales à des multiples n de la fréquence fondamentale.

1. **Exprimer** la longueur d'onde λ_S associée au fondamental du signal $f(t)$.
2. **Exprimer** la longueur d'onde λ_n associée à l'harmonique de rang n du signal $f(t)$.
3. **Déterminer** la période spatiale de l'onde.
4. **Montrer** que le signal reçu en un point x quelconque de l'espace s'écrit

$$s(x,t) = \sum_{n=1}^{+\infty} A'_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi'_n).$$

5. **Exprimer** A'_n et φ'_n à partir de x, λ_n, A_n et φ_n.

Exercice I.6. Mesure de la célérité du son dans l'air ★

Un émetteur d'ultrasons E produit une onde sinusoïdale de fréquence $f = 42\,\mathrm{kHz}$ mesurée à l'aide de deux récepteurs R_1 et R_2 reliés à un oscilloscope.

Le récepteur R_1 est fixe. Le récepteur R_2 peut être déplacé le long d'une règle graduée parallèle à la direction entre l'émetteur et les récepteurs. On positionne le récepteur R_2 à la même position que le récepteur R_1, soit à $x_i = 26$ cm. Leur signal est identique sur l'oscilloscope.

On recule progressivement R_2 en observant l'écran de l'oscilloscope : les signaux reçus par R_1 et R_2 sont alternativement en phase et en opposition de phase. Quand les signaux sont pour la vingtième fois de suite en phase on note la position finale du récepteur R_2, soit $x_f = 42$ cm.

1. **Déterminer** la valeur de la célérité c de l'onde ultrasonore.
2. La règle est graduée en millimètre, **déterminer** la demi-étendue a délimitant l'intervalle dans lequel se trouve le résultat de la mesure de x_f, puis l'incertitude-type $u(x_f)$ sur x_f. **En déduire** l'incertitude $u(c)$ sur c.

Exercice I.7. Produit de fonctions sinusoïdales ★ ★

On considère le signal $s(t) = A\cos(2\pi f_1 t)\cos(2\pi f_1 t + \varphi)$ où A et φ sont des constantes.

1. À l'aide de formules trigonométriques, **déterminer** les n composantes de $s(t)$ ainsi que leur fréquence f_n et leur phase à l'origine φ_{0n}.
2. **Faire de même** pour le signal $s(t) = A\sin(2\pi f_1 t)\sin(2\pi f_1 t + \varphi)$.

Exercice I.8. Ondes émises par un mobile oscillant ★ ★

Une corde très longue, orientée selon un axe (Ox), est attachée au niveau de son extrémité en O à un ressort qui peut se déplacer selon l'axe (Oy) perpendiculaire à l'axe (Ox). L'autre extrémité se situe vers $x \to +\infty$ Le ressort est mis en mouvement à partir de l'instant $t = 0$ selon l'équation horaire

$$Y(t) = Y_0 \sin(\omega t)$$

avec $Y_0 = 1$ cm et $\omega = 2\pi$ rad.s^{-1}.

La corde suit le déplacement vertical $Y(t)$ du ressort à partir de l'instant $t = 0$.

1. **Décrire** la nature de l'onde sur la corde pour $t > 0$.
2. L'onde se propage avec une célérité $c = 1$ m.s^{-1} sur la corde. À l'instant $t = 10$ s, **déterminer** les points de la corde atteints par l'onde.
3. En distinguant deux cas, donner l'expression littérale de $y(x,t)$ la position selon la verticale d'un point quelconque de la corde situé à l'abscisse x.
4. **Dessiner** l'allure de la corde à l'instant $t = 10$ s, puis la variation de position selon la verticale du point de la corde d'abscisse $x = 10$ m au cours du temps.
5. Le mouvement du ressort est cette fois décrit par cette équation horaire : $Y(t) = Y_0 e^{-t/\tau}\sin(\omega t)$ avec $\tau = 5$ s. **Reprendre** les quatre derniers énoncés dans ce cas.

Exercice I.9. Trains d'ondes ★ ★

Une onde se propage dans la direction de l'axe (Ox), dans le sens positif avec la célérité c. La source, située en $x = 0$, émet un train d'onde de durée τ de telle manière que

$$s(0,t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right) & \text{si } t < 0 \\ 0 & \text{si } t < \tau. \end{cases}$$

1. **Exprimer** $s(x,t)$ pour une position x positive quelconque.
2. **Représenter** $s(x,t)$ pour une position x positive quelconque et une valeur de $\tau = 4T$.
3. **Représenter** $s(x,\tau/2)$ et $s(x,3\tau/2)$ en fonction de x pour $x > 0$ et une valeur de $\tau = 4T$.
4. **Détermine** la longueur L du train d'ondes.

Exercice I.10. Effet Doppler ★ ★ ★

Une onde sinusoïdale de fréquence f se propage dans la direction de (Ox) dans le sens des x positifs avec la célérité c. Un observateur se déplace avec une vitesse $\vec{v} = v\vec{u_x}$ avec $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire de l'axe (Ox) orienté vers les x positifs.

1. **Exprimer** le signal $s(x,t)$ de l'onde en définissant les notations nécessaires.
2. Pour l'observateur en mouvement, le point d'abscisse x est repéré par une abscisse le long d'un axe (Ox') qui lui est lié telle que $x' = x - vt$. **Exprimer** $s(x',t)$.
3. **En déduire** l'expression de la fréquence f' pour l'observateur en mouvement. **Comparer** f' et f suivant le signe de v.
4. Vous marchez dans la rue et un camion de pompier, sirène en marche, arrive de derrière et vous dépasse. **Décrire** ce que vous entendez et**déterminer** en ordre de grandeur la différence de fréquences Δf entre l'instant où le camion est derrière vous et l'instant où il est devant vous.