

Chapitre 4 - Propagation d'un signal

Dans ce chapitre, nous allons étudier **les signaux** et déterminer leur lien avec **les ondes**. Auparavant, nous avons déjà rencontré un premier type d'ondes : les ondes électromagnétiques, et parmi elles, la lumière. Mais les ondes et les signaux ne se limitent pas au domaine électromagnétique.

Après avoir recensé **différentes natures d'ondes et de signaux**, et constaté que nous avons déjà étudié quelques signaux dans les chapitres précédents sans l'avoir explicitement dit, nous étudieront **le phénomène de propagation** des ondes et des signaux. Nous nous concentrerons alors sur un type d'onde particulier : **les ondes sinusoïdales**.

En utilisant ce type d'onde comme modèle, nous pourrons ensuite nous intéresser aux **phénomènes d'interférences** entre deux ondes.

Leçon I. Ondes et signaux

Une créature sensible est par définition capable d'appréhender les phénomènes qui l'entourent grâce à ses sens. Ces phénomènes se caractérisent par des grandeurs physiques. Les organes sensoriels ont pour but de transcrire ces grandeurs physiques en d'autres grandeurs physiques compréhensibles par le cerveau, afin d'en tirer **une information** sur son environnement. **On appelle signal, toute grandeur physique dépendant du temps dont la détermination permet d'accéder à une information.** La pression au niveau du tympan humain est un signal transcrit en une variation de potentiel électrique qui se propage le long du nerf jusqu'au cerveau, qui interprète ces variations en message : le cerveau récolte des informations auditives. On peut noter que le potentiel électrique, puisqu'il permet de véhiculer une information, est aussi un signal. On peut considérer les organes sensoriels des êtres vivants comme des appareils capables de transformer des signaux en d'autres grandeurs physiques. On nomme de tels appareils **des transducteurs**.

Les signaux sont donc des éléments essentiels de notre vie. D'autant plus que la technologie permet aujourd'hui à l'humain d'exploiter d'autres signaux que ceux exploitables par ses cinq sens : par exemple, on peut mesurer des signaux électriques ou observer des radiations invisibles à l'œil nu grâce à des transducteurs particuliers.

Néanmoins, afin qu'un signal puisse être détecté, par nos sens ou à l'aide d'un instrument, il doit se propager. Or, il existe un phénomène que l'on retrouve dans tous les domaines de la Physique (mécanique, électromagnétisme, thermodynamique, physique quantique, etc.) permettant de propager des signaux : la génération d'**une onde progressive**.

I.1. Différents types d'ondes et de signaux

Prenons deux microphones distants d'une longueur d . Ces micros transcrivent un signal sonore en une tension qu'on observe sur chacune des voies d'un oscilloscope réglé en mode "déclenchement" (l'oscilloscope ne fait qu'une acquisition à partir du moment où un seuil de tension est dépassé).

On produit un son. On observe une augmentation de la tension mesurée par l'oscilloscope sur chacune des voies. Cette augmentation est la transcription du son par les micros. Or, l'augmentation n'a pas lieu au même moment pour les deux micros : il y a un retard τ . On peut interpréter ce retard par le fait que le son se déplace à une vitesse finie $c = d/\tau$: **le signal sonore se propage**.

Le phénomène qui permet au signal de se propager est l'onde acoustique.

I.1.a Une classification des d'ondes

Reprenons la définition de l'onde que nous avons introduite dans le chapitre 1.

♥ Définition

Une onde est le déplacement d'une perturbation locale dans l'espace sans qu'il y ait déplacement de matière globale.

Mais qu'est-ce qui est perturbé ? **Ce qui est perturbé, ce sont un ou des champs.** Un champ désigne une grandeur physique présente en tout point de l'espace. Lorsque la valeur d'un champ en un endroit varie, est perturbé, cette variation se propage alentours.

Dans le cas de l'onde acoustique que nous avons mis en évidence précédemment, les champs perturbés sont le champ de pression : la valeur de la pression au niveau d'une enceinte ou de cordes vocales ; et le champ de vitesse des molécules d'air : la valeur de la vitesse locale des particules d'air est modifiée au niveau d'une enceinte ou de cordes vocales.

Il existe deux types de champs : **les champs scalaire et vectorielle.** La pression est une grandeur scalaire, à chaque point de l'espace on peut associer une valeur de pression, mais pas de direction ni de sens : le champ de pression est qualifié de scalaire. La vitesse est une grandeur vectorielle, à chaque point de l'espace on peut associer une valeur, une direction et un sens de vitesse : le champ de vitesse est qualifié de scalaire.

Le diagramme présenté sur la Figure 4.1 décrit cinq grands types d'onde à connaître : les ondes mécaniques, élastiques, acoustique, électromagnétiques et gravitationnelles.

On peut séparer tous les types d'ondes en deux autres familles : **les ondes transverses et les ondes longitudinales.**

👉 Nota bene

Parmi **les ondes mécaniques**, il existe un autre type d'onde qui nous est familier : **les ondes de surface** qui sont **présentes seulement au niveau de la surface libre d'un liquide ou d'un solide.** Un exemple d'ondes de surface est la houle. Le vent souffle sur la surface de l'eau ce qui perturbe le champ de vitesse des particules d'eau et le champ de pression dans l'eau. Plus les particules sont proches de la surface et plus leur vitesse est perturbées. Comme les particules oscillent de haut en bas et d'avant en arrière par rapport à leur position d'équilibre **l'onde de surface est une onde à la fois transverse et longitudinale.**

Un autre exemple d'onde de surface est l'onde de Rayleigh qui correspond à une onde sismique se propageant à la surface des solides, et qui est à la fois transverse et longitudinale.

Des animations schématisant la propagation d'une onde transverse, d'une onde longitudinale et d'une onde de surface sont disponibles sur [le site de Daniel Russel à l'université de Pennsylvanie.](#)

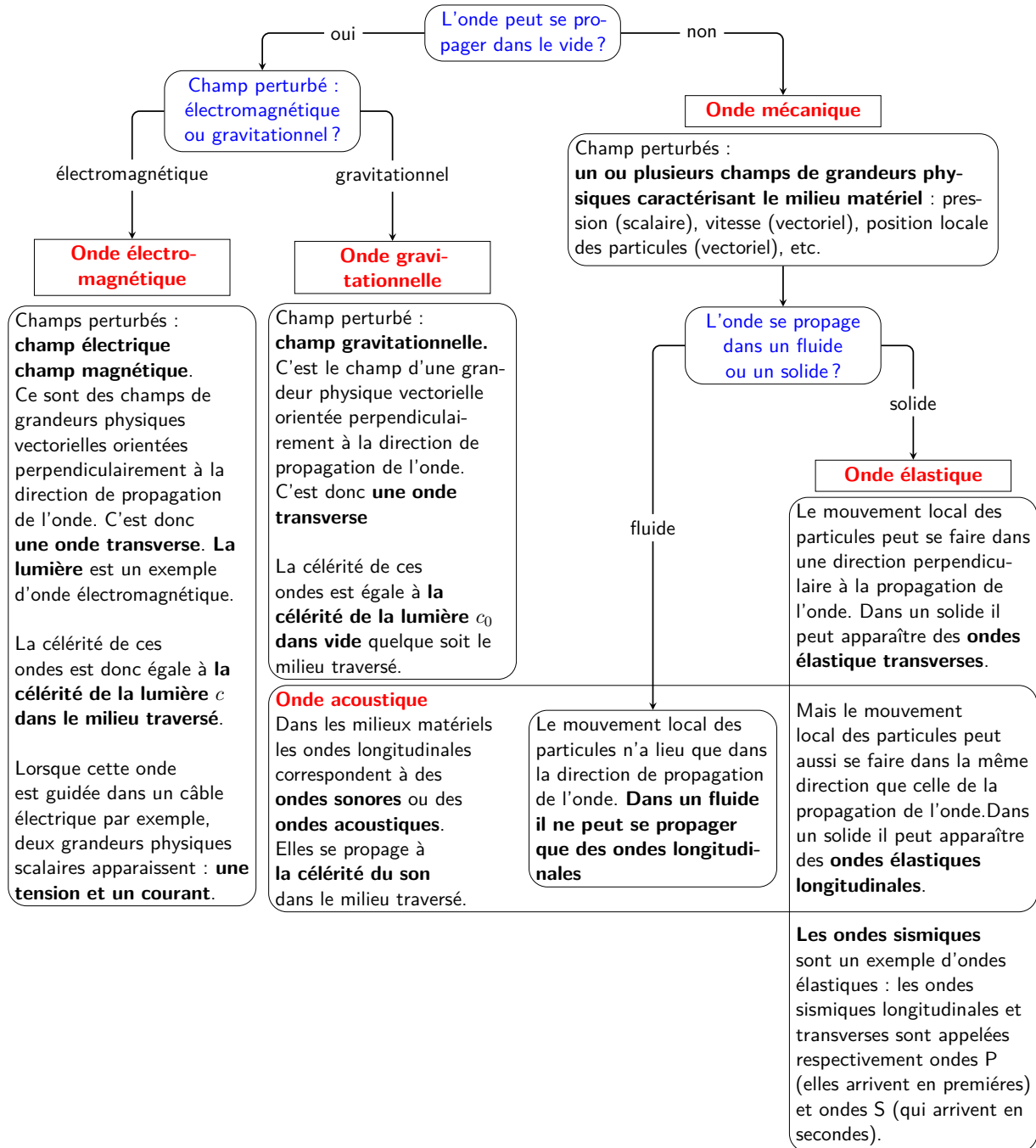


Figure 4.1 – Les différentes natures d'onde selon le type de champs perturbés.

Les géométries ou formes d'onde sont très variées, nous n'étudierons que des formes particulières : les ondes sphériques, cylindriques et planes, comme illustré Figure 4.2, Figure 4.3 et Figure 4.4.

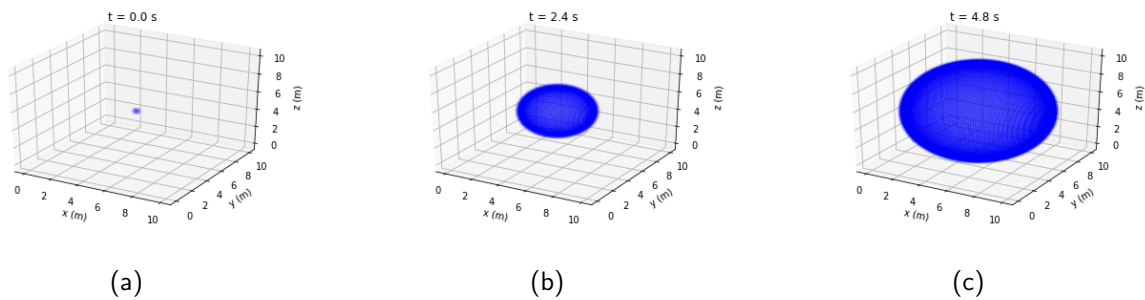


Figure 4.2 – Propagations d'une onde sphérique divergente.

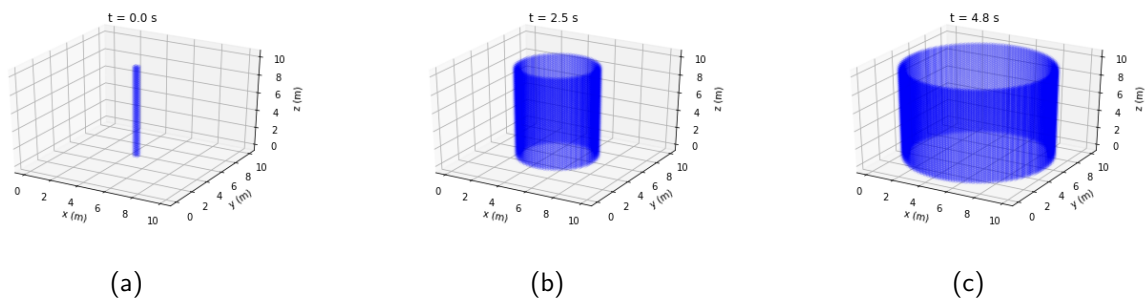


Figure 4.3 – Propagations d'une onde cylindrique divergente.

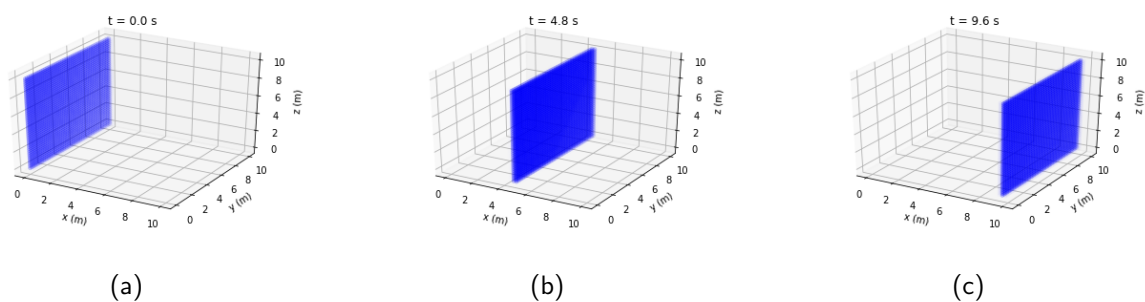


Figure 4.4 – Propagations d'une onde plane.

1.1.b Signaux physiques

♥ Définition

Nous avons vu en préambule qu'un **signal** désignait toute grandeur physique dépendant du temps dont la détermination permettait d'accéder à une information. Plus précisément, cela désigne toute grandeur physique dont la valeur n'est plus nulle du fait du déplacement d'une perturbation.

Citons quelques exemples de **signaux physiques** et quelques-uns de **leurs capteurs** en fonction de la nature des ondes qui les produisent.

Un des signaux physiques exploitable lors de la propagation d'une **onde électromagnétique** est la **variation du champ électromagnétique**. Cette variation peut-être convertie par un transducteur, qu'on appelle **antenne**, en d'autres signaux exploitables que sont la variation de tension et la variation de l'intensité du courant. Ces deux derniers signaux sont qualifiés de **signaux électriques**.

Les signaux associés à la propagation d'une **onde mécanique** sont qualifiés de **signaux mécaniques**. Ils peuvent correspondent à la variation de la position, de la vitesse ou de l'accélération d'un corps. Les transducteurs que sont le **capteur de position**, le **capteur de vitesse** et l'**accéléromètre** permettent de convertir ces signaux mécaniques en signaux électriques. Le sismographe est un capteur de position particulier utilisé pour détecter les ondes sismiques.

Les signaux associés à la propagation d'une **onde acoustique** sont qualifiés de **signaux acoustiques**. Ils correspondent à la variation de vitesse des particules du fluide et de la variation de pression dans le fluide (appelée également surpression). La variation de pression étant plus facile à mesurer, ce sont généralement des **capteurs de variation de pression** qui sont utilisés pour détecter les ondes acoustiques.

Le signal associé à la propagation d'une **onde gravitationnelle** est la **déformation de l'espace-temps**. Le passage d'une onde gravitationnelle provoque la déformation de l'espace dans une direction perpendiculaire à la direction de propagation. En comparant la durée du trajet de la lumière dans cette direction et dans la direction de propagation, on voit apparaître une différence de durée à l'occasion du passage de l'onde : c'est ce principe qui est exploité par l'**interféromètre** Virgo, présenté Figure 4.5, et qui est, par définition, un capteur de déformation.



Figure 4.5 – Photo aérienne de l'interféromètre Virgo à Santo Stefano en Italie (le bras ouest d'une longueur de 3 km est visible en entier)¹.

1.2. Onde progressive

Les ondes peuvent se propager selon différentes dimensions. Les ondes acoustiques sphériques sont des **ondes tridimensionnelles** se propageant dans toutes les directions de l'espace.

Les ondes de surface ne se propagent que sur la surface libre d'un liquide ou d'un solide, ce sont donc des **ondes bidimensionnelles** se propageant dans un plan.

L'onde se propageant le long d'une corde est une **onde unidimensionnelle**. On va se limiter à ce cas afin de d'obtenir deux expressions d'une onde progressive.

1. Source : [wikipédia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Interferom%C3%A8tre_Virgo).

1.2.a Première expression

Considérons une onde se propageant le long d'une corde sans déformation et sans atténuation avec une célérité c , comme cela est représenté sur [cette animation](#). La corde est alignée sur la direction d'un axe Ox . On modélise l'onde par une fonction $s(x, t)$, car l'onde perturbe un certain point x de la corde à un certain instant t . Étudions l'onde lorsque son maximum S passe à un certain point x_0 de la corde à un certain instant t_0 , et lorsque son maximum passe à un certain point x_1 de la corde à un certain instant t_1 , c'est-à-dire, étudions $S = s(x_0, t_0)$ et $S = s(x_1, t_1)$. Si on considère que l'onde vient des x négatifs et que $x_0 < x_1$, on peut représenter $s(x, t)$ à x_0, t_0 et à x_1, t_1 comme cela est fait sur la Figure 4.6.

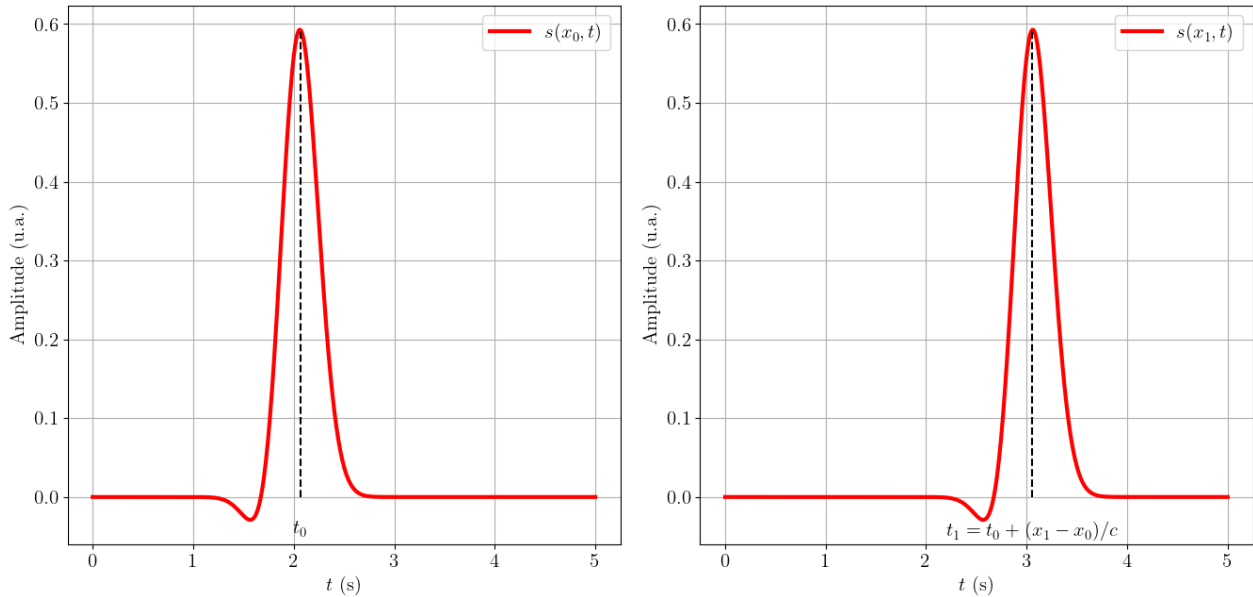


Figure 4.6 – Représentations de la fonction $s(x, t)$ au point x_0 par rapport à t et de la fonction $s(x, t)$ au point x_1 par rapport à t .

Si l'on veut représenter la variation de $s(x, t)$ uniquement au point x_0 par rapport aux instants t , on associe la fonction $s(x_0, t)$ à une fonction $f(t)$: comme on a fixé $x = x_0$, $f(t)$ ne dépend que du temps.

Or, comme l'onde se propage des x négatifs vers les x positifs, il apparaît que l'onde se déplace de x_0 à x_1 après une durée $t_1 - t_0$, durée que l'on peut voir comme un retard qui est tel que

$$t_1 - t_0 = \frac{x_1 - x_0}{c}.$$

On peut ainsi exprimer t_1 tel que $t_0 = t_1 - \frac{x_1 - x_0}{c}$.

Le maximum S de l'onde se trouve en x_0 à t_0 , puis en x_1 à t_1 , soit

$$S = s(x_0, t_0) = s(x_1, t_1)$$

ou encore

$$S = s\left(x_0, t_1 - \frac{x_1 - x_0}{c}\right) = s(x_1, t_1).$$

D'après cette relation, on voit que si on représente la variation $s(x, t)$ uniquement au point x_1 par rapport aux instants t , cette variation $s(x_1, t)$ au point x_1 est égale à la variation $s(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c})$, soit la variation $s(x, t)$ au point x_0 , mais retardé d'une durée $\frac{x_1 - x_0}{c}$.

Or on a introduit la fonction $f(t)$ permettant de représenter la variation $s(x, t)$ en un point précis et uniquement par rapport à t . On peut l'utiliser pour décrire la variation $s(x, t)$ au point x_1 , car on voit que

$$s(x_1, t) = s\left(x_0, t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right) = f\left(t - \frac{x_1 - x_0}{c}\right).$$

Ainsi la fonction f qui décrit la variation $s(x_1, t)$ uniquement au point x_1 par rapport à t est aussi retardé de $\frac{x_1 - x_0}{c}$.

Si on prend $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$ il vient que

$$s(x_1, t) = f\left(t - \frac{x_1}{c}\right)$$

or cela est valable pour toute valeur de x_1 , donc on peut généraliser cette expression pour tout x

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right).$$

♥ Définition

Une onde progressive se propageant avec une célérité c dans la direction de l'axe Ox dans le sens des x **positifs**, sans atténuation, sans déformation, est de la forme mathématique

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

où f est une fonction qui décrit la forme de l'onde et dont l'argument a la dimension d'un temps.

Application 1

Montre qu'une onde progressive se propageant avec une célérité c dans la direction de l'axe Ox dans le sens des x **négatifs**, sans atténuation, sans déformation, est de la forme mathématique

$$s(x, t) = f\left(t + \frac{x}{c}\right).$$

1.2.b Deuxième expression

Reprenons l'étude, mais cette fois-ci, représentons la variation de $s(x, t)$ uniquement à l'instant t_0 par rapport aux positions x . On associe la fonction $s(x, t_0)$ à une fonction $g(x)$: comme on a fixé $t = t_0$, $g(x)$ ne dépend que de la position.

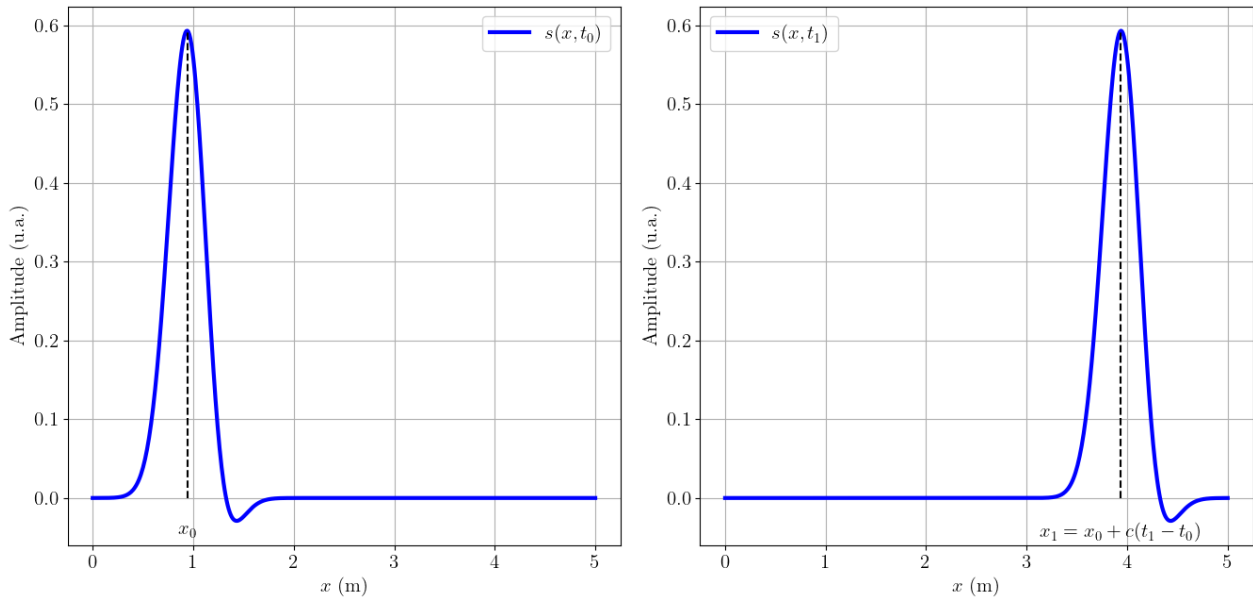


Figure 4.7 – Représentations de la fonction $s(x, t)$ à l'instant t_0 par rapport à x et de la fonction $s(x, t)$ à l'instant t_1 par rapport à x .

Or, comme l'onde se propage des x négatifs vers les x positifs, comme illustré Figure 4.7, il apparaît que l'onde évolue de t_0 à t_1 après s'être déplacée d'une distance $x_1 - x_0$ telle que

$$x_1 - x_0 = c(t_1 - t_0).$$

On peut ainsi exprimer x_1 tel que $x_0 = x_1 - c(t_1 - t_0)$.

Le maximum S de l'onde se trouve en x_0 à t_0 , puis en x_1 à t_1 , soit

$$S = s(x_0, t_0) = s(x_1, t_1)$$

ou encore

$$S = s(x_1 - c(t_1 - t_0), t_0) = s(x_1, t_1).$$

D'après cette relation, on voit que si on représente la variation $s(x, t)$ uniquement à l'instant t_1 par rapport aux positions x , cette variation $s(x, t_1)$ à l'instant t_1 est égale à la variation $s(x - c(t_1 - t_0), t_0)$, soit la variation $s(x, t)$ à l'instant t_0 , mais repoussée d'une distance $c(t_1 - t_0)$.

Or on a introduit la fonction $g(x)$ permettant de représenter la variation $s(x, t)$ à un instant précis et uniquement par rapport à x . On peut l'utiliser pour décrire la variation $s(x, t)$ à l'instant t_1 , car on voit que

$$s(x, t_1) = s(x - c(t_1 - t_0), t_0) = g(x - c(t_1 - t_0)).$$

Ainsi la fonction g qui décrit la variation $s(x, t_1)$ uniquement à l'instant t_1 par rapport à x est aussi repoussée d'une distance $c(t_1 - t_0)$.

Si on prend $x_0 = 0$ et $t_0 = 0$ il vient que

$$s(x, t_1) = g(x - ct_1)$$

or cela est valable pour toute valeur de t_1 , donc on peut généraliser cette expression pour tout t

$$s(x, t) = g(x - ct).$$

♥ Définition

Une **onde progressive** se propageant avec une célérité c dans la direction de l'axe Ox dans le sens des x **positifs**, sans atténuation, sans déformation, est de la forme mathématique

$$s(x, t) = g(x - ct)$$

où g est une fonction qui décrit la forme de l'onde et dont l'argument a la dimension d'une longueur.

✎ Application 2

Montre qu'une **onde rétrograde** se propageant avec une célérité c dans la direction de l'axe Ox dans le sens des x **négatifs**, sans atténuation, sans déformation, est de la forme mathématique

$$s(x, t) = g(x + ct).$$

1.3. Onde progressive sinusoïdale

1.3.a Description

Une onde est sinusoïdale si le signal mesuré en tout point de l'abscisse x est une fonction sinusoïdale du temps de **pulsation temporelle** ω , indépendante de la position. Par exemple, au point d'abscisse $x = 0$, le signal d'une onde progressive dans le sens des x positifs est telle que

$$s(x = 0, t) = f(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$$

avec A_0 l'**amplitude de l'onde** et φ_0 la **phase initiale à l'origine de l'onde**.

Comme on l'a vu, on peut généraliser cette expression dans le cas de tous les x de telle manière que

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) = A \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi_0\right).$$

♥ Définition

Une **onde progressive sinusoïdale** de pulsation ω se propageant avec une célérité c dans la direction de l'axe Ox dans le sens des x **positifs**, sans atténuation, sans déformation, est de la forme mathématique

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$$

avec $k = \omega/c$ la valeur du **vecteur d'onde** \vec{k} , k est encore appelé la **pulsation spatiale**.

L'argument de la fonction sinusoïdale est appelé la **phase de l'onde**. Ici la phase est $\omega t - kx + \varphi_0$.

1.3.b Double périodicité spatio-temporelle

Pour une position x_1 fixée, le signal $s(x_1, t)$ de l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale du temps t avec une pulsation temporelle ω . On peut relier cette pulsation temporelle à la période temporelle T telle que

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Pour un instant t_1 fixé, le signal $s(x, t_1)$ de l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale de la position x avec une pulsation spatiale k . On peut relier cette pulsation spatiale à la longueur d'onde λ , qui n'est autre que la période spatiale de l'onde

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

On constate que **l'onde possède une double périodicité** : spatiale et temporelle.

♥ Définition

Une onde progressive sinusoïdale se propageant dans la direction de l'axe Ox dans le sens des x positifs peut s'écrire

$$s(x, t) = A(\omega t - kx + \varphi_0)$$

soit

$$s(x, t) = A\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

avec T la période temporelle de l'onde, et λ la période spatiale de l'onde, encore appelée longueur d'onde.

1.3.c Vitesse de phase

Soit une onde progressive sinusoïdale de la forme $s(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0)$. Cette onde progresse jusqu'au point x_1 puis au point x_2 .

Déterminons l'instant t_2 où le signal mesuré en x_2 aura la même phase que le signal mesuré en x_1 à l'instant t_1 comme cela est illustré Figure 4.8, soit

$$\omega t_1 - kx_1 + \varphi_0 = \omega t_2 - kx_2 + \varphi_0.$$

Il vient que

$$t_2 - t_1 = \frac{k}{\omega}(x_2 - x_1) = \frac{1}{c}(x_2 - x_1).$$

Ainsi, à l'instant t_2 , on retrouve une valeur de la phase de l'onde en x_2 identique à celle de x_1 à l'instant t_1 . On en déduit que la phase de l'onde progressive sinusoïdale se propage à la vitesse c . C'est pour cela que l'on nomme cette vitesse, **la vitesse de phase**.

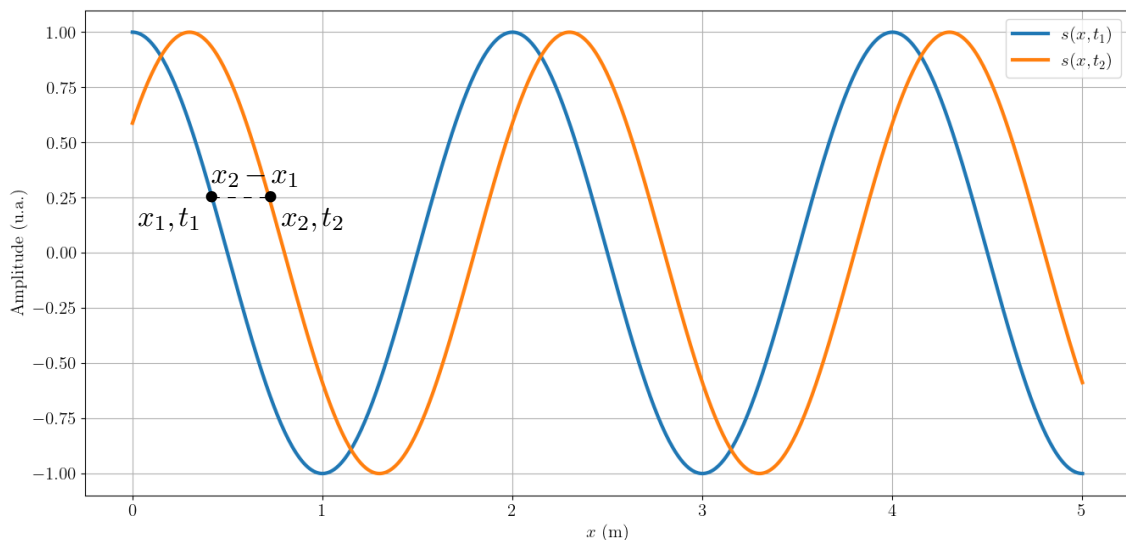


Figure 4.8 – Propagation d'une onde s vers les x positifs à deux instants t_1 et t_2 différents.

Une onde peut être qualifiée de périodique lorsqu'elle retrouve la même valeur à une position x après une durée T , soit

$$s(x, t) = s(x, t + \Delta t).$$

Ainsi lorsque $t_2 - t_1 = T$, pour la même position x l'onde a les mêmes valeurs aux instants t_1 et t_2 , soit $s(x, t_1) = s(x, t_2)$. Il vient ainsi que

$$T = \frac{k}{\omega} (x_2 - x_1)$$

$$T \frac{\omega}{k} = x_2 - x_1$$

$$T \frac{\lambda}{T} = x_2 - x_1$$

$$\lambda = x_2 - x_1.$$

Le signal de l'onde s'est décalé d'une distance λ après une durée T .

♥ Définition

La longueur d'onde λ est égale à la distance sur laquelle l'onde progressive sinusoïdale se propage pendant une durée égale à la période temporelle T :

$$\lambda = cT,$$

avec c la vitesse de phase.

1.3.d Déphasage entre deux points

Soit deux points x_1 et x_2 pour lesquels on regarde les valeurs de l'onde au même instant t , soit

$$s(x_1, t) = A(\omega t - kx_1 + \varphi_0)$$

$$s(x_2, t) = A(\omega t - kx_2 + \varphi_0).$$

La différence de phase aux points x_2 et x_1 , aussi appelé **déphasage** est

$$\omega t - kx_1 + \varphi_0 - (\omega t - kx_2 + \varphi_0) = -k(x_1 - x_2)$$

or

$$k(x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1).$$

♥ Définition

Les signaux sinusoïdaux $s(x_1, t)$ et $s(x_2, t)$ d'une onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de Ox sont déphasés de

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = \frac{2\pi}{T} \frac{x_2 - x_1}{c}.$$

On dit que les signaux au point x_1 et au point x_2 sont en phase à l'instant t lorsque

$$\frac{2\pi}{\lambda} (x_2 - x_1) = m \times 2\pi$$

avec m entier relatif, soit

$$x_2 - x_1 = m \times \lambda.$$

♥ Définition

Deux points séparés d'un **nombre entier de fois la longueur d'onde** le long de la direction de propagation Ox vibrent **en phase**.

On dit que les signaux au point x_1 et au point x_2 sont en opposition de phase à l'instant t lorsque

$$\frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times 2\pi$$

avec m entier relatif, soit

$$x_2 - x_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda.$$

♥ Définition

Deux points séparés d'un **nombre entier de fois la longueur d'onde plus une demi-longueur d'onde** le long de la direction de propagation Ox vibrent **en opposition de phase**.

1.3.e Ordre de grandeur des fréquences

Dans le cas des **ondes acoustiques**, les **fréquences du domaine audible**, soit le domaine des sons perçus par l'oreille humaine, s'étend de **20 Hz à 20 kHz**. En deçà de 20 Hz, on passe dans le domaine des **infrasons**, au delà de 20 kHz, on passe dans le domaine des **ultrasons**.

Dans le cas des **ondes mécaniques**, le domaine de fréquences des **ondes sismiques élastiques** s'étend entre 1 Hz et 100 Hz. Les machines génèrent également des ondes élastiques dont le domaine de fréquences s'étend de 1 Hz à 1000 Hz.

Le domaine de fréquences des **ondes de surfaces**, que soit la houle ou les ondes sismiques de surface, appelée ondes de Rayleigh, s'étend de 0,01 Hz à 1 Hz.

Les différents domaines de fréquences des **ondes électromagnétiques** a été étudié section ??.

1.3.f Analyse spectrale

L'étude que nous venons de mener se limiter aux ondes sinusoïdales. En général, une onde n'est pas sinusoïdale, alors pourquoi s'intéresser à ce type d'onde ?

Joseph Fourier, mathématicien, physicien et homme politique français, a établi une théorie mathématique qui montre que **tout signal peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux** d'amplitude, de fréquences et de phase à l'origine différentes.

L'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal $s(t)$ quelconque est appelée **analyse spectrale**. Grâce à l'analyse spectrale menée sur $s(t)$ on obtient

- la liste des fréquences f_i des composantes sinusoïdales contenues dans le signal (éventuellement nulle dans le cas d'un signal constant)
- l'amplitude A_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i
- la phase initiale φ_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i .

On peut alors exprimer le signal quelconque $s(t)$ comme la somme de ces composantes sinusoïdales

$$s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i).$$

Chaque signal sinusoïdale $s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$ est une composante sinusoïdale du signal $s(t)$. On dit que le signal "contient les fréquences f_i ". Le spectre du signal est l'ensemble des fréquences f_i contenues dans le signal. Un spectre peut être caractéristique du phénomène physique qui lui donne naissance, ce qui peut permettre son identification, par exemple, en comparant le spectre d'un signal sismique, [on peut identifier un séisme d'origine naturel ou d'origine artificiel comme une explosion minière](#).

Certains signaux sont **purement sinusoïdaux** et leur spectre contient une unique fréquence. Ils sont souvent associés à **l'évolution d'un oscillateur harmonique**, c'est pourquoi on parle également de **signaux harmoniques**, comme les signaux de tension ou de courant d'un circuit LC. C'est aussi le cas du signal acoustique émis par un diapason dont les extrémités des branches vibrent de manière sinusoïdale.

Lorsque **le signal est périodique et non sinusoïdal**, son spectre est constitué de fréquences qui sont des multiples entiers d'**une fréquence fondamentale**, qui est la plus petite fréquence contenue dans ce signal. Les composantes de ce signal sont appelées **les harmoniques du signal**. La composante dont la fréquence est la fréquence fondamentale est appelée l'harmonique de premier rang ou la fondamentale.

Finalement, l'analyse de Fourier permet également de décomposer des **signaux non périodiques**.

Synthèse

Connaissances

- Types d'onde et exemples de signaux.
- Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive.
- Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle.
- Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.

Savoir-faire

- **Identifier** les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
- **Écrire** les signaux sous la forme $f(t - \frac{x}{c})$ ou $g(x - ct)$.
Écrire les signaux sous la forme $f(t + \frac{x}{c})$ ou $g(x + ct)$.
Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
- **Citer** quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique.
- **Établir** la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase.
- **Relier** le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation.

Leçon II. Phénomène d'interférences entre deux ondes quelconques

Dans cette leçon, nous allons étudier les conditions d'apparition du phénomène d'interférence qui peut avoir lieu quand **deux ondes de fréquences identiques** se superposent dans une même zone de l'espace. Nous nous restreindrons ici à toute onde autre que les ondes lumineuses. Ces dernières seront au coeur de la leçon suivante.

II.1. Superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Afin d'appréhender le phénomène d'interférence, considérons le cas simple de deux ondes portant deux signaux sinusoïdaux de même fréquence f , donc de même pulsation $\omega = 2\pi f$. Néanmoins, considérons que ces deux signaux ont des phases à l'origine φ différentes.

II.1.a Signaux de même amplitude

Commençons l'étude avec des signaux de même amplitude.

$$s_1(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$

$$s_2(x, t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_2).$$

Plaçons-nous à $x = 0$. La somme des deux signaux en ce point est

$$s_{\text{tot}}(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

$$s_{\text{tot}}(t) = A_0 (\cos(\omega t + \varphi_1) + \cos(\omega t + \varphi_2)).$$

On peut exprimer d'une autre manière la somme des amplitudes, en utilisant les relations trigonométriques suivantes

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$$

En sommant les deux relations, il vient que

$$\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b.$$

Utilisons cette relation dans le cas de la somme des signaux $s_{\text{tot}}(t)$, il vient que

$$a + b = \omega t + \varphi_1$$

$$a - b = \omega t + \varphi_2$$

et en sommant ces deux relations

$$2a = 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2$$

$$a = \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

et donc

$$b = \omega t + \varphi_1 - a$$

$$b = \omega t + \varphi_1 - \omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$$

$$b = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}.$$

Ainsi l'expression de la somme des signaux devient

$$s_{\text{tot}}(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right).$$

Le premier cosinus ne dépend pas du temps, il ne dépend que des phases à l'origine des deux ondes.

L'amplitude de la somme des signaux n'est pas forcément égale à la somme des amplitudes des signaux. L'expression de la somme des signaux devient

$$s_{\text{tot}}(t) = A \cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

avec $A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \right|$.

Finalement, en étudiant l'argument du cosinus dépendant du temps, on constate que la somme des signaux oscille avec la même pulsation ω que les signaux s_1 et s_2 .

II.1.b Signaux de différentes amplitudes

Cette fois considérons deux signaux tels que

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Décomposons les cosinus de chacun des signaux à l'aide de la formule trigonométrique vue plus tôt

$$s_1(t) = A_1 \cos(\omega t) \cos \varphi_1 - \sin(\omega t) \sin \varphi_1$$

$$s_2(t) = A_2 \cos(\omega t) \cos \varphi_2 - \sin(\omega t) \sin \varphi_2.$$

La somme des ces amplitudes est ainsi

$$s_{\text{tot}}(t) = (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) \cos(\omega t) - (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2) \sin(\omega t).$$

Afin d'exprimer la somme des signaux de manière plus compacte, on peut toujours changer la forme des termes ne dépendant pas du temps, tels que

$$A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 = A \cos \psi$$

et

$$A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 = A \sin \psi$$

ainsi

$$s_{\text{tot}}(t) = A \cos \psi \cos(\omega t) - A \sin \psi \sin(\omega t)$$

$$s_{\text{tot}}(t) = A (\cos \psi \cos(\omega t) - \sin \psi \sin(\omega t)).$$

On reconnaît une formule trigonométrique, et on peut alors écrire

$$s_{\text{tot}}(t) = A \cos(\omega t + \psi).$$

On voit que la somme de deux signaux d'amplitudes différentes, mais de pulsation égale, oscille à la même pulsation.

Étudions maintenant l'amplitude de la somme des signaux. Mettons au carré les deux expressions introduites plus tôt

$$(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 = A^2 \cos^2 \psi$$

$$(A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2 = A^2 \sin^2 \psi.$$

Si on somme les deux

$$(A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2)^2 + (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)^2 = A^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)$$

$$A_1^2 \cos^2 \varphi_1 + 2A_1 A_2 \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + A_2^2 \cos^2 \varphi_2 + A_1^2 \sin^2 \varphi_1 + 2A_1 A_2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + A_2^2 \sin^2 \varphi_2 = A^2 (\cos^2 \psi + \sin^2 \psi)$$

sachant que $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, il vient que

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = A^2$$

et en utilisant la relation trigonométrique $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

$$A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = A^2$$

soit

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

On voit que l'amplitude du signal résultant n'est pas égale à la somme des amplitudes.

♥ Définition

La formule des interférences nous donne l'amplitude A du signal résultant de la superposition de deux signaux de même fréquence d'amplitude A_1 et A_2 et de phase φ_1 et φ_2

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

👉 Nota bene

Si on prend $A_1 = A_2 \equiv A_0$, il vient que

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2A_0 A_0 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$A = \sqrt{2A_0^2 + 2A_0^2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

$$A = A_0 \sqrt{2(1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2))}.$$

Or

$$\cos(a + a) = \cos a \cos a - \sin a \sin a$$

$$\cos(a - a) = \cos a \cos a + \sin a \sin a$$

donc

$$\cos(a - a) + \cos(a + a) = 2 \cos^2 a$$

$$\cos(0) + \cos(2a) = 2 \cos^2 a$$

$$1 + \cos(2a) = 2 \cos^2 a.$$

On voit donc que

$$1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)$$

soit

$$A = A_0 \sqrt{2 \times 2 \cos^2 \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right)}$$

$$A = 2A_0 \left| \cos \left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right) \right|.$$

On retrouve l'expression obtenue dans le cas de deux ondes de mêmes amplitudes.

II.1.c Influence du déphasage

On a vu que la différence entre la phase des signaux influençait l'amplitude de la somme des signaux.

♥ Définition

Cette différence de phase est appelée **déphasage** des signaux, notée $\Delta\varphi$.
Le déphasage entre le signal s_1 et le signal s_2 est de manière générale égale à

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_1 + \varphi_1) - (\omega t - kx_2 + \varphi_2)$$

et pour $x_1 = x_2$

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Le déphasage entre le signal s_2 et le signal s_1 est de manière générale égale à

$$\Delta\varphi = (\omega t - kx_2 + \varphi_2) - (\omega t - kx_1 + \varphi_1)$$

et pour $x_1 = x_2$

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

D'après la formule des interférences, l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux signaux de même fréquence d'amplitude A_1 et A_2 et de déphasage $\Delta\varphi$ est

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \Delta\varphi}.$$

♥ Définition

L'amplitude résultante A est **maximale** lorsque

$$\cos \Delta\varphi = 1$$

donc lorsque $\Delta\varphi = 2m \times \pi$ avec m un entier relatif $m \in \mathbb{Z}$.

Dans ce cas

$$A_{max} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2}$$

$$A_{max} = \sqrt{(A_1 + A_2)^2}$$

$$A_{max} = A_1 + A_2.$$

♥ Définition

L'amplitude résultante A est **minimale** lorsque

$$\cos \Delta\varphi = -1$$

donc lorsque $\Delta\varphi = (2m + 1) \times \pi$ avec m un entier relatif $m \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas

$$A_{min} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2}$$

$$A_{min} = \sqrt{(A_1 - A_2)^2}$$

$$A_{min} = |A_1 - A_2|.$$

Comme on peut le voir sur la Figure 4.9, on peut obtenir la valeur du déphasage entre deux signaux en étudiant leur évolution temporelle. Pour cela il faut étudier les maxima des signaux qui sont les plus proches. Parmi ces deux maxima, il faut repérer le signal qui atteint le maxima en premier, dans notre cas il s'agit du signal $s_1(t)$, on étudiera donc le déphasage $\Delta\varphi$ tel quel

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Ce déphasage est lié au retard du signal $s_2(t)$ par rapport au signal $s_1(t)$ qu'on peut noter Δt tel que

$$\Delta\varphi = \omega\Delta t = \frac{2\pi}{T}\Delta t$$

avec T la période des signaux.

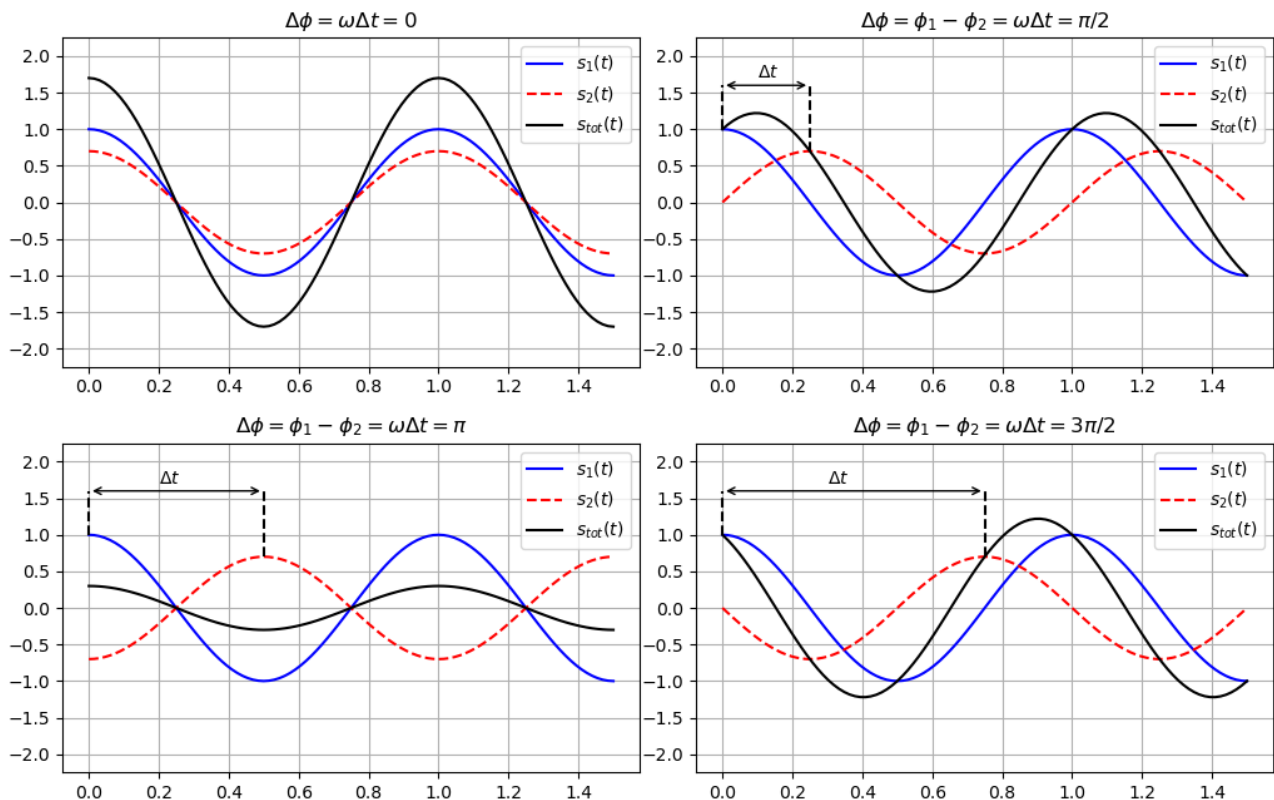


Figure 4.9 – Superposition de deux signaux $s_1(t)$ et $s_2(t)$ pour différente valeur du déphasage $\Delta\varphi = \phi_1 - \phi_2$.

II.2. Interférence entre deux ondes acoustiques ou mécaniques de même fréquence

Nous avons mené l'étude précédente en considérant deux signaux dont l'évolution était connu au niveau du point d'étude de leur superposition.

Considérons deux sources ponctuelles S_1 et S_2 émettant des ondes monochromatiques, donc sinusoïdales, de même pulsation se propageant vers un point M . On veut obtenir l'expression de la superposition des deux ondes en ce point. Il faut donc déterminer l'expression des signaux des deux ondes au point M , soit $s_1(M, t)$ et $s_2(M, t)$.

Au niveau de la source S_1 le signal émis est

$$s_1(S_1, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_{01})$$

avec φ_{01} la phase à l'origine de la source S_1 .

Comme on l'a vu dans la leçon précédente, si on néglige tout phénomène d'affaiblissement de l'onde, le signal de l'onde en M identique à celui en S_1 , mais retardé d'une durée S_1M/c , avec c la célérité de l'onde. Il vient donc

$$s_1(M, t) = A_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{S_1M}{c}\right) + \varphi_{01}\right)$$

$$s_1(M, t) = A_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{S_1M}{c} + \varphi_{01}\right)$$

$$s_1(M, t) = A_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{S_1M}{\lambda} + \varphi_{01}\right).$$

De manière identique, le signal de l'onde issue de la source S_2 en M est

$$s_2(M, t) = A_0 \cos\left(\omega t - 2\pi \frac{S_2M}{\lambda} + \varphi_{02}\right).$$

Le déphasage entre les signaux s_1 et s_2 au point M est alors

$$\Delta\varphi = -2\pi \frac{S_1M}{\lambda} + \varphi_{01} - \left(-2\pi \frac{S_2M}{\lambda} + \varphi_{02}\right)$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (S_2M - S_1M) + \varphi_{01} - \varphi_{02}.$$

D'après la formule des interférences, l'amplitude du signal obtenu par superposition des deux ondes est alors

$$A = 2A_0 \left| \cos\left(\frac{\pi}{\lambda} (S_2M - S_1M) + \frac{\varphi_{01} - \varphi_{02}}{2}\right) \right|.$$

Ainsi l'amplitude de la superposition de signaux de même pulsation et de même phase à l'origine en un point M dépend de la position de ce point vis-à-vis des sources des signaux : la valeur de l'amplitude de ce signal et donc de l'onde qui lui est liée est **modulée dans l'espace**, c'est ce qu'on appelle **le phénomène d'interférence**.

♥ Définition

Lorsque l'on superpose deux signaux, l'amplitude du signal qui en résulte varie spatialement entre un maximum et un minimum qui peut être nul. Ce phénomène est appelé **interférence** et concerne tout phénomène ondulatoire.

Synthèse

Connaissances

- Interférences entre deux ondes de même fréquence.
- Interférences constructives, interférences destructives.

Savoir-faire

- **Caractériser** le phénomène d'interférences de deux ondes et en citer les conséquences concrètes.
- **Établir** les conditions d'interférences constructives et destructives de deux ondes issues de deux sources ponctuelles en phase dans le cas d'un milieu de propagation homogène.

Leçon III. Interférences entre deux ondes lumineuses

Le phénomène d'interférences entre deux ondes lumineuses est étudié séparément car les ondes lumineuses ont des caractéristiques particulières. Nous allons présenter ces particularités et en déduire leur impact sur le phénomène d'interférence.

III.1. Caractéristiques des ondes lumineuses

III.1.a Phase à l'origine d'une source de lumière

Considérons une source de lumière **monochromatique donc sinusoïdale**. Chaque point S de la source émet une onde lumineuse qui est de la forme

$$s(S, t) = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0(t)).$$

Dans le cas d'une source de lumière, mise-à-part le laser, la phase à l'origine est différente pour chaque point S de la source et change de manière aléatoire au bout d'une durée appelé **temps de cohérence de la source**, c'est pourquoi on la note $\varphi_0(t)$. Ce caractère aléatoire est aux collisions des particules qui émettent les radiations lumineuses.

Lorsque cette onde se déplace en un point M distant d'un point S_1 de la source, l'onde lumineuse est de la forme

$$s_1(M, t) = A_1 \cos\left(\omega\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right) + \varphi_{01}\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right).$$

III.1.b Éclairement

On se rappelle que la fréquence d'une onde lumineuse est comprise entre 400 THz et 750 THz, cela correspond à des périodes comprises entre $2,5 \cdot 10^{-15}$ s et $1,3 \cdot 10^{-15}$ s. Or, aucun capteur n'est assez rapide pour suivre de telles variations. Si on les utilisait pour mesurer la variation d'un signal lumineux en un point M issu d'un point source S_1 , ils mesureraient la moyenne temporelle du signal durant leur temps de réponse, soit

$$\langle s_1(M, t) \rangle = \left\langle A_1 \cos\left(\omega\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right) + \varphi_{01}\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right) \right\rangle = 0$$

car la moyenne temporelle d'un cosinus ou d'un sinus mesurée sur un temps très grand devant sa période est nulle.

C'est pourquoi les capteurs d'onde lumineuse ne sont pas sensible à la variation de l'onde lumineuse $s_1(M, t)$, mais à l'**éclairement** \mathcal{E}_1 qui est proportionnel à la moyenne temporelle du carré du signal, soit au point M

$$\mathcal{E}_1(M) = K \langle s_1^2(M, t) \rangle$$

avec K une constante que l'on ne précisera pas.

Pour une onde sinusoïdale l'éclairement serait alors

$$\mathcal{E}_1(M) = K \left\langle A_1^2 \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right) + \varphi_{01}\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right) \right\rangle$$

$$\mathcal{E}_1(M) = K A_1^2 \left\langle \cos^2\left(\omega\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right) + \varphi_{01}\left(t - \frac{S_1 M}{c}\right)\right) \right\rangle$$

or la moyenne temporelle du carré d'un cosinus ou d'un sinus mesurée sur un temps très grand devant sa période vaut $1/2$, donc

$$\mathcal{E}_1(M) = \frac{1}{2} K A_1^2.$$

On constate que l'éclairement d'une onde monochromatique en un point M ne dépend que du carré de la valeur de l'amplitude de cette onde.

III.1.c Éclairement dû à deux ondes

On peut se servir de la conclusion précédente pour obtenir l'éclairement dû à la superposition de deux ondes lumineuses issues de deux points différents S_1 et S_2 dont l'expression au point M est

$$s_1(M, t) = A_1 \cos \left(\omega \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) + \varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) \right)$$

$$s_2(M, t) = A_2 \cos \left(\omega \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) + \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) \right).$$

Ces deux ondes se superposent pour former une nouvelle onde sinusoïdale d'amplitude $A(M)$ dont la valeur varie selon la position du point M de telle manière que

$$A(M) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \left(\omega \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) + \varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) - \left(\omega \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) + \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) \right) \right)}$$

$$A(M) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \left(\omega \left(\frac{S_2 M - S_1 M}{c} \right) + \varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) - \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) \right)}.$$

Or nous avons vu que l'éclairement d'une onde sinusoïdale dépendait de la moyenne temporelle du carré de l'amplitude, soit

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \frac{1}{2} K \langle A^2(M) \rangle$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \frac{1}{2} K \left\langle A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \left(\omega \left(\frac{S_2 M - S_1 M}{c} \right) + \varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) - \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) \right) \right\rangle$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \frac{1}{2} K \langle A_1^2 \rangle + \frac{1}{2} K \langle A_2^2 \rangle + 2A_1 A_2 \left\langle \cos \left(\omega \left(\frac{S_2 M - S_1 M}{c} \right) + \varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) - \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) \right) \right\rangle$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \left\langle \cos \left(\omega \left(\frac{S_2 M - S_1 M}{c} \right) + \varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) - \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) \right) \right\rangle$$

avec $\mathcal{E}_1(M)$ et $\mathcal{E}_2(M)$ les éclairagements de chacune des ondes aux points M .

Les deux ondes interfèrent si la moyenne temporelle du cosinus n'est pas nulle. Cela est le cas si les phases à l'origine $\varphi_{01}(t, M)$ et $\varphi_{02}(t, M)$ ne voient pas leur valeur variée aléatoirement, donc si la durée de moyennage du capteur est courte devant le temps de cohérence de la source : le temps durant lequel les phases restent constantes. Or ce n'est vrai que pour la source laser. Dans tous les autres cas, $\varphi_{01}(t, M)$ et $\varphi_{02}(t, M)$ varient aléatoirement, et la moyenne du cosinus est alors nulle.

Mise-à-part l'utilisation d'un laser, il existe un autre moyen pour que le cosinus ne soit pas nul et qu'il y ait donc interférence entre les deux ondes : c'est qu'elles soient issues de la même source comme cela est illustré Figure 4.10.

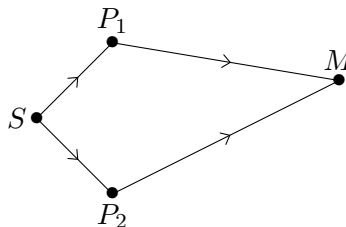


Figure 4.10 – Propagation de deux signaux s_1 et s_2 issus de la même source S .

Dans ce cas la différence de phase à l'origine entre les deux ondes au point M est constante

$$\varphi_{01} \left(t - \frac{S_1 M}{c} \right) - \varphi_{02} \left(t - \frac{S_2 M}{c} \right) = \text{cst} \equiv \Delta\varphi_0$$

on dit que **les deux ondes sont cohérentes**.

Lorsque $\Delta\varphi_0 = 0$, on n'a plus seulement que les ondes sont cohérentes mais qu'elles sont **synchrones**. On se place dans ce cas dans la suite du cours.

L'éclairement au point M dû à deux ondes issues du même point source, mais suivant des parcours différents est ainsi

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda} (SP_2M - SP_1M) \right) \right\rangle$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n(P_2M - P_1M) \right) \right\rangle$$

avec n l'indice de réfraction du milieu dans lequel se propagent les ondes entre les points P_1 , P_2 et M .

♥ Définition

On appelle **différence de chemin optique** au point M la différence entre les longueurs totales des deux trajets suivis par la lumière entre P_2 et M et entre P_1 et M , multipliées par l'indice n du milieu traversé, soit

$$\delta(M) = n(P_2M - P_1M).$$

On constate que l'éclairement au point M dépend uniquement de la différence de chemin optique δ .

III.2. Expériences des trous d'Young

L'expérience des trous d'Young, présentée par le physicien Thomas Young en 1801, permet d'observer cette variation de l'éclairement produit par la superposition de deux ondes issues du même point source.

Elle repose sur la modélisation d'un point source par une source large suivie d'un diaphragme. Une onde lumineuse sphérique se propage alors à partir du diaphragme. Sur le parcours de cette onde, on place deux trous séparés par une distance a . On regarde alors la variation d'éclairement au niveau des points M d'un écran placé à une distance D des deux trous comme cela est illustré Figure 4.11.

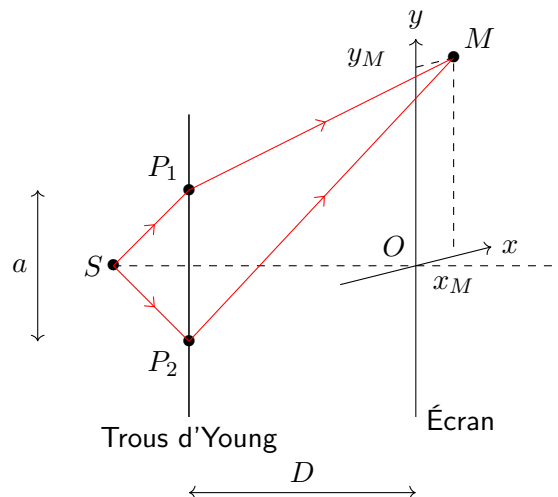


Figure 4.11 – Expérience des trous d'Young.

Afin de calculer l'éclairement à un point M de l'écran dû à la superposition des deux ondes issues du même point source S et passant par les trous d'Young, on calcule la différence de chemin optique au point M $\delta(M)$.

D'après le schéma de l'expérience des trous d'Young, la distance P_1M est telle que

$$P_1M = \sqrt{\left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2 + D^2}$$

$$P_1M = D\sqrt{1 + \frac{\left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{D^2}}$$

Considérons le cas où $D \gg a$ et $D \gg y$, la distance entre les trous et l'écran est très grande devant la distance du point M par rapport au point O de l'écran. Il vient alors que

$$\frac{\left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{D^2} \ll 1$$

et si on utilise l'approximation $(1 + \varepsilon)^a \approx 1 + a\varepsilon$ lorsque $\varepsilon \ll 1$, la distance P_1M est alors

$$P_1M \approx D \left(1 + \frac{\left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{2D^2}\right)$$

$$P_1M \approx D + \frac{\left(y_M + \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{2D}$$

On peut montrer que la distance P_2M est de manière similaire

$$P_2M \approx D + \frac{\left(y_M + \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{2D}$$

La différence de chemins optiques au point M est alors

$$\delta(M) = n(P_2M - P_1M)$$

$$\delta(M) \approx n \left(D + \frac{\left(y_M + \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{2D} - D - \frac{\left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 + x_M^2}{2D} \right)$$

$$\delta(M) \approx \frac{n}{2D} \left(\left(y_M + \frac{a}{2}\right)^2 - \left(y_M - \frac{a}{2}\right)^2 \right)$$

$$\delta(M) \approx \frac{n}{2D} \left(2\frac{a}{2}y_M + 2\frac{a}{2}y_M \right)^2$$

$$\delta(M) \approx \frac{na y_M}{D}$$

On peut alors établir les conditions d'interférences constructive ou destructive en fonction de la différence de chemin optique au point M de l'écran $\delta(M)$.

Si on reprend l'expression de l'éclairement en un point M

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \left\langle \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n(P_2M - P_1M) \right) \right\rangle$$

soit comme l'argument du cosinus ne dépend pas du temps

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_0} n(P_2M - P_1M) \right).$$

Si l'argument du cosinus, soit la différence de phase ou déphasage $\Delta\varphi$ est égale à un multiple entier de 2π , soit

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = m \times 2\pi$$

alors la différence de chemin optique correspond à un multiple entier de la longueur d'onde dans le vide

$$\delta(M) = m \times \lambda_0.$$

Et dans ce cas, l'éclairement est tel que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}.$$

Lorsque le déphasage est un multiple entier 2π **l'éclairement dû à deux signaux lumineux synchrones de même fréquence en un point est supérieur à la somme des éclairements de ces signaux. On dit que les signaux lumineux interfèrent constructivement.**

Lorsque les amplitudes des deux ondes sont les mêmes, donc lorsque leur éclairement individuel est identique $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_0$, il vient que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = 2\mathcal{E}_0(M) + 2\mathcal{E}_0(M) = 4\mathcal{E}_0(M).$$

Si l'argument du cosinus, soit la différence de phase ou déphasage $\Delta\varphi$ est maintenant égale à un multiple entier de 2π plus π , soit

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = (2m + 1) \times \pi$$

alors la différence de chemin optique correspond à un multiple entier de la longueur d'onde plus une demi longueur d'onde dans le vide

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda_0.$$

Et dans ce cas, l'éclairement est tel que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) - 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)}.$$

Lorsque le déphasage est un multiple entier 2π **l'éclairement dû à deux signaux lumineux synchrones de même fréquence en un point est inférieur à la somme des éclairements de ces signaux. On dit que les signaux lumineux interfèrent destructivement.**

Lorsque les amplitudes des deux ondes sont les mêmes, donc lorsque leur éclairement individuel est identique $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_0$, il vient que

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = 2\mathcal{E}_0(M) - 2\mathcal{E}_0(M) = 0.$$

On retiendra que dans ce cas **lumière + lumière = obscurité.**

♥ Définitions

L'interférence lumineuse est **constructive** si et seulement si

$$\Delta\varphi(M) = 2m \times \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = 2m \times \pi$$

$$\delta(M) = m \times \lambda_0$$

où $m \in \mathbb{Z}$ et λ_0 la longueur d'onde dans le vide.

L'interférence lumineuse est **destructive** si et seulement si

$$\Delta\varphi(M) = (2m + 1) \times \pi$$

$$\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M) = (2m + 1) \times \pi$$

$$\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \times \lambda_0.$$

III.2.a Franges brillantes, franges sombres et interfranges

Reprenons l'expression de l'éclairement total au niveau des points M de l'écran et considérons que les éclairements individuels sont les mêmes $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_0$, soit

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = \mathcal{E}_1(M) + \mathcal{E}_2(M) + 2\sqrt{\mathcal{E}_1(M)\mathcal{E}_2(M)} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = 2\mathcal{E}_0(M) + 2\mathcal{E}_0(M) \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)$$

$$\mathcal{E}_{\text{tot}}(M) = 2\mathcal{E}_0(M) \left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} \delta(M)\right)\right).$$

On appelle **frange brillante d'ordre** m le lieu des points M sur l'écran tel que $\delta(M) = m\lambda_0$. Cette frange d'ordre m est l'ensemble des points tels que

$$\delta(M) = \frac{na y}{D} = m\lambda_0$$

$$x = m \frac{\lambda_0 D}{na}$$

comme il n'y a qu'une valeur de y qui respecte cette relation, on note cette valeur y_m , et cela correspond à l'équation d'une droite $y = \text{cst}$: une droite perpendiculaire à l'axe Oy sur l'écran, donc une droite parallèle à l'axe Ox .

Calculons la distance entre deux franges brillantes consécutives $m + 1$ et m , soit

$$y_{m+1} - y_m = (m + 1) \frac{\lambda_0 D}{na} - m \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda_0 D}{na}.$$

L'écart entre deux franges brillantes le long de l'axe Oy est le même pour toutes les franges brillantes, on appelle cette distance **l'interfrange** notée i et valant $\frac{\lambda_0 D}{na}$.

On appelle **frange sombre d'ordre** $m + \frac{1}{2}$ le lieu des points M sur l'écran tel que $\delta(M) = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0$. Cette frange d'ordre $m + \frac{1}{2}$ est l'ensemble des points tels que

$$\delta(M) = \frac{nay}{D} = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda_0$$

$$y = \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na}$$

comme il n'y a qu'une valeur de y qui respecte cette relation, on note cette valeur $y_{m+\frac{1}{2}}$, et cela correspond à l'équation d'une droite $x = \text{cst}$: une droite perpendiculaire à l'axe Oy sur l'écran, donc une droite parallèle à l'axe Ox .

Calculons la distances entre deux franges brillantes consécutives $m + 1 + \frac{1}{2}$ et $m + \frac{1}{2}$, soit

$$y_{m+1+\frac{1}{2}} - y_{m+\frac{1}{2}} = \left(m + 1 + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na} - \left(m + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda_0 D}{na} = \frac{\lambda_0 D}{na} = i.$$

Deux franges sombres consécutives sont également espacées d'une distance égale à l'interfrange i .

♥ Définition

La figure d'interférence produite par les trous d'Young P_1 et P_2 sur un écran distant de D est constituée de franges rectilignes dont l'éclairement varie de manière sinusoïdale dans la direction de l'axe de trous. Il apparaît des franges brillantes et des franges sombres alignées perpendiculairement à l'axe des trous, et régulièrement espacées entre elles d'une distance appelée interfrange.

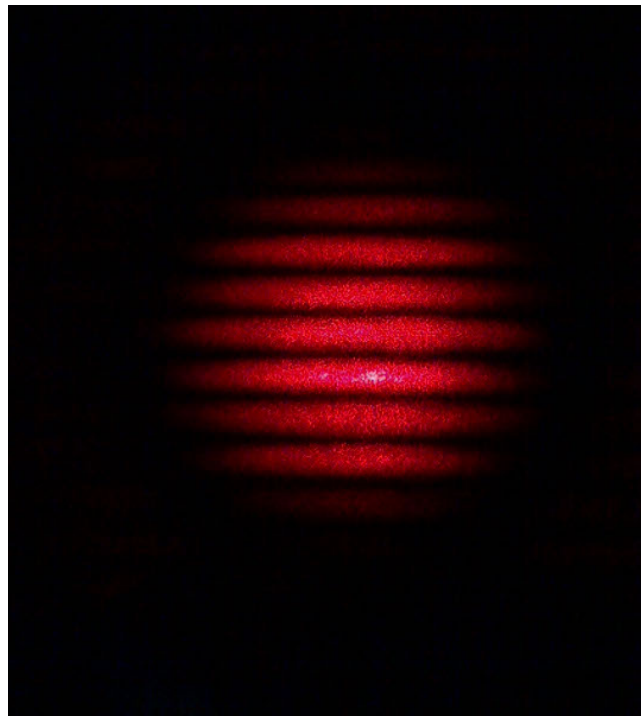


Figure 4.12 – Figure d'interférence produite par les trous d'Young¹.

1. Source : [site de François Legrand](#).

III.3. Diffraction ou retour sur les limites de l'optique géométrique

Revenons au phénomène de diffraction qui illustre la limite d'utilisation du modèle géométrique de la lumière et que nous avons évoqué dans la leçon Modèle de l'optique géométrique.

Grâce à travaux d'Young au début du XIV^{ème} siècle, la nature ondulatoire de la lumière est confirmée : pour calculer l'éclairement produit par les ondes lumineuses il faut d'abord sommer les signaux lumineux et ensuite calculer l'éclairement du signal résultant.

En 1815, Augustin Fresnel, complète les travaux d'Huyguens afin d'interpréter le phénomène de diffraction de la lumière de manière quantitative. Considérons une ouverture quelconque comme cela est illustré Figure 4.13.

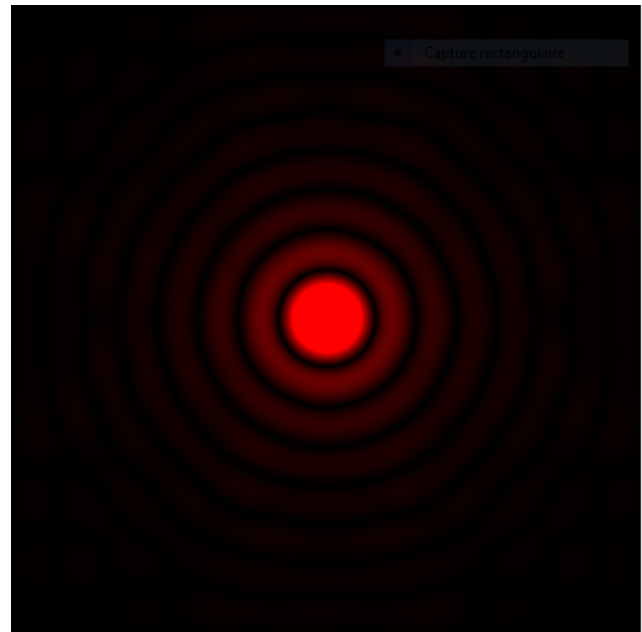
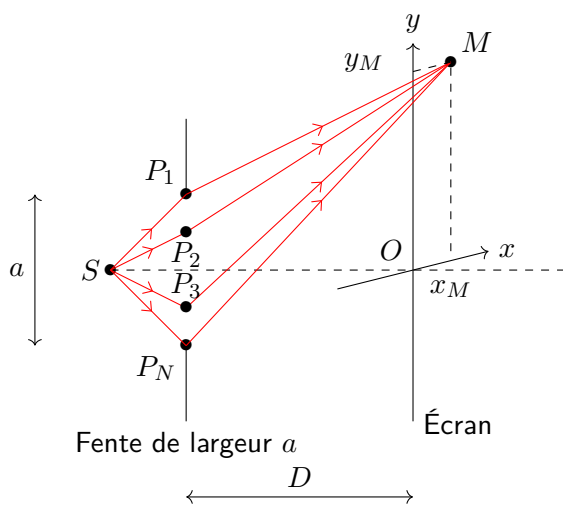


Figure 4.13 – (a) Diffraction par une ouverture de taille a et (b) figure obtenue sur l'écran¹.

L'idée de Fresnel est de considérer l'ouverture par laquelle passe la lumière comme un ensemble de sources ponctuelles, et d'utiliser la théorie de Huyguens qui considère que ces sources émettent des ondes sphériques. Comme dans le cas des trous d'Young, les sources émettent des ondes dans toutes les directions et qui se superposent au niveau des points de l'écran. Néanmoins, cette fois ce ne sont pas seulement deux signaux qui se superposent, mais une infinité, l'éclairement est donc obtenu à partir de la somme d'une infinité de signaux.

Nous n'étudierons pas l'expression de l'éclairement due à la somme des signaux émis par toutes les sources ponctuelles d'ondes sphériques modélisant l'ouverture du diaphragme. Mais nous retiendrons que les interférences des signaux lumineux émis par ces sources sont à l'origine de la diffraction : en certains lieux de l'espace ce sont les conditions d'interférences constructives qui sont réunies et en d'autres lieux, ce sont celles des interférences destructives. Comme ces sources émettent des ondes sphériques, on doit étudier tout le plan de l'écran, et pas seulement les positions qu'aurait croisées un rayon lumineux dans le cas du modèle géométrique de la lumière.

1. Source : [site de François Legrand](#).

♥ Définition

Lorsqu'un faisceau lumineux traverse une ouverture, le **phénomène de diffraction** se manifeste par un étalement angulaire du faisceau après l'ouverture avec un demi angle d'ouverture θ dont l'ordre de grandeur est lié à la taille caractéristique de l'ouverture et à la longueur d'onde du faisceau, tel que

$$\sin \theta \approx \frac{\lambda}{a}$$

On retiendra le critère $a < 1000\lambda$ qui permet de déterminer si le phénomène de diffraction est observable.

Dans le cas où $a = 1000\lambda$

$$\sin \theta \approx \frac{1}{1000}$$

or pour $\theta \ll 1$, il vient que $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$ donc

$$\tan \theta \approx \frac{1}{1000}$$

on peut interpréter cette relation comme un étalement de 1 mm de part et d'autre du faisceau après 1 m de propagation.

En conclusion, on retiendra que le phénomène de diffraction est commun à toutes les ondes, qu'importe leur nature, électromagnétique ou mécanique. La Figure 4.14 illustre ce caractère universel : les ondes de surface subissent également la diffraction.



Figure 4.14 – Diffraction d'une onde de surface

Synthèse

Connaissances

- Interférences de deux ondes lumineuses de même fréquence, différence de chemin optique, conditions d'interférences constructives ou destructives.
- Trous d'Young éclairé par une source monochromatique.
- Diffraction d'une onde par une ouverture : conditions d'observation et caractéristiques. Angle caractéristique de diffraction.

Savoir-faire

- **Déterminer** les lieux d'interférences constructives et les lieux d'interférences destructives dans le cas des trous d'Young. **Relier** le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique.
- **Établir** l'expression littérale de la différence de chemin optique linéarisée entre les deux ondes.
- **Établir** l'expression de l'interfrange. **Caractériser** le phénomène de diffraction dans des situations variées et en tirer des conséquences concrètes.
- **Exploiter** la relation exprimant l'angle caractéristique de diffraction en fonction de la longueur d'onde et de la taille de l'ouverture.