Chapitre 9 : Dérivabilité

Table des matières

1 Introduction

2 Dérivabilité locale

2.1 Dérivabilité en un point

On considère dans tout le chapitre I un intervalle.

Définition : taux d'accroissement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a+h \in I$. On appelle **taux d'accroissement de f en a d'amplitude** h le réel $\Delta_f(a,h) = \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Remarque 1 *On note parfois le taux d'accroisement $\Delta(a,h)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction en question.*

Exemple de taux d'accroissement

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, son taux d'accroissement est

$$\Delta_f(a,h) = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h^2+2ah}{h} = h+2a$$

Définition : dérivabilité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $h \mapsto \Delta_f(a,h)$ admet une limite en 0, c'est à dire

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite.

Remarque 2 *Une version alternative de cette définition est de demander que l'application $h \mapsto \Delta_f(a,h)$ admette un prolongement continue en* 0.

Exemple : dérivée en un point

Reprenons l'exemple précédent. La fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ car $\lim\limits_{h\to 0} \Delta_f(a,h) = \lim\limits_{h\to 0} h+2a = 2a$. Ainsi $f'(a) = 2a$.

Application à la SI

En sciences de l'ingénieur on peut étudier la fonction **sinus cardinal** définie par l'expression $sinc(x) = \dfrac{\sin \pi x}{\pi x}$. Cette fonction est donnée par le taux d'accroissement de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sin \pi x}{\pi}$ en $a = 0$. Comme f est dérivable en 0 on en déduit que la fonction sinus cardinal est prolongeable par continuité en zéro et vauf en ce point $sinc(0) = 1$.

Méthode : Montrer qu'une application est dérivable en un point

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en un point a, on suit en général les étapes suivantes :

1. On forme le taux d'accroissement $\Delta(a,h)$
2. Simplifie au maximum son expression en essayant de simplifier la partie en "h" au dénominateur.
3. On fait tendre h vers 0 et on détermine la valeur de la limite.
4. Cette limite vaut $f'(a)$.

Exercice 1 *Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^n$ est dérivable en $a \in \mathbb{R}$ et calculer $g'(a)$.*

2.2 Dérivabilité à gauche et à droite

Définition : dérivabilité à gauche et à droite en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable à gauche en a** (respectivement **dérivable à droite en a**) si

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_d(a)$$

$$\text{(respectivement } \lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_g(a))$$

Proposition : dérivable ⇔ dérivable à gauche et à droite de même limite

Une fonction est dérivable en un point si et seulement si elle est dérivable à la fois à gauche et à droite en ce point de même valeur c'est à dire que f est dérivable en a si :

$$f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$$

Risque d'erreur

Une application peut être dérivable à gauche et à droite mais pas dérivable en ce point si les dérivées à gauche et à droite respectives ne sont pas identiques.

Exemple

L'application partie entière est dérivable à droite mais pas à gauche en $a = 1$. En effet,

1. soit $0 < h < 1$, $\Delta(1,h) = \dfrac{\lfloor 1+h\rfloor - \lfloor 1\rfloor}{h} = \dfrac{1-1}{h} = 0$. Par passage à la limite, $\lim\limits_{h\to 0^+} \Delta(1,h) = 0$ et la dérivée à droite de partie entière en 1 vaut 0.
2. soit $-1 < h < 0$, $\Delta(1,h) = \dfrac{\lfloor 1+h\rfloor - \lfloor 1\rfloor}{h} = \dfrac{0-1}{h} = \dfrac{-1}{h}$ qui n'admet pas de limite lorsque h tend vers 0.

Remarque 3 *Par la dernière proposition, on en déduit que la partie entière n'est pas dérivable en* 1 *puisque non dérivable à gauche en ce point.*

Exercice 2 *Montrer que la fonction valeur absolue est dérivable en tout point* $a \in \mathbb{R}^\star$ *mais n'est pas dérivable en* 0.

2.3 Développement limité

Définition : développement limité à l'ordre 1

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. On dit que f **admet un développement limité à l'ordre 1 en a** s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une application $\epsilon :]a-\eta, a+\eta[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]a-\eta, a+\eta[$,

$$f(x) = f(a) + \lambda \times (x-a) + (x-a) \times \epsilon(x)$$

où $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$. On note dans ce cas que f admet un $DL_1(a)$.

Proposition :lien développement limité et dérivabilité

Reprenons les notations de la définition précédente. Alors f est dérivable en a si et seulement si elle admet un $DL_1(a)$ et dans ce cas $\lambda = f'(a)$.

Démonstration :

Exemple

Soit $f : x \mapsto e^x + 2x$. Cette application est bien définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en 0.
On a $f(0) = e^0 + 2.0 = 1$ et $f'(0) = 3$.

Un $DL_1(0)$ de f est de la forme $x \mapsto 1 + 3x + x^2 \times \epsilon(x)$.

Méthode : Comment calculer un $DL_1(a)$ d'une fonction f ?

On suit les étapes suivante :

1. On s'assure que f est dérivable en a.
2. On calcule $f(a)$ et $f'(a)$.
3. une application $x \mapsto f(a) + f'(a) \times (x-a) + (x-a) \times \epsilon(x)$ où $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(x) = 0$ est un $DL_1(a)$ de f.

Remarque 4 *Lorsque on demande un $DL_1(a)$ de f, on ne demande pas de préciser explicitement la forme de ϵ. Ce qui est intéressant en général est l'existence d'un développement limité pas la forme de ϵ.*

Grâce aux développements limités d'ordre 1, on peut démontrer la propriété suivante :

Proposition

Une application dérivable en un point a est continue en a.

Démonstration :

Exercice 3 *Déterminer un $DL_1(2)$ de l'application définie sur $]0, +\infty[$ par $f : x \mapsto x + \ln(x)$.*

2.4 Tangente en un point d'une courbe représentative

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en un point $a \in I$, notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors, la **tangente à $\mathcal{C}_f$ en** $(a, f(a))$ est la droite d'équation cartésienne $y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^3 - x - 1$. On a $f(1) = -1$ et f dérivable en 1 de dérivée $f'(1) = 2$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $(1, 2)$ d'équation $y = 2x - 1$.

Exercice 4 *Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ de l'application $f : x \mapsto (x+1)^2+1$. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ainsi que $T_0(f)$.*

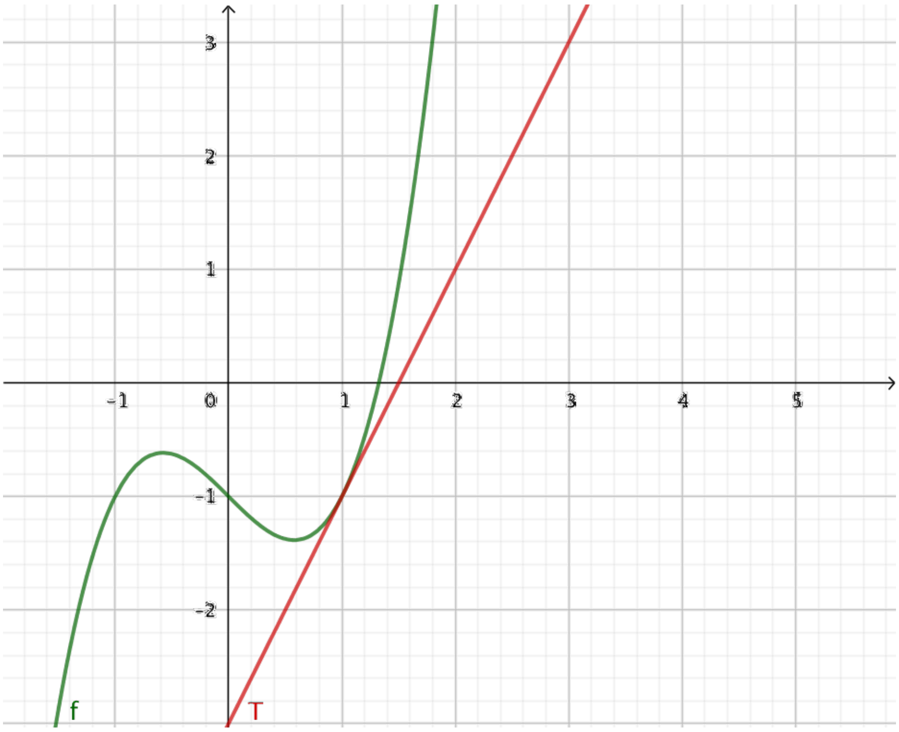
copie.png 

Figure 1 – courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $T_1(f)$

3 Dérivées sur un ensemble

3.1 Définitions

On considère dans cette section, un ensemble $\mathcal{D}$ réunion fini d'intervalles.

Définition : Dérivabilité

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **dérivable sur I** si pour tout $a \in I$ l'application f est dérivable au point a. L'application qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **la dérivée de f** et est notée f'.

Remarque 5 *Lorsqu'il n'y aura pas d'ambigüité sur l'ensemble de définition on dira que f est dérivable sans faire référence à son ensemble de départ.*

Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable de dérivée $f'(a) = 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons déjà vu que $\lim\limits_{h \to 0} \Delta(a, h) = 2a$.

Par définition, une application $f : I \to \mathbb{R}$ n'est pas dérivable s'il existe $x_0 \in I$ tel que f ne soit pas dérivable en x_0.

Exemple : une fonction non dérivable

La fonction valeur absolue, ici notée f, est définie sur $\mathbb{R}$ et continue. Elle est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}^\star$ car :

1. Si $a > 0$ alors pour tout $h \neq 0$ petit par rapport à a, on a $\dfrac{|a+h| - |a|}{h} = \dfrac{a+h-a}{h} =$

copie.png

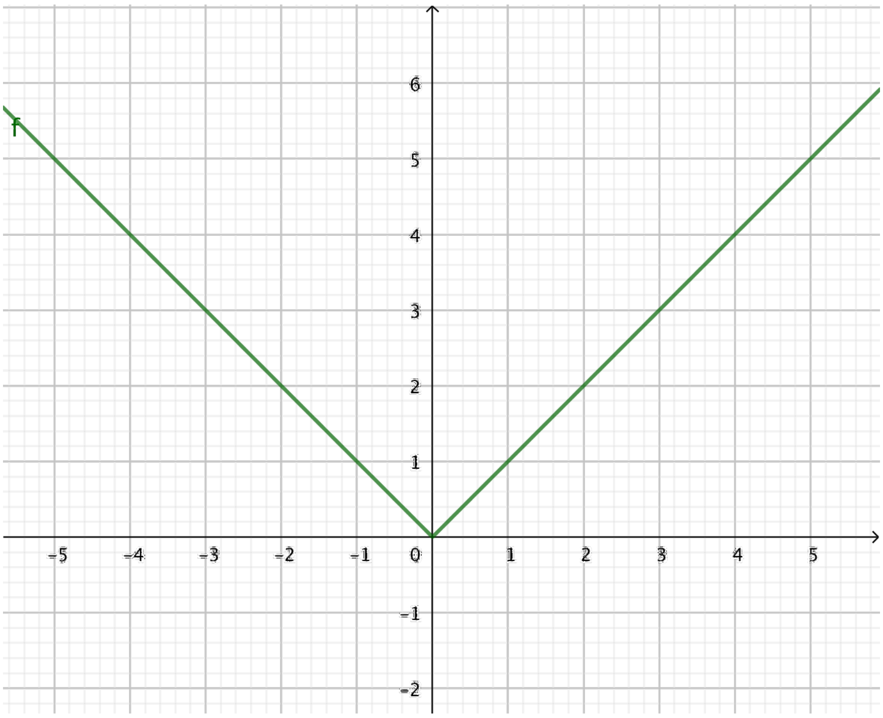


FIGURE 2 – Graphe de la fonction valeur absolue

$\frac{h}{h} = 1$. On en déduit par passage à la limite $h \to 0$ que $f'(a) = 1$

2. Si $a < 0$ alors pour tout $h \neq 0$ petit par rapport à a, on a $\frac{|a+h|-|a|}{h} = \frac{-a-h+a}{h} = \frac{-h}{h} = -1$. On en déduit par passage à la limite $h \to 0$ que $f'(a) = -1$

Elle n'est pas dérivable en 0 car d'après les deux points précédents $\lim_{h\to 0^+} \Delta(0,h) = 1 \neq -1 = \lim_{h \to 0^-} \Delta(0,h)$.

3.2 Dérivées des fonctions usuelles

Le tableau suivant est à connaître. Il répertorie les fonctions dérivées de fonctions classiques.

Application I	Ensemble de dérivabilité	$f'(x)$
$k \in \mathbb{R}$, $x \mapsto k$	$\mathbb{R}$	0
$x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ où $n \in \mathbb{N}^\star$	$\mathbb{R}^\star$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto x^a$ où $a \in]0, +\infty[$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto ax^{a-1}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \exp(x)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto \exp(x)$
$x \mapsto \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^\star$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$x \mapsto \lvert x\rvert$	$\mathbb{R}^\star$	$x \mapsto \begin{cases} 1 \text{ si } x > 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}$

3.3 Opérations sur les dérivées

Les fonctions dérivables le restent par certaines opérations tout comme la continuité. On a le théorème suivant :

Théorème : stabilité par opérations algébriques
Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors les fonctions suivantes sont dérivables sur I et leur nombre dérivé en $x \in I$ vaut :

1. $f+g$ et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $f \times g$ et $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
3. $\frac{f}{g}$ si g ne s'annule pas et $(\frac{f}{g})'(x) = \frac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2}$.

Démonstration sur feuille

3.4 Dérivée d'une composée de fonctions

Théorème
Soient I, J deux intervalles et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors l'application $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Démonstration sur feuille

Exemple
Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^x + \ln(x)$ dérivables toutes deux sur $]0, +\infty[$.

Remarquons que f est à valeurs strictement positives donc $g \circ f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = e^x + \frac{1}{x}$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2x \times (e^{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2})$$

Exercice 5
1. *Démontrer que la dérivée d'une fonction paire sur $\mathbb{R}$ est une fonction impaire.*
2. *Que dire de la parité de la dérivée d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$?*
3. *La dérivée d'une fonction périodique définie sur $\mathbb{R}$ est-elle périodique ?*

À l'aide du théorème des dérivées de fonctions composées et de la définition de fonction puissance $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(x)}$ pour deux fonctions f et g à valeurs strictement positives.

Corollaire
Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs strictement positives. Alors $x \mapsto f(x)^{g(x)}$ est dérivable sur I.

Méthode

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables. Pour calculer la dérivée de $g \circ f$ en $x \in I$:

1. on calcule d'abord les dérivée $f'(x)$ et g'.
2. on calcule $g'(f(x))$.
3. on réalise le produit $f'(x) \times g'(f(x))$ qui est la dérivée $(g \circ f)'(x)$.

Exercice 6 *Calculer la dérivée de* $x \mapsto 3^{x^2+2}$ *sur* $\mathbb{R}$.

4 Dérivées de fonctions réciproques

On sait qu'une fonction continue et strictement monotone $f : I \to \mathbb{R}$ est bijective on peut donc s'intéresser à la dérivabilité de sa réciproque dont nous savons qu'elle est continue.

Théorème : dérivabilité de l'application réciproque

Soit $f : I \to J$ une application bijective dérivable telle que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$). Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et pour tout $x \in J$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration :

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est bijective et déterminons $(f^{-1})'(1)$

1. La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ donc f est strictement monotone et donc bijective.
2. Déterminons $f^{-1}(1)$. On a

$$\begin{array}{rc} & f(x) = 1 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 2x + 1 = 1 \\ \Leftrightarrow & x^3 + 2x = 0 \\ \Leftrightarrow & x \times (x^2 + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = 0 \end{array} \quad \text{ainsi } f^{-1}(1) = 0.$$

3. Par application de la formule de dérivée d'une fonction réciproque, on en déduit que

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 7 *Calculer à partir de la formule de dérivation des fonctions réciproques la dérivée de la fonction $f : x \mapsto 2\ln(x) + 1$. On déterminera les intervalles I et J pour lesquelles cette fonction est bijective.*

5 Propriétés des fonctions dérivables

Nous allons dans cette section étudier les premières propriétés fines des applications dérivables. La première pierre permettant de démontrer les resulats fondamentaux que sont l'égalité des accroissements finis et, son corollaire, l'inégalité des acccroissement finis. Ces deux derniers théorèmes sont clefs pour étudier les comportements limites de fonctions dans de nombreux cas et lever des indéterminations. C'est ce que nous verrons au second semestre dans le chapitre *Analyse asymptotique*.

Théorème: de Rolle
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une application continue et dérivable sur $]a, b[$ satisfaisant la propriété $f(a) = f(b)$.
Il existe alors $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration :

5.1 Accroissements finis

Théorème: Egalité des accroissements finis
Soit $a < b$.
Soit f continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.

Démonstration :

Interprétation géométrique : il existe un point $c \in]a, b[$ où la tangente à la courbe de f est parallèle à la corde passant par $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Dessin :

On sait qu'un nombre dérivé est la limite d'un taux d'accroissement $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ qui peut également s'exprimer sous la forme $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$. L'inégalité des accroissement finis permet de borner localement le taux d'accroissement en fonction des bornes de sa dérivée.

Théorème : Inégalité des accroissements finis

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout $x \in I$, $m \leq f'(x) \leq M$. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

Démonstration :

Les applications de ce théorèmes sont très variées. On utilisera souvent ce corollaire :

Corollaire de l'IAF

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq k$. Alors pour tout $(a, b) \in I^2$,

$$|f(b) - f(a)| \leq k|b-a|$$

Exemple

On sait que l'application $x \mapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $[0,+\infty[$ et que pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} \leq 1$.
On en déduit par l'inégalité des accroissement finis que pour tout $x \geq 0$,

$$\ln(1+x) = \ln(1+x) - \ln(1) \leq 1 \times (x-0) = x$$

Exercice 8 *Montrer que* $\dfrac{4}{7} \leq \ln(\dfrac{7}{3}) \leq \dfrac{4}{3}$.

5.2 Fonctions k-lipschitzienne et applications aux suites récurrentes

Définition: Fonction k-lipschitzienne

Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **k-lipschitzienne** si :

$$\forall (x,y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

Interprétation géométrique :

Exemple

La fonction carrée est 2-lipschitzienne sur l'intervalle $[0,1]$.

Proposition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable.
Si $|f'|$ est bornée par M sur I alors f est M-lipschitzienne sur I.

Démonstration :

On considère à présent une suite récurrente générale vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f : I \to \mathbb{R}$ et $u_0 \in I$.

Théorème : Suites contractantes
Si f est dérivable sur I et qu'il existe $k \in [0,1[$ tel que pour tout $x \in I$ $|f'(x)| \leq k$ et que f admet un point fixe $l \in I$. Alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = l$.

Démonstration : : Voir exercice 12 TD **Limites et Continuité**.
L'exercice suivant est un exercice type qu'il faut maîtriser.

Exercice 9 *Soit* $\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & x & \longmapsto & e^{-\frac{x}{2}} \end{array}$.

1. *Montrer que cette application possède un unique point fixé noté* α.
2. *On pose* (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ *qui est bien définie. Montrer que pour tous* $x, y \in [0,1]$, $|f(x) - f(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.
3. *Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$$
En déduire que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{1}{2})^n$ *et déterminer la limite de* (u_n).

5.3 Dérivées et monotonie

5.4 Signe de la dérivée et monotonie

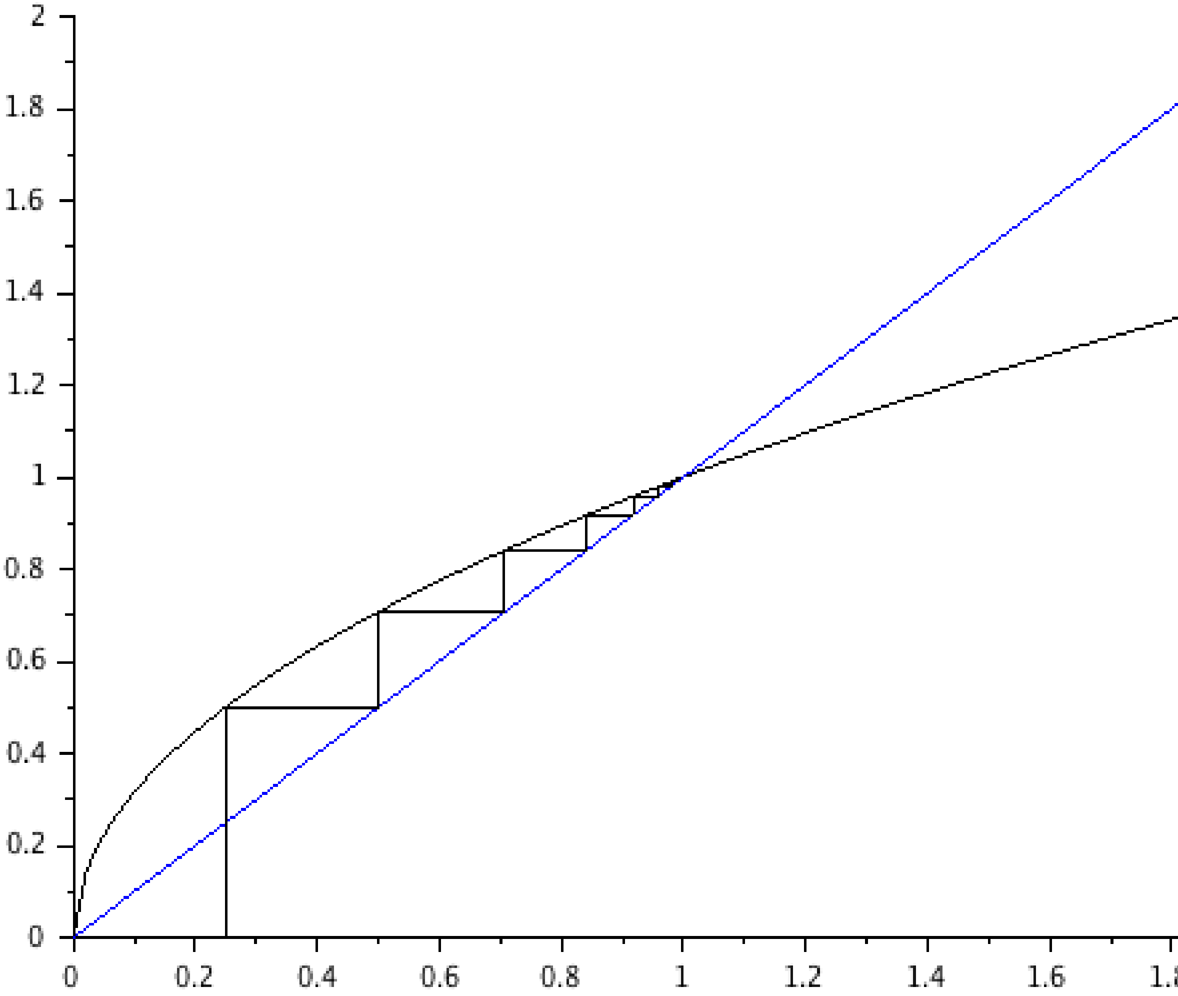
Une application de l'inégalité des accroissements finis est le lien, bien connu depuis le lycée, entre signe de la dérivée d'une application dérivable et monotonie. À cette occasion, on rencontrera des applications dont la dérivée s'annule mais qui sont strictement monotones.

Théorème
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout $x \in I$:

1. $f'(x) = 0$, alors f est constante.
2. $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
3. $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration

On peut affiner le théorème précédent on s'autorisant un nombre fini de point d'annulation de la dérivée tout en conservant le caractère strictement monotone de l'application.



copie.png

Figure 3 – Premiers termes de la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle telle que $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) et f' ne s'annule que sur un nombre fini de points. Alors f est strictement croissante (décroissante) sur I.

Démonstration

Exemple

La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Elle ne s'annule qu'en $x = 0$ donc d'après le théorème précédent on obtient que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5.5 Extrema

La notion d'extremum généralise celle intuitive de maximum et minimum. Dans le cas des applications dérivables on peut établir, dans le cas d'un intervalle ouvert, un lien entre signe de la dérivée et extremum.

Définition : extremum

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Soit $x_0 \in I$. Alors :

1. on dit que $f(x_0)$ est un **maximum local** (respectivement **miminum local**) s'il existe un intervalle $J \subset I$ dont x_0 n'est pas une extrémité tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x_0) \leq f(x)$).
2. on dit que $f(x_0)$ est un **maximum global** (respectivement **minimum global**) si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$ (respectivement $f(x_0) \leq f(x)$).

Dans le cas 1) on dit que $f(x_0)$ est un extremum local et dans le cas 2) un extremum global.

Exemple

Soit $f : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré deux. Si $a > 0$ alors f possède un minimum global $f(\dfrac{-b}{2a})$ mais pas de maximum global. Si $a < 0$, $f(\dfrac{-b}{2a})$ est un maximum global mais f ne possède pas de minimum global.
En revanche, si on restreint f à des intervalles bornés de $\mathbb{R}$, f admet des extrema aux bornes de l'intervalle de définition.

Proposition : Dérivabilité et extrema

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable et $x_0 \in I$. Si $f'(x_0) = 0$ et la dérivée f' change de signe autour de x_0 alors $f(x_0)$ est un extremum local.

Démonstration : admise.

Méthode : reconnaître les extrema d'une application sur un intervalle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable. Pour déterminer les extrema lorsqu'il en existe de f sur I on :

1. trace le tableau de variations de f sur I en calculant la dérivée et en localisant les points x_i pour $i \in A$ un ensemble où f' s'annule et change de signe.
2. on évalue toutes les images $f(x_i)$ et en les comparant on détermine s'il s'agit d'un extremum local ou global.

Remarque 6 *D'après le théorème des valeurs intermédiaires, une application continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ admet au maximum et un minimum global.*

Exercice 10 *Lister l'ensemble des extrema de l'application* $\begin{array}{rccl} f : & [-1; 2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & (x^2 - 1) \times \exp(x) \end{array}$ *et déterminer lesquels sont globaux et locaux.*

5.6 Prolongement du taux d'accroissement

Théorème: de la limite de la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$. Si :

- f est continue sur I.
- f est dérivable sur $I \setminus \{a\}$.
- $\lim_{x \to a} f'(x) = l$ (avec l réel ou infini).

Alors $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.

Démonstration :

Remarque 7 *On a l'interprétation géométrique suivante du théorème précédent : si la limite l est finie, alors f est dérivable en a et $f'(a) = l$.*

6 Dérivées successives

6.1 Définition

On s'intéresse dans cette sous-section à la notion de dérivée successive d'une application car il est généralement possible de dériver plusieurs fois une application sur un intervalle ouvert I sur laquelle elle est définie.

Exemple

Soit l'application inverse $inv :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $inv(x) = \dfrac{1}{x}$. Il est possible de dériver inv sur $]0, +\infty[$ autant de fois que l'on souhaite. On a pour tout $x > 0$:

1. $inv'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$
2. $inv''(x) = \dfrac{2}{x^3}$
3. $inv^{(3)} = \dfrac{-6}{x^4}$

Définition : dérivée n-ième

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application p fois dérivable en $x \in I$. On appelle **dérivée p-ième de f en x** le nombre noté $f^{(p)}(x)$.

Remarque 8 *La dérivée p-ème en un point x d'une fonction f vérifie la relation de récurrence suivante*

$$f^p(x) = \left(f^{(p-1)}\right)'(x) = \left(f'\right)^{(p-1)}(x)$$

Exercice 11 *Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^\star$, $inv^n(x) = \dfrac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$.*

Risque d'erreur

Il ne faut pas confondre $f^p(x)$ qui est la puissance p de $f(x)$ avec la dérivée p-ième évaluée en x.

6.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** I lorsque f est dérivable sur I et son application dérivée f' est continue sur I.

Exemple

Reprenons l'exemple de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$. On remarque que sa dérivée $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on en déduit que *inv* est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Proposition : Opérations sur les applications $\mathcal{C}^1$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classes $\mathcal{C}^1$ sur I un **intervalle ouvert**. Alors :

1. $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
2. $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
3. $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si g ne s'annule pas sur I.
4. lorsque cela a un sens, la composée $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
5. l'application exp et les applications polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. les applications racine carrée, ln et inverse sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Méthode : Montrer qu'une application est de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Pour montrer que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I on suit les étapes suivantes :

1. on étudie la dérivabilité de f sur I
2. si cela est possible, on calcule la dérivée f' sur I
3. on montre la continuité de f' sur I à l'aide des théorèmes de continuité des fonctions classiques ou bien si d'éventuels points posent problème, on montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Exemple

Soit $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Sur $]0, +\infty[$ l'application f est un produit d'applications dérivables puisqu'on sait que $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. En $x = 0$ il faut vérifier que la fonction f est bien dérivable. On revient à la définition. Pour tout $x > 0$, $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{x^2 \ln(x)}{x} = x \ln(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par croissances comparées ainsi $f'(0) = 0$.
3. Les applications carrées et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et

d'après la formule de dérivée d'un produit. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x.\ln(x) + x^2.\dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$
On vérifie donc la continuité de f' en 0 en revenant à la définition. Par croissances comparées on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to +\infty} f'(x) = 0 = f'(0)$.

4. On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 12 *Montrer que l'application* $\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^{x^2} \text{ si } x > 0 \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

6.3 Ordres supérieurs

Nous pouvons généraliser le concept de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ aux dérivées d'ordres supérieurs d'une application que l'on définit comme suit :

Définition : dérivée d'ordre n

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable $n \in \mathbb{N}$ fois sur I. On définit par récurrence, la **dérivée d'ordre** n comme suit $f^{(0)} = f$ et $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Définition : fonctions de classe $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application et $n \in \mathbb{N}$. On dit que :

1. f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable et que $f^{(n)}$ est continue sur I.
2. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ si f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 9 *Une fonction est de classe* $\mathcal{C}^0$ *lorsqu'elle est continue.*

Exemple

On sait que la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$. On en déduit par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\exp^{(n)} = \exp$ et donc que la fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

On généralise à présent la proposition sur la stabilité par opérations algébriques des applications de classe $\mathcal{C}^1$.

Proposition : Opérations sur les applications $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classes $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur I un **intervalle ouvert**. Alors :

1. $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$)
2. $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$)
3. $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) si g ne s'annule pas sur I.
4. lorsque cela a un sens, la composée $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$)
5. l'application exp et les applications polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur $\mathbb{R}$.
6. les applications racine carrée, ln et inverse sont de classe $\mathcal{C}^n$ (respectivement $\mathcal{C}^\infty$) sur

$]0, +\infty[$.

Méthode : Montrer qu'une application est de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Pour montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$ on rencontre deux cas de figures en général.

1. si f se décompose par des opérations algébriques de fonctions $\mathcal{C}^n$ ou $\mathcal{C}^\infty$, on peut appliquer directement le théorème précédent et affirmer la nature de f.
2. si on n'est pas dans le cas précédent, on doit calculer les dérivées d'ordre n (souvent par récurrence pour montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$) et ensuite s'assurer qu'elles sont continues.

Exercice 13 *Est-ce que l'application* $\begin{array}{rccl} f : & [0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$ *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $[0, +\infty[$ *?*

On a le théorème suivant que l'on peut montrer par récurrence et qui permet de donner une formule en fonction des dérivées antérieures de la dérivée n-ième d'un produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^n$.

Théorème: Formule de Leibniz

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ sur un intervalle I. On a alors que $h = fg$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et que

$$h^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} f^{(i)} g^{(k-i)}$$

Démonstration admise

7 Fonctions à valeurs complexes

7.1 Définition

Soit I un intervalle. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ alors il existe deux fonctions $f_r : I \to \mathbb{R}$ et $f_i : I \to \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in I, f(x) = f_r(x) + if_i(x)$. On peut écrire $f_r = Re(f)$ et $f_i = Im(f)$.

Définition: Fonction à valeurs complexes de classe $\mathcal{C}^k$

$f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I ssi f_r et f_i sont de classe $\mathcal{C}^k$ sur I. On a alors $f^{(k)} = f_r^{(k)} + if_i^{(k)}$.

7.2 Résultats conservés

1. Opérations algébriques : combinaisons linéaires, quotient, produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
2. Formule de Leibniz.
3. f est constante sur un intervalle I ssi $f' = 0$ sur $\mathring{I}$.

7.3 Résultats perdus

1. Aucune notion d'extremum.
2. La composée de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^k$.
3. Le théorème de Rolle n'est plus valable, contre-exemple à retenir : $(g : x \to e^{ix})$, $g(0) = g(2\pi)$ et pourtant g' ne s'annule jamais.
4. Aucun résultat de monotonie.
5. Le TAF n'est pas vérifié.

7.4 Inégalité des accroissements finis

Si le TAF n'est plus vérifié, le théorème suivant l'est tout de même :

Théorème: Egalité des accroissements finis complexe
Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\forall x \in I, |f'(x)| \leq k$. On a alors que f est k-lipschitzienne sur I càd que :

$$\forall (x, y) \in I^2, |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Travaux dirigés

Exercice 1 *1. Calculer les dérivées suivantes, après avoir précisé les ensembles de définition et de dérivabilité :*

$$f_1(x) = \sqrt{\frac{x\sin(x)}{1-\cos(x)}}, \qquad f_2(x) = \ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\right)$$

$$f_3(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}, \qquad f_4(x) = \ln(\tan(x)^2 + \sqrt{x})$$

2. Calculer les dérivées successives des fonctions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{1-x}{1+x}, \qquad f_2(x) = \ln(1+x)$$

$$f_3(x) = \sin^2(x), \qquad f_4(x) = x^3e^x$$

Exercice 2 *Calculer la dérivée n^{ieme} de $f(x) = x^n(1+x)^n$.*

Exercice 3 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{e^x}$. Montrer que f est $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x f(x)$. Soit a définie par $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = f^{(n)}(0)$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k$.*

Exercice 4 *Soit f la fonction définie par $f(x) = 2\arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{x}}\right) + \arcsin(2x-1)$. Quel est le domaine de définition de f ? En calculant, sa dérivé, simplifier l'expression de cette fonction.*

Exercice 5 *Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x}$ pour $0 \leq x \leq 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ si $x > 1$. Pour quelles valeurs de a, la fonction f est-t-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$?*

Exercice 6 *Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, s'annulant en $-1, 0$ et 1. On note : $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = 2x^4 + x + f(x)$. Montrer qu'il existe $c \in]-1, 1[$ tel que $g'(c) = 0$.*

Exercice 7 *Soit f une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que f admet une limite λ en $+\infty$ et la même limite en $-\infty$. Montrer que $\theta \to f(\tan(\theta))$ est dérivable sur $]-\pi/2, \pi/2[$ et se prolonge par continuité sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Déduire que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.*

Exercice 8 *Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que $f(0) = f'(0) = 0$.*

1. *On définit ϕ par $\phi(0) = 0$ et pour tout x non-nul, $\phi(x) = \frac{f(x)}{x}$. Etudier la continuité de ϕ sur $\mathbb{R}_+$.*
2. *On suppose qu'il existe $a > 0$ tel que $f(a) = 0$, montrer qu'il existe $c > 0$ tel que la tangente, à la courbe représentant f, au point d'abscisse c passe par l'origine du repère.*

Exercice 9 *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, si $x \neq y$ alors $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^{\frac{3}{2}} \ln(|x - y|)$. Montrer que f est constante.*

Exercice 10 *Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$. Montrer : $\exists c \in]a, b[, f''(c) = 0$.*

Exercice 11 *Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable et dont la dérivée s'annule au plus n fois.*

1. *Montrer que f s'annule au plus $n + 1$ fois.*
2. *Est-il possible que f s'annule moins de $n + 1$ fois ?*
3. *Soit P un polynôme de degré n. Montrer que la fonction $x \to P(x) - e^x$ s'annule au plus $n + 1$ fois.*

Exercice 12 *Soit f une fonction continue et dérivable sur $[a, b]$ et strictement positive. Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $\frac{f(b)}{f(a)} = e^{(b-a)\frac{f'(c)}{f(c)}}$*

Exercice 13 *Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que $f'(b)(f(b) - f(a)) < 0$. Montrer que f s'annule sur $]a, b[$.*

Exercice 14 *Soit f définie et dérivable sur $[a, +\infty[$. Montrer les assertions suivantes*

1. *Si $\lim_{+\infty} f'(x) = +\infty$ alors $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$.*
2. *Si $\lim_{+\infty} f'(x) = 0$ alors $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$. Remarque : bien moins évident, revenir à la définition d'une limite.*
3. *Si $\lim_{+\infty} f'(x) = \ell$ alors $\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$.*

Exercice 15 *Soit u une suite définie par $u_0 \in [0, \frac{4}{3}]$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}(4 - u_n^2)$. Justifier que $\forall n, u_n \in [0, \frac{4}{3}]$. Montrer en utilisant l'inégalité des accroissement finis que u converge vers 1.*

Exercice 16 *Soit f dérivable sur $\mathbb{R}_+$ telle que f' soit décroissante.*

1. *Montrer : $\forall x \geq 1, f(x + 1) - f(x) \leq f'(x) \leq f(x) - f(x - 1)$.*
2. *Montrer que si f a une limite finie en $+\infty$ alors : $\lim_{+\infty} f'(x) = 0$.*

Exercice 17

1. *Soit $f \in \mathcal{C}([0, +\infty[)$ dérivable sur $]0, +\infty[$ et telle que $f(0) = \lim_{+\infty} f(x)$. En utilisant g définie par*
$$g(y) = f(\frac{y}{1 - y})$$
établir qu'il existe $c \in]0, +\infty[$ tel que : $f'(c) = 0$.
2. *Etablir un résultat analogue pour une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ pour laquelle on suppose $\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{+\infty} f(x)$.*

Exercice 18 *(Théorème de Darboux) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dérivable. On va montrer que f' a la "propriété des valeurs intermédiaires", c'est-à-dire : si $f'(a) < \alpha < f'(b)$ avec $a < b$, alors il existe $c \in]a, b[$; tel que $f'(c) = \alpha$. Pour cela, commencer par le cas ou $\alpha = 0$ et montrer que f admet un minimum local sur $]a, b[$. Ramener ensuite le cas général à ce cas particulier.*

Exercice 19 *Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivables en 0 telles que*

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(2x) = 2f(x).$$

Exercice 20 *Soit $f \in \mathcal{C}^2([a,b],\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{(b-a)^2}{2} f''(c).$$

Exercice 21 *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.*

1. *Montrer que si f s'annule en n points alors f' s'annule en $n-1$ points.*
2. *Soit $a_1, \cdots, a_n$ n zéros de f et $x \in I$. Montrer qu'il existe $c \in I$ tel que $f(x) = \frac{1}{n!}(x-a_1)\cdots(x-a_n)f^{(n)}(c)$.*
3. *Existe-t-il un polynôme P coïncidant avec l'exponentielle sur une partie infinie de $\mathbb{R}$?*

Exercice 22 *Soit f réelle dérivable sur $[a,+\infty[$. On suppose que $f+f'$ tend vers 0 en $+\infty$. Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$ (on pourra considérer $g(x) = f(x)e^x$).*

Exercice 23 *Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, |g'(x)| < M$. Soit $a > 0$, on pose $f(x) = x + ag(x)$. Montrer que pour a suffisamment petit, f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*