# DS 2 : circuits électriques

**Durée : 3h**

## Indications

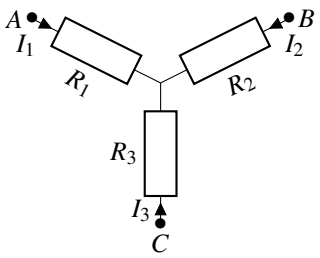
- Le sujet est divisé en 6 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

## Données

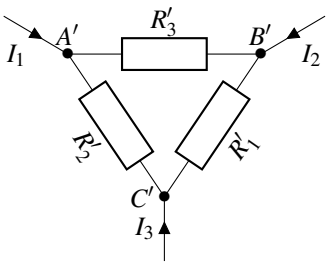
- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction $f(x) = e^{\alpha x}$ pour $x \ll 1$ : $f(x) \approx 1 + \alpha x$.

---

## 1 Équivalence triangle-étoile : théorème de Kennely




(a) Circuit étoile.




(b) Circuit triangle.

Figure 1: Schémas des circuits électriques

On se propose de montrer que les deux circuits présentés sur la Figure 1 sont équivalents.

1. Dans le cas où $i_1 = 0$ pour les deux circuits, déterminer la résistance équivalente du circuit étoile $R_{eq,a}$, et la résistance équivalente du circuit triangle $R'_{eq,a}$. On considérera par la suite que $R_{eq,a} = R'_{eq,a}$.

   Dans le circuit étoile, lorsque $i_1 = 0$, le circuit se réduit à deux résistors de résistance $R_2$ et $R_3$ branchés en série. La résistance équivalent

   $$\boxed{R_{eq,a} = R_2 + R_3.}$$

   Dans le circuit triangle, lorsque $i_1 = 0$, on constate que les résistors de résistances $R'_2$ et $R'_3$ sont branchés en série et forme une résistance équivalente $R'_2 + R'_3$ branchée en parallèle au résistor de résistance $R'_1$. La résistance du circuit est donc

   $$R'_{eq,a} = \frac{1}{\frac{1}{R'_1} + \frac{1}{R'_2 + R'_3}}$$

$$\boxed{R'_{eq,a} = \frac{R'_1(R'_2+R'_3)}{R'_1+R'_2+R'_3}.}$$

2. Dans le cas où $i_2 = 0$ pour les deux circuits, déterminer la résistance équivalente du circuit étoile $R_{eq,b}$, et la résistance équivalente du circuit triangle $R'_{eq,b}$. On considérera par la suite que $R_{eq,b} = R'_{eq,b}$.

   Dans le circuit étoile, lorsque $i_2 = 0$, le circuit se réduit à deux résistors de résistance $R_1$ et $R_3$ branchés en série. La résistance équivalent

$$\boxed{R_{eq,b} = R_1 + R_3.}$$

   Dans le circuit triangle, lorsque $i_2 = 0$, on constate que les résistors de résistances $R'_1$ et $R'_3$ sont branchés en série et forme une résistance équivalente $R'_1 + R'_3$ branchée en parallèle au résistor de résistance $R'_2$. La résistance du circuit est donc

$$R'_{eq,b} = \frac{1}{\frac{1}{R'_2} + \frac{1}{R'_1+R'_3}}$$

$$\boxed{R'_{eq,b} = \frac{R'_2(R'_1+R'_3)}{R'_1+R'_2+R'_3}.}$$

3. Dans le cas où $i_3 = 0$ pour les deux circuits, déterminer la résistance équivalente du circuit étoile $R_{eq,c}$, et la résistance équivalente du circuit triangle $R'_{eq,c}$. On considérera par la suite que $R_{eq,c} = R'_{eq,c}$.

   Dans le circuit étoile, lorsque $i_3 = 0$, le circuit se réduit à deux résistors de résistance $R_1$ et $R_2$ branchés en série. La résistance équivalent

$$\boxed{R_{eq,c} = R_1 + R_2.}$$

   Dans le circuit triangle, lorsque $i_3 = 0$, on constate que les résistors de résistances $R'_1$ et $R'_2$ sont branchés en série et forme une résistance équivalente $R'_1 + R'_2$ branchée en parallèle au résistor de résistance $R'_3$. La résistance du circuit est donc

$$R'_{eq,c} = \frac{1}{\frac{1}{R'_3} + \frac{1}{R'_1+R'_2}}$$

$$\boxed{R'_{eq,c} = \frac{R'_3(R'_1+R'_2)}{R'_1+R'_2+R'_3}.}$$

4. À partir des relations précédentes, exprimer $R_1$ en fonction de $R'_1$, $R'_2$ et $R'_3$.

   La résistance $R_1$ est impliquée dans deux relations : $R_{eq,b}$ et $R_{eq,c}$ telles que

$$R_{eq,b} = R_1 + R_3 \qquad \text{et} \qquad R_{eq,c} = R_1 + R_2.$$

   En additionnant les deux relation il vient que

$$2R_1 + R_2 + R_3 = R_{eq,b} + R_{eq,c}.$$

   Or on sait que $R_{eq,a} = R_2 + R_3$ donc on peut écrie

$$2R_1 + R_{eq,a} = R_{eq,b} + R_{eq,c}$$

   soit

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(-R_{eq,a} + R_{eq,b} + R_{eq,c}\right).$$

On utilise les relations entre les résistances équivalentes données dans l'énoncé : $R_{eq,a} = R'_{eq,a}$, $R_{eq,b} = R'_{eq,b}$ et $R_{eq,c} = R'_{eq,c}$. Ce qui donne

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(-R_{eq,a'} + R_{eq,b'} + R_{eq,c'}\right).$$

En exprimant les résistances équivalente on obtient alos

$$R_1 = \frac{1}{2}\left(-\frac{R'_1(R'_2+R'_3)}{R'_1+R'_2+R'_3} + \frac{R'_2(R'_1+R'_3)}{R'_1+R'_2+R'_3} + \frac{R'_3(R'_1+R'_2)}{R'_1+R'_2+R'_3}\right)$$

soit

$$R_1 = \frac{1}{2}\frac{-R'_1R'_2 - R'_1R'_3 + R'_1R'_2 + R'_2R'_3 + R'1R'_3 + R'_2R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}$$

$$R_1 = \frac{1}{2}\frac{2R'_2R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}$$

$$\boxed{R_1 = \frac{R'_2R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}.}$$

5. À partir des relations précédentes, exprimer $R_2$ en fonction de $R'_1$, $R'_2$ et $R'_3$.
On peut utiliser la même méthode que précédemment ou utiliser la relation

$$R_{eq,c} = R_1 + R_2$$

soit, comme $R_{eq,c} = R'_{eq,c}$

$$R_2 = R'_{eq,c} - R_1.$$

En exprimant $R'_{eq,c}$, et $R_1$ à partir de la relation obtenue à la question précédente

$$R_2 = \frac{R'_3(R'_1+R'_2)}{R'_1+R'_2+R'_3} - \frac{R'_2R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}$$

$$R_2 = \frac{R'_1R'_3 + R'_2R'_3 - R'_2R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}$$

$$\boxed{R_2 = \frac{R'_1R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}.}$$

6. À partir des relations précédentes, exprimer $R_3$ en fonction de $R'_1$, $R'_2$ et $R'_3$.
On peut utiliser la même méthode que précédemment

$$R_{eq,a} = R_2 + R_3$$

soit, comme $R_{eq,a} = R'_{eq,a}$

$$R_3 = R'_{eq,a} - R_2.$$

En exprimant $R'_{eq,a}$, et $R_2$ à partir de la relation obtenue à la question précédente

$$R_3 = \frac{R'_1(R'_2+R'_3)}{R'_1+R'_2+R'_3} - \frac{R'_1R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}$$

$$R_3 = \frac{R'_1R'_1 + R'_1R'_3 - R'_1R'_3}{R'_1+R'_2+R'_3}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R'_1R'_2}{R'_1+R'_2+R'_3}.}$$

## 2 Comparaison de tensions

On considère le circuit représenté Figure 2. On notera $I_1$ l'intensité du courant traversant le résistor de résistance $R_1 - x$ et $I_2$ celle du courant traversant le résistor de résistance $R_2$.

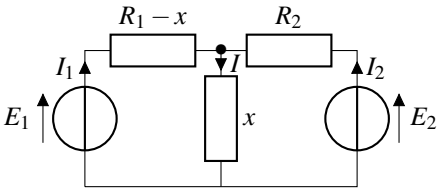



Figure 2: Schéma du circuit électrique.

7. Exprimer $I_1$ en fonction de $I_2$, $x$, $R_1$, $R_2$, $E_1$ et $E_2$.

   Dans la grande maille du circuit, celle qui ne contient pas le résistor de résistance $x$, la loi des mailles donne

$$E_1 - (R_1 - x)I_1 + R_2 I_2 - E_2 = 0.$$

   On peut ainsi isoler $I_1$

$$(R_1 - x)I_1 = E_1 - E_2 + R_2 I_2$$

$$\boxed{I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} + \frac{R_2}{R_1 - x} I_2.}$$

8. Exprimer $I_2$ en fonction de $I_1$, $x$, $R_1$, $R_2$, $E_1$ et $E_2$.

   Grâce à la relation précédente on peut exprimer $I_2$ en l'isolant

$$\frac{R_2}{R_1 - x} I_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 - x} + I_1$$

$$I_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_1 - x} \frac{R_1 - x}{R_2} + \frac{R_1 - x}{R_2} I_1$$

$$\boxed{I_2 = \frac{E_2 - E_1}{R_2} + \frac{R_1 - x}{R_2} I_1.}$$

9. Exprimer $I_1$ en fonction de $x$, $R_1$, $R_2$, $E_1$ et $E_2$.

   Dans l'expression de $I_1$ il faut remplacer $I_2$ par une autre relation.

   Utilisons la loi des mailles sur la maille de gauche du circuit

$$E_1 - (R_1 - x)I_1 - xI = 0.$$

   D'après la loi des nœuds

$$I = I_1 + I_2$$

   donc

$$E_1 - (R_1 - x)I_1 - xI_1 - xI_2 = 0$$

$$E_1 - R_1 I_1 + xI_1 - xI_1 - xI_2 = 0$$

$$xI_2 = E_1 - R_1 I_1$$

$$I_2 = \frac{E_1}{x} - \frac{R_1}{x} I_1.$$

On peut introduire cette expression de $I_2$ dans celle de $I_1$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} + \frac{R_2}{R_1 - x} I_2$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} + \frac{R_2}{R_1 - x}\left(\frac{E_1}{x} - \frac{R_1}{x} I_1\right)$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} + \frac{R_2 E_1}{x(R_1 - x)} - \frac{R_1 R_2}{x(R_1 - x)} I_1$$

$$I_1 \left(1 + \frac{R_1 R_2}{x(R_1 - x)}\right) = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} + \frac{R_2 E_1}{x(R_1 - x)}$$

$$I_1 \frac{-x^2 + xR_1 + R_1 R_2}{x(R_1 - x)} = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} + \frac{R_2 E_1}{x(R_1 - x)}$$

$$I_1 = \frac{E_1 - E_2}{R_1 - x} \frac{x(R_1 - x)}{-x^2 + xR_1 + R_1 R_2} + \frac{R_2 E_1}{x(R_1 - x)} \frac{x(R_1 - x)}{-x^2 + xR_1 + R_1 R_2}$$

$$I_1 = \frac{x(E_1 - E_2)}{-x^2 + xR_1 + R_1 R_2} + \frac{R_2 E_1}{-x^2 + xR_1 + R_1 R_2}$$

$$I_1 = \frac{xE_1 - xE_2 + R_2 E_1}{-x^2 + xR_1 + R_1 R_2}$$

$$\boxed{I_1 = \frac{xE_2 - E_1(x + R_2)}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2}.}$$

10. Exprimer $I_2$ en fonction de $x$, $R_1$, $R_2$, $E_1$ et $E_2$.

D'après la réponse précédente

$$I_2 = \frac{E_1}{x} - \frac{R_1}{x} I_1$$

soit

$$I_2 = \frac{E_1}{x} - \frac{R_1}{x} \frac{xE_2 - E_1(x + R_2)}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2}$$

$$I_2 = \frac{E_1\left(x^2 - xR_1 - R_1 R_2\right)}{x\left(x^2 - xR_1 - R_1 R_2\right)} - \frac{xR_1 E_2 - xR_1 E_1 - R_1 R_2 E_1}{x\left(x^2 - xR_1 - R_1 R_2\right)}$$

$$I_2 = \frac{x^2 E_1 - xR_1 E_1 - R_1 R_2 E_1 - xR_1 E_2 + xR_1 E_1 + R_1 R_2 E_1}{x\left(x^2 - xR_1 - R_1 R_2\right)}$$

$$I_2 = \frac{x^2 E_1 - xR_1 E_2}{x\left(x^2 - xR_1 - R_1 R_2\right)}$$

$$\boxed{I_2 = \frac{xE_1 - R_1 E_2}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2}.}$$

11. Exprimer $I$ l'intensité du courant passant dans le résistor de résistance $x$ en fonction de $x$, $R_1$, $R_2$, $E_1$ et $E_2$.

L'intensité $I$ est telle que

$$I = I_1 + I_2$$

$$I = \frac{xE_2 - E_1(x + R_2)}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2} + \frac{xE_1 - R_1 E_2}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2}$$

$$I = \frac{xE_2 - xE_1 - R_2 E_1 + xE_1 - R_1 E_2}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2}$$

$$\boxed{I = \frac{E_2(x - R_1) - R_2 E_1}{x^2 - xR_1 - R_1 R_2}.}$$

12. On règle la valeur de $x$ pour que $I_2$ soit nulle. Déterminer le rapport $E_2/E_1$.

    L'intensité $I_2$ est nulle si le numérateur de son expression trouvée précédemment est nulle, soit

    $$xE_1 - R_1E_2 = 0.$$

    Il vient que

    $$xE_1 = R_1E_2$$

    soit

    $$\boxed{\frac{x}{R_1} = \frac{E_2}{E_1}.}$$

13. Justifier qu'on puisse comparer deux tensions à l'aide de ce dispositif.

    Grâce à ce dispositif, en faisant varier la résistance $x$ afin que le courant s'annule dans la branche contenant le résistor de résistance $x$, on peut obtenir la valeur du rapport des tensions $E_1$ et $E_2$ en connaissant les valeurs $x$ et $R_1$. Ce dispositif nous permet donc de comparer ces deux tensions.

# 3 Étude d'un circuit RL

*Adapté du concours concours agronomique et vétérinaire - BCPST (2004)*

Le circuit ci-dessous est alimenté par un générateur idéal de tension continue de force électromotrice $E$. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

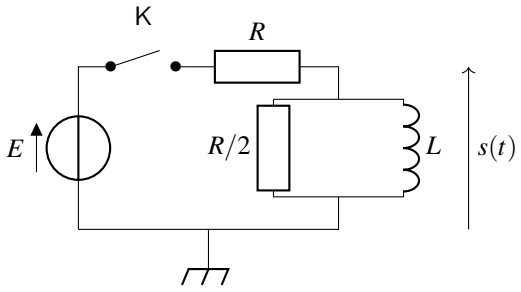



Figure 3: Schéma du circuit électrique

14. Y a-t-il continuité de la tension $s(t)$ en $t = 0$ ? Y a-t-il continuité du courant dans la résistance $R$ en $t = 0$ ? Commenter physiquement les réponses. En déduire le comportement de $s(t)$ au voisinage de $t = 0^+$.

    La tension $s(t)$ ne correspond pas à la tension aux bornes d'un condensateur, il n'y a pas *a priori* continuité de la tension en $t = 0$.

    Il n'y a pas *a priori* continuité du courant dans la résistance $R$ en $t = 0$.

    Néanmoins, il y a continuité du courant dans la bobine en $t = 0$, le courant est don nul dans la bobine au voisinage de $t = 0^+$. Le circuit correspond à un générateur en série avec deux résistors de résistance $R$ et $R/2$.

    Pour obtenir le comportement de $s(t)$ au voisinage de $t = 0^+$ il faut déterminer la tension aux bornes du résistor de résistance $R/2$. Pour cela on utilise la loi du diviseur de tension à utiliser pour des résistors branchés en série. Ainsi

    $$s(t = 0^+) = E\frac{R/2}{R/2 + R} = \frac{E}{3}.$$

15. Déterminer également le comportement asymptotique de $s(t)$ lorsque $t \to \infty$.

    Lorsque $t \to \infty$ la bobine se comporte comme un fil, la tension est donc nulle aux bornes de la bobine, $s(t \to \infty) = 0$.

16. Utiliser la loi des mailles dans les trois mailles du circuits.

Dans la maille formée par le générateur et les résistors de résistances $R$ et $R/2$ il vient que

$$E = Ri + \frac{R}{2} i_1$$

avec $i$ et $i_1$ les intensités du courant traversant respectivement le résistor de résistance $R$ et le résistor de résistance $R/2$.

Dans la maille formée par le générateur, le résistor de résistance $R$ et la bobine il vient que

$$E = Ri + u_L$$

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

avec $i_2 1$ l'intensité du courant traversant la bobine.

Dans la maille formée par le résistor de résistance $R/2$ et la bobine il vient que

$$\frac{R}{2} i_1 = u_L$$

$$\frac{R}{2} i_1 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

17. À partir de la loi des mailles dans la maille adaptée, exprimer l'intensité du courant dans la branche contenant $R$ en fonction de l'intensité du courant dans la branche contenant $L$.

On utilise la deuxième loi des mailles exprimée plus haut, soit

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

18. À partir de la loi des mailles dans la maille adaptée, exprimer l'intensité du courant dans la branche contenant $R/2$ en fonction l'intensité du courant dans la branche contenant $L$.

On utilise la troisième loi des mailles exprimée plus haut, soit

$$\frac{R}{2} i_1 = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}$$

$$i_1 = \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

19. Utiliser la loi des noeuds pour obtenir l'équation différentielle vérifiée par l'intensité du courant dans la branche contenant $L$.

Si on applique la loi des noeuds il vient que

$$i = i_1 + i_2$$

avec $i$, $i_1$, $i_2$ les intensités du courant traversant respectivement le résistor de résistance $R$, le résistor de résistance $R/2$ et la bobine.

On peut exprimer $i$ et $i_1$ en fonction de $i_2$, soit

$$\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{2L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + i_2$$

$$\boxed{i_2 + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{R}.}$$

20. Exprimer $s(t)$ en fonction du courant dans la branche contenant $L$.

La tension $s(t)$ correspond à la tension aux bornes de la bobine, soit

$$s(t) = u_L$$

$$s(t) = L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}.$$

21. Établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$.

Afin d'établir l'équation différentielle vérifiée par $s(t)$, il faut faire apparaître $s(t)$ dans l'équation différentielle respectée par $i_2$ : il faut dériver et multiplier par $L$, soit

$$L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t}\right) = L\frac{\mathrm{d}E/R}{\mathrm{d}t}$$

or $\frac{E}{R}$ est constant donc

$$\boxed{s(t) + \frac{3L}{R}\frac{\mathrm{d}s(t)}{\mathrm{d}t} = 0.}$$

22. En déduire $s(t)$.

On constate que l'équation différentielle respectée par $s(t)$ correspond à une équation différentielle du premier ordre homogène, la solution générale est donc

$$s(t) = Ae^{-Rt/3L}$$

avec $A$ une constante d'intégration à définir à partir de la condition initiale sur $s(t)$.

On a montré que $s(t = 0^+) = \frac{E}{3}$ donc

$$s(t = 0^+) = Ae^0 = \frac{E}{3}$$

$$A = \frac{E}{3}$$

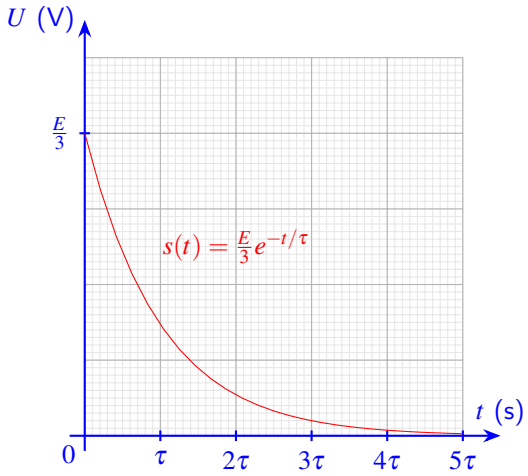
donc

$$\boxed{s(t) = \frac{E}{3}e^{-Rt/3L}.}$$

Si on introduit la constante de temps du circuit $\tau = 3L/R$ il vient que

$$s(t) = \frac{E}{3}e^{-t/\tau}.$$

23. Tracer l'allure de $s(t)$.




24. Exprimer en fonction de $L$ et $R$ le temps $t_0$ au bout duquel $s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10}$.

Au bout de la durée $t_0$ la tension $s(t_0)$ est

$$s(t_0) = \frac{s(t=0^+)}{10} = \frac{E}{3}\frac{1}{10}$$

or

$$s(t_0) = \frac{E}{3}e^{-t_0/\tau}$$

donc

$$\frac{1}{10} = e^{-t_0/\tau}$$

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -t_0/\tau$$

$$t_0 = -\tau \ln\left(\frac{1}{10}\right)$$

$$\boxed{t_0 = \frac{3L}{R}\ln(10).}$$

25. En déduire une méthode expérimentale pour déterminer $t_0$ à l'oscilloscope. On précisera le montage électrique à réaliser et la mesure à effectuer concrètement.

Pour visualiser $s(t)$ on branche l'oscilloscope entre l'extrémité inférieure droite du circuit (où on met la masse de l'oscilloscope, reliée à la masse du générateur) et l'extrémité supérieure droite du circuit ; on règle l'affichage sur l'écran de telle sorte que le signal passe de $s(t=0+)$ à 0 sur toute la hauteur de l'écran de l'oscilloscope, puis on lit sur l'axe horizontal (échelle de temps) le temps au bout duquel on a $s(t0) = s(t=0+)/10$.

26. On mesure expérimentalement : $t_0 = 3{,}0\,\mu s$. On donne : $R = 1000\,\Omega$. En déduire $L$.

À partir de l'expression de $t_0$ précédente

$$t_0 = \frac{3L}{R}\ln(10)$$

$$L = \frac{Rt_0}{3\ln(10)}.$$

**A.N.**

$$L = \frac{1000 \times 3,0.10^{-6}}{3\ln(10)}$$

$$\boxed{L = 4{,}2 \times 10^{-4}\,\text{H}.}$$

27. On remplace le générateur continu par un générateur délivrant un signal périodique en créneaux. Quel doit être l'ordre de grandeur de la fréquence du générateur pour qu'on puisse effectivement mesurer $t_0$, en utilisant la méthode indiquée à la question 25, à l'oscilloscope ?

    Afin de pouvoir observer la variation de $s(t)$ de $s(t=0+)$ à 0 sur toute la hauteur de l'écran de l'oscilloscope, il faut que la demi-période $T/2$ de la tension imposée par le génerateur soit supérieure ou égale à $4,6\tau$, soit

    $$\frac{T}{2} \geq 4,6\tau$$

    soit

    $$T \geq 9,2\tau$$

    donc

    $$f \leq \frac{1}{9,2\tau}$$

    soit en ordre de grandeur

    $$f \leq \frac{1}{10\tau}.$$

# 4 Charge d'un condensateur à travers une résistance

*Adapté du concours communs polytechniques - TSI (2005)*

Un dipôle comporte entre deux bornes A et B une résistance $R$ et un condensateur de capacité $C$ placés en série.
On place aux bornes A et B du dipôle un générateur de tension idéal de force électromotrice constante $E$ et un interrupteur K.
Initialement le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Soit $v_s$ la tension aux bornes du condensateur.
A l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur K.

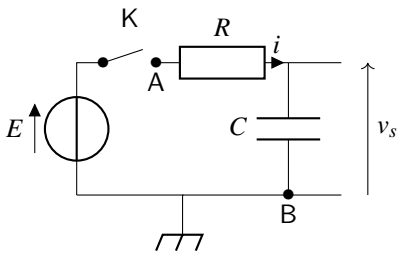



Figure 4: Schéma du circuit électrique

28. Quel est le comportement du condensateur au bout d'un temps très long (infini) après la fermeture de l'interrupteur ? En déduire les valeurs correspondantes de $v_s$ et de l'intensité $i$ dans le circuit au bout d'un temps très long.

    En régime permanent la tension aux bornes du condensateur $v_s$ devient constante, l'intensité du courant $i(t)$ traversant le condensateur est donc

    $$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = 0.$$

    **Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert**.

    Ainsi, en régime permanent, la tension aux bornes du condensateur est $v_s = E$, et l'intensité du courant le traversant est $i = 0$.

29. Exprimer la constante de temps $\tau$ du circuit en fonction des paramètres du système.

    La constante de temps du circuit est $\tau = RC$.

30. Déterminer son unité à partir d'une analyse dimensionnelle.

    La tension aux bornes du résistor de résistance $R$ est

    $$u_R = Ri$$

    or l'intensité du courant dans le circuit est telle que

    $$i = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$u_R = RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}.$$

Si on mène une analyse dimensionnelle on voit que

$$[u_R] = \left[RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right] = \mathsf{V}$$

or on sait que

$$\left[RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}\right] = [RC]\frac{\mathsf{V}}{\mathsf{T}} = \mathsf{V}$$

donc

$$[RC] = \mathsf{V}\frac{\mathsf{T}}{\mathsf{V}} = \mathsf{T}.$$

La constante $\tau = RC$ est bien homogène à une durée, son unité est la seconde.

31. On se place à $t \geq 0$. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $v_s$.

On utilise la loi des mailles dans le circuit, il vient que

$$E = u_R + v_s$$

$$E = Ri + v_s$$

$$\boxed{E = RC\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} + v_s.}$$

32. Établir l'expression de la tension $v_s(t)$ au cours du temps (pour $t \geq 0$ ). Trouver à partir de cette expression la valeur de $v_s(t)$ pour un temps très long. Vérifier que cette valeur correspond au comportement du condensateur prévu dans la question 28.

On recherche la solution particulière de l'équation différentielle. Cette solution est de la même forme que le second membre, c'est-à-dire constante, ainsi

$$E = RC\frac{\mathrm{d}v_{s,p}}{\mathrm{d}t} + v_{s,p}$$

$$E = v_{s,p}.$$

On recherche la solution homogène de l'équation différentielle, soit

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}v_{s,h}}{\mathrm{d}t} + v_{s,h}.$$

La solution de cette équation est de la forme

$$v_{s,h} = Ae^{-t/\tau}$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps du circuit et $A$ une constante d'intégration à déterminer à partir de la condition initiale sur $v_s$.

La solution générale est la somme des deux solutions, particulière et homogène, soit

$$v_s = v_{s,p} + v_{s,h}$$

$$v_s = E + Ae^{-t/\tau}.$$

Déterminons $A$ à partir de la condition initiale sur $v_s$. Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur, donc la tension à $t = 0^-$ est égale à la tension à $t = 0^+$, or à $t = 0^-$ la $v_s$ est nulle, donc la tension initiale aux bornes du condensateur est $v_s(t = 0) = 0$. Ainsi

$$v_s(t = 0) = E + Ae^0 = 0$$

$$A = -E.$$

L'expression de la tension aux bornes du condensateur est donc

$$\boxed{v_s = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right).}$$

33. Donner l'allure de la courbe représentative de la fonction $v_s(t)$ en précisant son asymptote. Calculer la valeur de la pente de la courbe à $t = 0$. Tracer la tangente à l'origine et calculer les coordonnées du point d'intersection de cette tangente avec l'asymptote.

En régime permanent la tension $v_s$ tend vers la tension imposée par le générateur, soit $E$. L'expression de l'asymptote représentée en pointillés bleus sur la figure ci-dessous est $U = E$.

À l'origine $t \to 0$, on peut mener un développement limité sur la fonction exponentielle sachant que

$$\lim_{x\to 0} e^x = 1 + x.$$

Ainsi on obtient l'expression de la tangente à l'origine

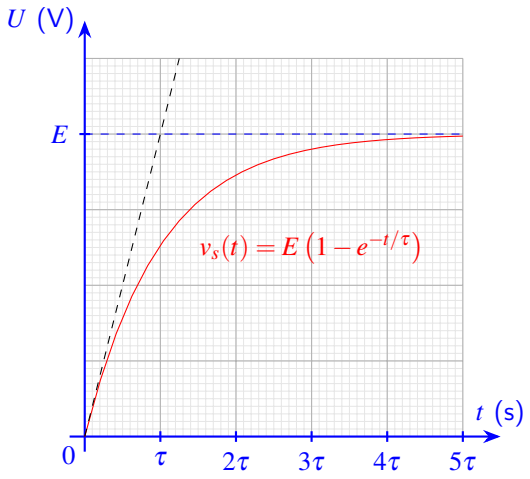
$$\lim_{t\to 0} E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) = E\left(1 - (1 - t/\tau)\right) = \frac{E}{\tau}t.$$

On l'a représenté en pointillés noirs sur la figure ci-dessous.

Pour obtenir les coordonnés du point d'intersection de la tangente et de l'asymptote, il faut égaliser les deux fonctions les représentant, soit

$$E = \frac{E}{\tau}t$$
$$t = \tau.$$

**La tangente et de l'asymptote se rejoignent à l'abscisse $t = \tau$. Cela correspond à l'ordonnée $\frac{E}{\tau}\tau = E$.**




34. Déterminer, en fonction de $\tau$ , l'expression du temps $t_1$ à partir duquel la charge du condensateur diffère de moins de 1% de sa charge finale.

À l'instant $t_1$, la tension $v_s$ est telle que

$$v_s(t_1) = \frac{99}{100}E$$

or

$$v_s(t_1) = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$

donc

$$\frac{99}{100}E = E\left(1 - e^{-t_1/\tau}\right)$$

$$\frac{99}{100} = 1 - e^{-t_1/\tau}$$

$$e^{-t_1/\tau} = \frac{1}{100}$$

$$\frac{t_1}{\tau} = -\ln\left(\frac{1}{100}\right)$$

$$t_1 = \tau \ln(100)$$

$$\boxed{t_1 = 4{,}6\tau.}$$

35. Déterminer l'expression de l'intensité $i(t)$ du courant qui circule dans le circuit pour $t \geq 0$. (L'orientation de $i(t)$ est précisée sur le schéma).

D'après la loi du condensateur

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right)$$

$$i(t) = \frac{EC}{\tau}e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = \frac{EC}{RC}e^{-t/\tau}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau}.}$$

36. Exprimer l'énergie $\mathscr{E}_C$ emmagasinée par le condensateur lorsque sa charge est terminée en fonction de $C$ et de $E$.

L'énergie électrique stockée dans un condensateur est

$$\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}Cv_s^2$$

or lorsque la charge du condensateur est terminée sa tension est $v_s = E$ donc l'énergie emmagasinée par le condensateur est

$$\boxed{\mathscr{E}_C = \frac{1}{2}CE^2.}$$

37. Déterminer, à partir des résultats de la partie précédente, l'expression de l'énergie $\mathscr{E}_J$ dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge. On exprimera $\mathscr{E}_J$ en fonction de $C$ et de $E$.

La puissance dissipée par effet Joule dans la résistance à un instant $t$ est

$$\mathscr{P}_J = u_R i = Ri^2 = R\frac{E^2}{R^2}e^{-2t/\tau} = \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}.$$

Afin d'obtenir l'énergie $\mathscr{E}_J$ dissipée par effet Joule dans la résistance au cours de la charge il faut intégrer la puissance dissipée par effet Joule entre l'instant initial $t = 0$ et un instant $t \to \infty$ soit

$$\mathscr{E}_J = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-2t/\tau}\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\frac{\tau}{2}$$

$$\mathscr{E}_J = \frac{E^2}{R}\frac{RC}{2}$$

$$\boxed{\mathscr{E}_J = \frac{1}{2}CE^2.}$$

38. Montrer, à partir des résultats de la partie précédente, que l'énergie $\mathscr{E}_g$ fournie par le générateur au cours de la charge est égale à $\mathscr{E}_g = CE^2$. Vérifier la conservation de l'énergie au cours de la charge du condensateur.

La puissance fournie par le générateur $\mathscr{P}_g$ est telle que

$$\mathscr{P}_g = Ei = E\frac{E}{R}e^{-t/\tau} = \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}.$$

Afin d'obtenir l'énergie $\mathscr{E}_g$ fournie par le générateur au cours de la charge il faut intégrer la puissance fournie entre l'instant initial $t = 0$ et un instant $t \to \infty$ soit

$$\mathscr{E}_g = \int_0^\infty \frac{E^2}{R}e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$$

$$\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}\left[-\tau e^{-t/\tau}\right]_0^\infty$$

$$\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}\tau$$

$$\mathscr{E}_g = \frac{E^2}{R}RC$$

$$\boxed{\mathscr{E}_g = CE^2.}$$

On constate que l'énergie fournie par le générateur est égale à la somme de l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance et l'énergie reçue par le condensateur

$$\mathscr{E}_J + \mathscr{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 + \frac{1}{2}CE^2 = CE^2$$

**la conservation de l'énergie est bien vérifié**e.

# 5 Potentiel d'action

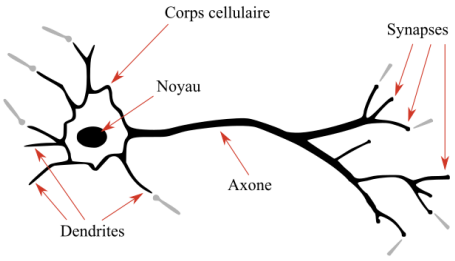
*Adapté du concours Banque G2E - BCPST (2019)*

Le fond de l'oeil est tapissé par la rétine, membrane très fragile, jaunâtre et transparente. C'est la partie sensible de l'oeil. Cette sensibilité est due à deux sortes de cellules :

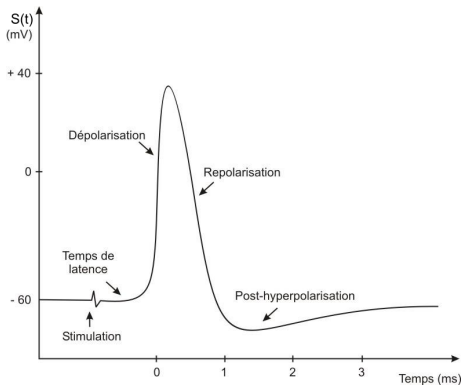
- Les bâtonnets : comme leur nom l'indique, ces cellules ont une forme allongée. Ils sont colorés en rose par le pourpre rétinien qui les rend sensibles à la lumière. Ils ne sont pas sensibles à la couleur et travaillent essentiellement en vision crépusculaire. On compte environ 120 millions de bâtonnets dans la rétine humaine.
- Les cônes : ce sont les seuls à être sensibles à la couleur. Ils participent essentiellement à la vision diurne.

Les cellules de la rétine transforment le signal lumineux en signal électrique, qui se propage ensuite vers le cerveau via les neurones. Comme le montre la Figure 5a, la propagation de l'information a principalement lieu dans l'axone. Elle est transmise aux neurones voisins via les dendrites et synapses.

Lorsque les cônes et bâtonnets sont stimulées, un signal électrique correspond à la différence de potentiel électrique entre l'intérieur et l'extérieur de l'axone, appelé potentiel d'action, se propage dans le nerf optique. Son profil temporel en un point donné de l'axone est donné par la Figure 5b.




(a) Schéma d'un neurone.




(b) Évolution du potentiel d'action $S = V_{int} - V_{ext}$ en fonction du temps lors de la stimulation d'un neurone. La stimulation provoque l'ouverture de canaux à sodium : les parois deviennent fortement perméables au sodium pendant un court instant, ce qui entraine la polarisation. La diffusion des ions potassium et les pompes sodium-potassium permettent un retour au potentiel d'équilibre (repolarisation).

Figure 5: Schéma d'un neurone et profil temporel du potentiel d'action en un point de l'axone.

On cherche à reproduire ce signal à l'aide du matériel d'électricité disponible au laboratoire. Un circuit qui peut convenir est présenté sur la Figure 6.

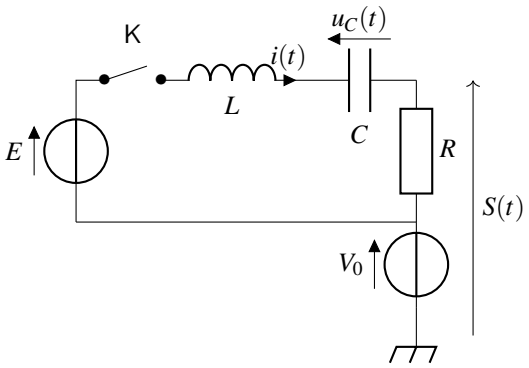



Figure 6: Schéma du circuit électrique

39. À partir de la Figure 5b, lire la valeur de repos $S_0$, la valeur maximale $S_{max}$, la valeur minimale $S_{min}$ de ce signal et sa durée caractéristique $\tau$.

D'après la figure

$$S_0 = -60 \text{ mV}$$
$$S_{max} \approx 37 \text{ mV}$$
$$S_{min} \approx -67 \text{ mV}$$
$$\tau \approx 1 \text{ ms.}$$

40. On étudie le circuit présenté Figure 6. Pour $t<0$, l'interrupteur est ouvert, le condensateur est déchargé et le régime est permanent. À l'instant $t=0$, on ferme l'interrupteur. Pour $t<0$, quelles sont les valeurs de $i$, $u_C$ et $S$ ? En déduire la valeur de $V_0$ à choisir pour que $S(t<0)=S_0$.

Pour $t<0$ l'interrupteur est ouvert donc l'intensité du courant dans le circuit est nul $i(t<0)=0$ et la tension aux bornes du condensateur est aussi nulle car il est déchargé $u_C(t<0)=0$. La tension $S(t<0)$ est d'après l'expression des tension en terme de potentiel

$$\begin{aligned} S(t<0) &= u_R(t<0)+V_0 \\ S(t<0) &= Ri(t<0)+V_0 \\ S(t<0) &= V_0 \end{aligned}$$

Ainsi pour que $S(t<0)=S_0$ il faut imposer une valeur $V_0=S_0=-60$ mV.

41. Exprimer les valeurs de $i$, $u_C$ et $S$ à l'instant $t=0^+$, juste après la fermeture de l'interrupteur.

Par continuité de l'intensité du courant dans la bobine, $i(t=0^+)=0$.

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur, $u_C(t=0^+)=0$.

Ainsi

$$\begin{aligned} S(t=0^+) &= u_R(t=0^+)+V_0 \\ S(t=0^+) &= Ri(t=0^+)+V_0 \\ S(t=0^+) &= V_0. \end{aligned}$$

42. Donner la relation entre $i(t)$, $S(t)$, $V_0$ et $R$. Donner la relation entre $i(t)$ et $u_C(t)$.

La tension $S(t)$ est telle que

$$\boxed{S(t)=Ri(t)+V_0.}$$

D'après la loi du condensateur

$$\boxed{i(t)=C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}.}$$

43. Écrire la loi des mailles et en déduire l'équation du deuxième ordre vérifiée par $S(t)$.

D'après la loi des mailles

$$E=u_L(t)+u_C(t)+u_R(t).$$

On veut faire apparaître l'équation différentielle que respecte $S(t)$, or $S(t)=Ri(t)+V_0$, il faut donc commencer par obtenir l'équation différentielle pour $i(t)$, soit

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} &= L\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+C\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+C\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} \\ 0 &= LC\frac{\mathrm{d}^2i(t)}{\mathrm{d}t^2}+i(t)+C\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

On peut alors multiplier l'équation par $R$ et ajouter $V_0$ pour faire apparaître l'équation différentielle que respecte $S(t)$

$$0 = RLC\frac{\mathrm{d}^2 i(t)}{\mathrm{d}t^2} + Ri(t) + RC\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t}$$
$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 Ri(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + V_0.$$

Comme $V_0$ est constant on voit que

$$\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Ri(t) + V_0}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}^2 Ri(t)}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2 Ri(t) + V_0}{\mathrm{d}t^2}$$

ainsi

$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 Ri(t) + V_0}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}Ri(t) + V_0}{\mathrm{d}t} + Ri(t) + V_0$$

$$\boxed{V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 S(t)}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + S(t).}$$

44. Mettre cette équation sous la forme canonique impliquant le facteur de qualité $Q$. Identifier et exprimer la pulsation $\omega_0$ et $Q$ en fonction de $R$, $L$ et $C$.

La forme canonique impliquant le facteur de qualité $Q$ d'une équation différentielle du deuxième ordre est

$$E = \frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2 S(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{Q\omega_0}\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} + S(t).$$

On peut alors identifier la pulsation $\omega_0$ et le facteur de qualité $Q$ en comparant les deux dernières équations. Il vient

$$\frac{1}{\omega_0^2} = LC$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et

$$\frac{1}{Q\omega_0} = RC$$
$$\frac{1}{Q}\sqrt{LC} = RC$$

$$\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.}$$

45. Donner la forme générale de la solution $S(t)$ pour $Q > \frac{1}{2}$.

La solution générale est de la forme

$$S(t) = S_p + S_h(t)$$

avec $S_p$ et $S_h(t)$ les solutions particulière et homogène.

La solution particulière $S_p$ est telle que

$$V_0 = LC\frac{\mathrm{d}^2 S_p}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}S_p}{\mathrm{d}t} + S_p = S_p.$$

Comme $Q > \frac{1}{2}$, le système est en régime pseudopériodique et la solution homogène est de la forme

$$S_h(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$$

avec $\omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$.

Donc la solution générale est telle que

$$\boxed{S(t) = V_0 + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right).}$$

46. Montrer que l'une des deux constantes d'intégration est nulle.

On sait qu'à $t = 0^+$ $S(t=0^+) = V_0$ or

$$S(t=0^+) = e^0\left(A\cos(0) + B\sin(0)\right) + V_0$$

$$S(t=0^+) = A + V_0$$

donc

$$A + V_0 = V_0$$

soit

$$\boxed{A = 0.}$$

Il vient donc que

$$S(t) = Be^{-t/\tau}\sin(\omega t) + V_0.$$

47. Écrire la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et en déduire l'expression de $\frac{\mathrm{d}S(0^+)}{\mathrm{d}t}$. Exprimer alors la deuxième constante d'intégration en fonction de $\omega$, $E$ et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$.

À $t = 0^+$ la loi des mailles donne

$$E = u_L(t=0^+) + u_C(t=0^+) + u_R(t=0^+)$$

$$E = L\frac{\mathrm{d}i(t=0^+)}{\mathrm{d}t} + u_C(t=0^+) + Ri(t=0^+)$$

$$E = L\frac{\mathrm{d}i(t=0^+)}{\mathrm{d}t} + 0 + 0$$

en multipliant par $R$

$$RE = L\frac{\mathrm{d}Ri(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$$

or on a montré que

$$\frac{\mathrm{d}Ri(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Ri(t) + V_0}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$RE = L\frac{\mathrm{d}Ri(t=0^+) + V_0}{\mathrm{d}t}$$

$$RE = L\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$$

donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t} = \frac{RE}{L}.}$$

Si on dérive l'expression de $S(t)$ obtenue plus tôt

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Be^{-t/\tau}\sin(\omega t) + V_0\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B}{\tau}e^{-t/\tau}\sin(\omega t) + \omega B e^{-t/\tau}\cos(\omega t).$$

À $t = 0^+$

$$\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t} = -\frac{B}{\tau}e^{0}\sin(0) + \omega B e^{0}\cos(0)$$

$$\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t} = \omega B$$

donc

$$B = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}S(t=0^+)}{\mathrm{d}t}$$

or on a montré que $\mathrm{d}S(t=0^+)/\mathrm{d}t = RE/L$ donc

$$B = \frac{1}{\omega}\frac{RE}{L}$$

or

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC} = 2\frac{L}{R}$$

donc

$$\boxed{B = \frac{2E}{\omega\tau}.}$$

# 6 Problème ouvert

Dans le circuit électronique présenté Figure 7 on a $U = 6\,\mathrm{V}$, $C_1 = 3\,\mu\mathrm{F}$ et $C_2 = 6\,\mu\mathrm{F}$. L'interrupteur se trouve d'abord dans la position A.

Quelle est la différence de potentiel entre les bornes du condensateur $C_2$ après que l'interrupteur ait été placé dans la position B ?

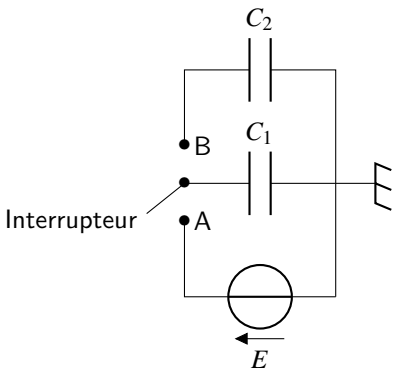



Figure 7: Schéma du circuit électrique.

Dans la position A, le condensateur de capacité $C_1$ est chargé : d'après la loi des mailles, la tension à ses bornes, notée $U_1$, a augmenté jusqu'à obtenir la valeur de tension du générateur, soit

$$E = U_1.$$

La quantité de charges $q_1$ aux bornes de ce condensateur lorsque l'interrupteur est en position A est alors

$$q_1 = C_1 U_1.$$

Lorsque l'interrupteur est placé dans la position B, la quantité de charges sur les armatures du condensateur de capacité $C_1$ change et passe de $q_1$ à $q_1'$, et sa tension de $U_1$ à $U_1'$. De plus, d'après la loi des mailles, il vient que

$$U_1' = U_2$$

avec $U_2$ la tension aux bornes du condensateur de capacité $C_2$.

La quantité de charges doit être conservée dans le circuit, donc la quantité de charges sur les armatures du condensateur de capacité $C_1$ avant que l'interrupteur soit placé sur la position B, soit $q_1$, doit être égale à la quantité de charges sur les armatures des condensateur de capacité $C_1$ et $C_2$ après que l'interrupteur ait été placée sur la position B, soit $q_1' + q_2$, ainsi

$$q_1 = q_1' + q_2$$

ou

$$U_1 C_1 = U_1' C_1 + U_2 C_2.$$

D'après la loi des mailles $U_1' = U_2 \equiv U$, soit

$$U_1 C_1 = U(C_1 + C_2).$$

Si on isole $U$ il vient que

$$U = U_1 \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

**A.N.**

$$U = 6\ \text{V} \frac{3\ \mu\text{F}}{3\ \mu\text{F} + 6\ \mu\text{F}}$$

$$\boxed{U = 2\ \text{V}.}$$