

## DS 3 : propagation de signaux et interférences

Durée : 3h

### Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

### Données

- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction  $f(x) = (1+x)^\alpha$  pour  $x \ll 1$  :  $f(x) \approx 1 + \alpha x$ .
- Identités trigonométriques

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b.$$

## 1 Écoute musicale et interférence

La qualité de l'écoute musicale que l'on obtient avec une chaîne hi-fi dépend de la manière dont les enceintes sont disposées par rapport à l'auditeur. On dit qu'il faut absolument éviter la configuration représentée sur la Figure 1, soit la présence d'un mur à distance  $D$ , trop courte derrière l'auditeur.

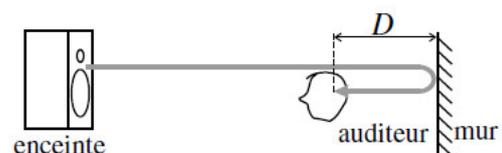


Figure 1: Schéma de l'expérience.

Comme représenté sur la Figure 1, l'onde issue de l'enceinte se réfléchit sur le mur. On note  $c = 342 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  la célérité du son dans l'air.

1. **Exprimer** le décalage temporel  $\tau$  qui existe entre les deux ondes arrivant dans l'oreille de l'auditeur : onde arrivant directement et onde réfléchie.
2. **En déduire** le déphasage  $\Delta\phi$  de ces deux ondes supposées sinusoïdales de fréquence  $f$ . La réflexion sur le mur ne s'accompagne d'aucun déphasage pour la surpression acoustique, grandeur à laquelle l'oreille est sensible.
3. **Expliquer** pourquoi il y a un risque d'atténuation de l'amplitude de l'onde pour certaines fréquences. **Exprimer** ces fréquences en fonction d'un entier  $n$ . **Déterminer** les conditions que doit vérifier  $D$  pour qu'aucune de ces fréquences ne soit dans le domaine audible. **Estimer** si celle est réalisable.

4. **Expliquer** qualitativement pourquoi on évite l'effet nuisible en éloignant l'auditeur du mur.

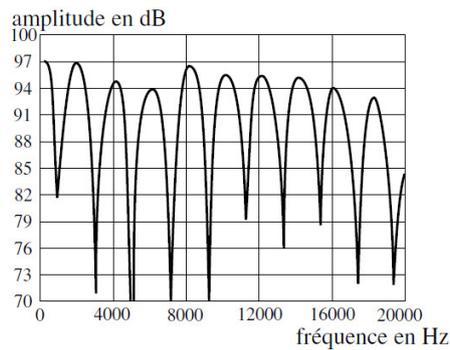


Figure 2: Résultat de l'expérience.

5. On constate sur la Figure 2 le résultat d'une expérience dans laquelle on a placé un micro, sensible à la surpression, à une certaine distance  $D$  du mur, puis envoyé un signal de fréquence variable et d'amplitude constante  $A_0$ . La courbe, d'allure très caractéristique, est appelée "courbe en peigne".

L'amplitude en décibels se définit par la relation :  $A_{dB} = 20 \log \left( \frac{A}{A_{ref}} \right)$ , avec  $A_{ref}$  une amplitude de référence.

Lorsqu'il y a superposition de deux ondes de même amplitude  $A_0$ , **déterminer**, en décibels, l'augmentation maximale de l'amplitude. **Déduire** la valeur en décibel de  $A_0$ , noté  $A_{0,dB}$ .

6. **Calculer** la distance  $D$  à partir de l'exploitation de la Figure 2

## 2 La chasse au péritio

*Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2023)*

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions d'ondes électromagnétiques centimétriques, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (perytions), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite Figure 3, où E est un émetteur d'ondes centimétriques placé en  $x = 0$ , P une plaque métallique placée en  $x = D = 46 \text{ cm}$ , A une antenne placée en  $x = d$  reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue  $U$  proportionnelle à la moyenne temporelle  $\langle E_{tot}^2 \rangle$  du champ électromagnétique émis par E et de valeur  $E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$  au niveau de l'antenne A.

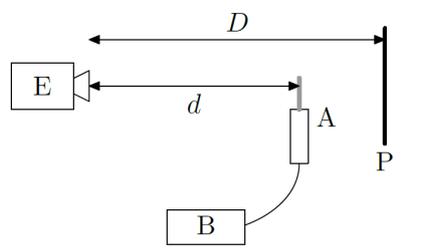


Figure 3: Dispositif expérimental à ondes centimétriques.

On relève la tension  $U$  délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la position  $x = d$  entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en Figure 4.

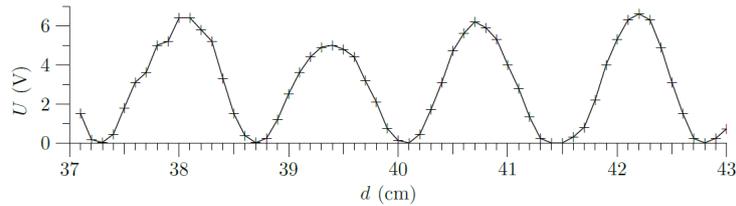


Figure 4: Tension  $U$  en fonction de la distance  $x = d$  entre l'antenne et l'émetteur.

7. Une partie de l'onde est réfléchiée par la plaque métallique P. Exprimer la valeur de cette onde réfléchiée vers les  $x$  négatifs. Vérifier qu'en  $x = D$  l'onde rétrograde a la même expression que l'onde progressive.
8. L'onde réfléchiée a en réalité une amplitude égale à  $-E_0$  et pas  $E_0$ , car la réflexion implique un déphasage de  $\pi$ . Exprimer la valeur du champ électromagnétique total  $E_{\text{tot}}$  dû à la superposition des ondes progressive et rétrograde sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.
9. Déterminer la condition sur  $x$  pour que  $E_{\text{tot}}$  s'annule.
10. Déterminer l'écart entre deux position  $x$  consécutives pour lesquelles  $E_{\text{tot}}$  s'annule. En déduire à l'aide de la Figure 4 la valeur de la fréquence  $f$  de l'onde électromagnétique.
11. Le constructeur annonce une fréquence  $f_{\text{cons}} = 11 \pm 1,1 \text{ GHz}$ , soit une incertitude-type  $u_{\text{cons}} = \frac{1,1}{\sqrt{3}} = 0,6 \text{ GHz}$ . Déterminer l'incertitude sur votre valeur de  $f$  obtenue plus tôt et comparer votre mesure avec la fréquence annoncée par le constructeur à l'aide de l'outil adapté.

### 3 Le télescope interférentiel VLTI

*Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2014)*

Ce sujet traite de l'observation, à l'aide de télescopes, des rayonnements infrarouges provenant de l'espace. Ces rayonnements sont émis par des corps tels que des étoiles jeunes ou des poussières froides. L'observation dans ce domaine de longueurs d'onde se heurte à plusieurs difficultés. D'une part, ces rayonnements sont fortement absorbés par l'atmosphère. D'autre part, l'atmosphère et les instruments de mesure sont également sources de rayonnement infrarouge. On peut s'affranchir du problème de l'atmosphère en embarquant le télescope sur un satellite et de l'émission thermique de l'instrument en refroidissant les différents éléments à l'aide de puissants systèmes cryogéniques. Cependant, les dimensions des télescopes en orbite étant limitées, leur résolution théorique est moins bonne que celle de certains télescopes au sol comme ceux du Very Large Telescope array (VLT) de l'European Southern Observatory à Paranal au Chili qui bénéficient d'un ciel très pauvre en vapeur d'eau et d'une atmosphère très stable.

Pour augmenter la résolution qu'offre un télescope unitaire du VLT on peut faire interférer les signaux optiques reçus par deux télescopes comme cela est illustré Figure 5.

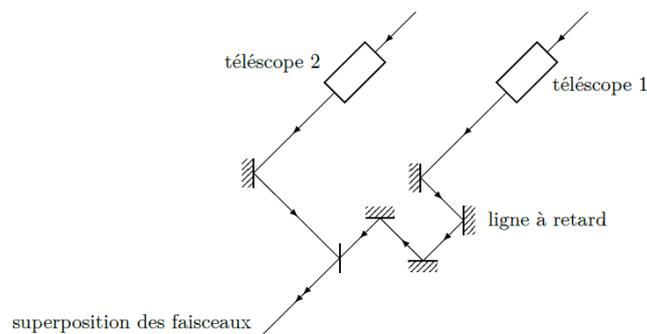


Figure 5: Principe du VLTI.

On assimile les deux télescopes distants de  $a$  (variable jusqu'à 100 m) à deux trous  $T_1$  et  $T_2$  de taille négligeable, de sorte que le VLTI sera équivalent au montage de la Figure 6, où la lentille d'axe optique  $Oz$ , de centre  $O$  possède

une distance focale  $f'$ . Le foyer image de la lentille est noté  $F'$  et le plan focal est le plan d'observation.  $T_1$  et  $T_2$  sont à une distance  $a/2$  de l'axe optique.



Figure 6: Schéma équivalent du VLTI.

Un unique objet ponctuel à l'infini  $A$  est observé dans la direction de l'axe optique. Pour simplifier, on supposera encore que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,00\mu\text{m}$ .

12. Où se trouve l'image géométrique  $A'$  de  $A$  à travers la lentille ?
13. Calculer la différence de chemin optique  $\delta_0$  entre les ondes provenant de  $A$  et se recombinant en  $A'$ , passant par les deux trous  $T_1$  et  $T_2$  sur la Figure 6.
14. En déduire le rôle de la ligne à retard introduite dans le cas de figure décrit par la Figure 5.
15. Pour qu'il y ait interférence dans le cas d'ondes lumineuses, on se souvient que le retard entre les deux ondes ne doit pas être plus important que le temps de cohérence  $\tau$  de la source de ces ondes. Exprimer en fonction de  $\tau$  et d'autres grandeurs la différence de chemins optiques maximale  $\delta_{\text{max}}$  pour avoir interférence. Expliquer alors la nécessité de la ligne à retard.
16. On considère que les deux ondes ont une amplitude identique. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_A(x)$  d'un point d'abscisse  $x$  dans le plan focal.
17. En déduire l'expression de l'interfrange.
18. Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan  $(x'F'y)$  telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.
19. Un unique objet ponctuel à l'infini  $B$  est observé dans la direction  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $xOy$  avec les mêmes caractéristiques que  $A$ .  
À quelle distance  $x_B$  de  $F'$  se trouve l'image géométrique de  $B$  ? On se place dans les conditions de Gauss  $i_B \ll 1$ .
20. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse  $I_B(x)$  en un point d'abscisse  $x$ .
21. L'interfrange est-il différent de celui trouvé précédemment ?
22. Deux objets ponctuels à l'infini  $A$  et  $B$  sont observés dans les directions  $i_A = 0$  et  $i_B \neq 0$  par rapport à l'axe optique dans le plan  $xOz$ . Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde  $\lambda = 2,00\mu\text{m}$  et la même puissance lumineuse.
23. Ces deux sources sont-elles cohérentes ? Justifier la réponse.
24. En déduire l'intensité lumineuse  $I_{\text{total}}(x)$  en un point d'abscisse  $x$ . On mettra cette expression sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.
25. Pour quelle(s) distance(s)  $a$  entre les deux télescopes y a-t-il brouillage des interférences ? On exprimera le résultat en fonction de  $i_B$ .
26. Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.
27. Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire  $i_m$  du VLTI ?

## 4 Phénomènes d'interférences

28. Déterminer les conditions pour que l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux ondes de même fréquence soit nulle. 7
29. Deux ondes sonores de mêmes amplitude  $A$  interfèrent. Déterminer la valeur maximale de l'amplitude total.
30. Deux ondes lumineuses de même éclairement  $\mathcal{E}$  interfèrent. Déterminer la valeur maximale de l'éclairement total.
31. Deux ondes lumineuses de même éclairement  $\mathcal{E}$  interfèrent. Déterminer la valeur du déphasage lorsque l'éclairement total est à  $\mathcal{E}$ . En déduire la différence de chemin optique.
32. Déterminer l'ordre des franges brillantes visibles sur la Figure 7.

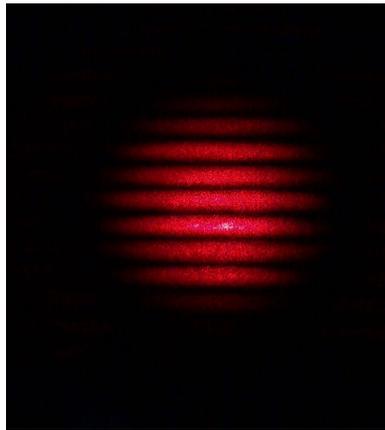


Figure 7: Figure d'interférence produite par les trous d'Young<sup>1</sup>.

33. Un dispositif de trous d'Young est installé de telle manière que la différence de marche entre les deux ondes lumineuses varient entre  $-3 \mu\text{m}$  et  $3 \mu\text{m}$  sur la zone éclairée de l'écran, zone qu'on appelle champ d'interférence. La longueur d'onde des deux ondes est  $\lambda = 532 \text{ nm}$ . Déterminer le nombre de franges brillantes et le nombre de franges sombres.
34. Schématiser une expérience de trous d'Young pour laquelle la distance entre les trous et un écran est égale à  $D$  et les trous sont orientés selon un axe  $(Ox')$ . Retrouver l'expression de la différence de chemin optique entre deux ondes  $\delta = \frac{na^2x}{D}$ .
35. À partir de l'expression de la différence de chemin optique précédente, en déduire l'expression de l'interfrange  $i$ .
36. On constate que les franges de la figure d'interférence obtenue dans une expérience de trous d'Young sont trop serrées. Déterminer comment déplacer l'écran pour y remédier.
37. La Figure 7 a été obtenue à l'aide d'un capteur CCD rectangulaire avec une longueur de  $4,4 \text{ mm}$ , une largeur de  $4,0 \text{ mm}$  et comportant  $9,0 \cdot 10^6$  pixels carrés. Déterminer la valeur du côté  $l$  d'un pixel.  
En déduire la valeur de l'interfrange  $i$  à partir de la Figure 7.
38. En déduire la valeur de la distance  $D$  entre le capteur et les trous sachant que  $\lambda = 633 \text{ nm}$  et  $a = 1,5 \text{ mm}$ .

## 5 Problème ouvert

Deux stations de radio sont distantes de  $250 \text{ m}$  et émettent en phase des ondes avec une longueur d'onde de  $100 \text{ m}$ . Un point A est à  $400 \text{ m}$  des deux stations, un point B à  $450 \text{ m}$  des deux stations, et un point C est à  $400 \text{ m}$  de l'une et  $450 \text{ m}$  de l'autre. Déterminer les types d'interférences qu'on observe aux points A, B et C.

<sup>1</sup>Source : [site de François Legrand](#).