DS 3 : propagation de signaux et interférences

Durée : 3h

Indications

- Le sujet est divisé en 5 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- Développement limité à l'ordre 1 en zéro de la fonction $f(x) = (1+x)^\alpha$ pour $x \ll 1$: $f(x) \approx 1 + \alpha x$.
- Identités trigonométriques

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\
\cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b.
\end{aligned}$$

---

1 Écoute musicale et interférence

La qualité de l'écoute musicale que l'on obtient avec une chaîne hi-fi dépend de la manière dont les enceintes sont disposées par rapport à l'auditeur. On dit qu'il faut absolument éviter la configuration représentée sur la Figure 1, soit la présence d'un mur à distance D, trop courte derrière l'auditeur.

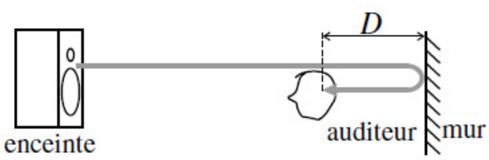


Figure 1: Schéma de l'expérience.

Comme représenté sur la Figure 1, l'onde issue de l'enceinte se réfléchit sur le mur. On note $c = 342\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ la célérité du son dans l'air.

1. **Exprimer** le décalage temporel τ qui existe entre les deux ondes arrivant dans l'oreille de l'auditeur : onde arrivant directement et onde réfléchie.

   La première onde parcourt une distance l alors que la deuxième parcourt une distance $l+2D$, il y a donc un retard ou décalage temporel τ tel que

$$\tau = \frac{l+2D-l}{c}$$

$$\boxed{\tau = \frac{2D}{c}.}$$

2. **En déduire** le déphasage $\Delta\varphi$ de ces deux ondes supposées sinusoïdales de fréquence f. La réflexion sur le mur ne s'accompagne d'aucun déphasage pour la surpression acoustique, grandeur à laquelle l'oreille est sensible.

   Les deux signaux au niveau de l'auditeur, on considèrera qu'il est au point M, sont donc tels que

$$s_1(M,t) = A\cos(\omega t - kl + \phi_0)$$
$$s_2(M,t) = A\cos(\omega t - k(l+2D) + \phi_0).$$

   Le déphasage $\Delta\varphi$ est donc

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \omega t - kl + \phi_0 - (\omega t - k(l+2D) + \phi_0) = k2D = \frac{2\pi}{\lambda}2D = \frac{2\pi f}{c}2D$$

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{4\pi f D}{c}.}$$

3. **Expliquer** pourquoi il y a un risque d'atténuation de l'amplitude de l'onde pour certaines fréquences. **Exprimer** ces fréquences en fonction d'un entier n. **Déterminer** les conditions que doit vérifier D pour qu'aucune de ces fréquences ne soit dans le domaine audible. **Estimer** si celle est réalisable.

   On voit que le déphasage du signal dépend de la fréquence f du signal. Ainsi pour certaines fréquences on peut avoir des valeurs de déphasage de $\left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi$, soit opposition de phase entre les deux signaux, soit une amplitude minimale du signal résultant de leur superposition.

   Si on exprime ces fréquences pour lesquelles il y a atténuation de l'onde résultante il vient que

$$\Delta\varphi = \frac{4\pi f D}{c} = \left(n+\frac{1}{2}\right)2\pi$$

   soit

$$\boxed{f = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2D}.}$$

   Pour que ces fréquences ne correspondent pas au domaine audible, il faut que les fréquences et la distance D respectent ces inégalités

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2D} \leq 20\,\mathrm{Hz} \quad \text{ou} \quad 20\,\mathrm{kHz} \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2D}20\,\mathrm{Hz}$$

$$D \geq \frac{c\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\times 20\,\mathrm{s^{-1}}} \quad \text{ou} \quad \frac{c\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\times 20\times 10^3\,\mathrm{s^{-1}}} \geq D.$$

   or ces inégalités doivent être respectées pour n'importe quelle valeur de n, même $n \to \infty$. On voit donc que l'inégalité de gauche ne pourra pas être respectée car D ne peut pas tendre vers une distance infinie. Ainsi il vient que

$$D \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{c}{2D}$$

   soit pour la plus petite valeur de n, cest-à-dire $n=0$,

$$\boxed{D \leq 4{,}3\times 10^{-3}\,\mathrm{m}.}$$

   Il faut donc, pour éviter l'atténuation des fréquences audibles, que l'auditeur place son oreille à une distance du mur inférieur à quelques mm. **Cela n'est pas réalisable.**

4. **Expliquer** qualitativement pourquoi on évite l'effet nuisible en éloignant l'auditeur du mur.

   Si on augmente D, l'onde réfléchie va voir son amplitude diminuer par "dilution" de l'énergie, ainsi $A_1 \gg A_2$ et donc $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)} \approx A_1$.

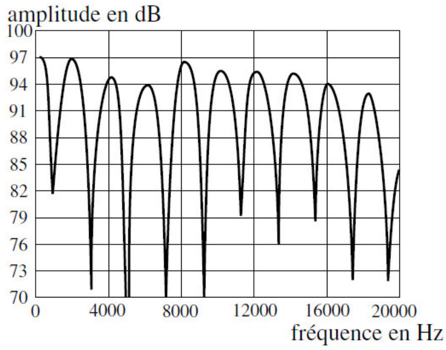


Figure 2: Résultat de l'expérience.

5. On constate sur la Figure 2 le résultat d'une expérience dans laquelle on a placé un micro, sensible à la surpression, à une certaine distance D du mur, puis envoyé un signal de fréquence variable et d'amplitude constante A_0. La courbe, d'allure très caractéristique, est appelée "courbe en peigne".

   L'amplitude en décibels se définit par la relation : $A_{dB} = 20\log\left(\frac{A}{A_{ref}}\right)$, avec A_{ref} une amplitude de référence.

   Lorsqu'il y a superposition de deux ondes de même amplitude A_0, **déterminer**, en décibels, l'augmentation maximale de l'amplitude. **Déduire** la valeur en décibel de A_0, noté $A_{0,dB}$.

   Lorsqu'il y a superposition constructive de deux ondes $A_{max} = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2A_0A_0} = 2A_0$ donc

$$\boxed{A_{dB,max} = 20\log\left(\frac{2A_0}{A_{ref}}\right) = 20\log(2) + 20\log\left(\frac{A_0}{A_{ref}}\right) = 6 + A_{0,dB}.}$$

6. **Calculer** la distance D à partir de l'exploitation de la Figure 2

   On constate qu'entre $f_1 = 8000\,\mathrm{Hz}$ et $f_2 = 16\,000\,\mathrm{Hz}$, l'amplitude de l'onde résultant de la superposition des deux ondes passe 4 fois de suite par une valeur maximale, il vient donc que

$$\Delta\varphi(f_2) - \Delta\varphi(f_1) = \frac{4\pi f_2 D}{c} - \frac{4\pi f_1 D}{c} = 4 \times 2\pi$$

   donc

$$\boxed{D = \frac{2c}{f_2 - f_2}.}$$

   A.N.

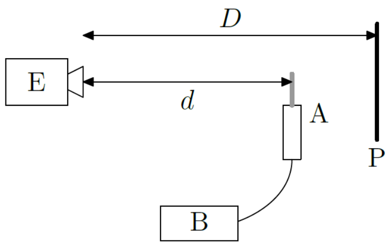
$$\boxed{D = \frac{342\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{16\,000\,\mathrm{Hz} - 8000\,\mathrm{Hz}} = 8{,}6\,\mathrm{cm}.}$$

2 La chasse au péritio

Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2023)

En astronomie, les sursauts radio rapides (fast radio burst) sont de brèves émissions d'ondes électromagnétiques centimétriques, d'une durée allant d'une fraction de milliseconde à 3 secondes, dont l'origine est encore mal comprise. Ils sont étudiés à l'aide de radiotélescopes, comme celui de Parkes en Australie. En 2010, 16 sursauts atypiques ont été découverts, dont on a essayé de comprendre l'origine. Ils ont été appelés péritios (perytons), du nom de l'animal imaginaire maléfique, mi-oiseau et mi-cerf, au plumage bleu ou vert.

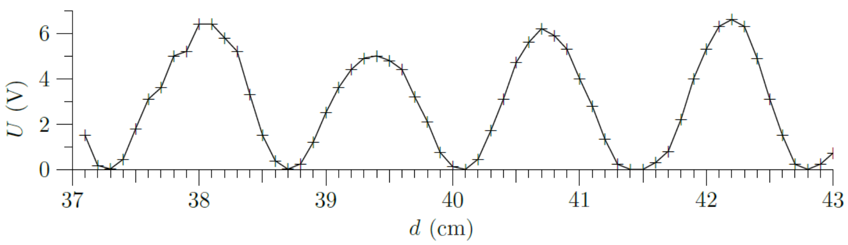
On dispose au laboratoire d'un équipement permettant d'étudier des ondes électromagnétiques dites centimétriques. On réalise l'expérience décrite Figure 3, où E est un émetteur d'ondes centimétriques placé en $x=0$, P une plaque métallique placé en $x=D=46\,\mathrm{cm}$, A une antenne placée en $x=d$ reliée à un boîtier électronique B délivrant une tension continue U proportionnelle à la moyenne temporelle $\left\langle E_{\mathrm{tot}}^2\right\rangle$ du champ électromagnétique émis par E et de valeur $E(x,t)=E_0\cos\left(\omega t-kx\right)$ au niveau de l'antenne A.



;

Figure 3: Dispositif expérimental à ondes centimétriques.

On relève la tension U délivrée par le boîtier pour diverses valeurs de la position $x=d$ entre l'émetteur et l'antenne. Les mesures obtenues sont présentées en Figure 4.



;

Figure 4: Tension U en fonction de la distance $x=d$ entre l'antenne et l'émetteur.

7. Une partie de l'onde est réfléchie par la plaque métallique P. Exprimer la valeur de cette onde réfléchie vers les x négatifs. Vérifier qu'en $x=D$ l'onde rétrograde a la même expression que l'onde progressive.

À t_0 le signal part de $x_0=0$ et se propage vers les x positifs jusqu'à $x_1=D$ à $t_1>t_0$. La relation entre t_0 et t_1 est

$$t_1=t_0+\frac{x_1-x_0}{c}=t_0+\frac{D}{c}.$$

À t_1 le signal part de $x_1=D$ et se propage vers les x négatifs jusqu'à $x_2<D$ à $t_2>t_1$. La relation entre t_1 et t_2 est

$$t_2=t_1+\frac{x_1-x_2}{c}=t_1+\frac{D-x_2}{c}$$

car $D-x_2>0$. On obtient donc la relation entre t_0 et t_2

$$t_2=t_0+\frac{D}{c}+\frac{D-x_2}{c}=t_0-\frac{x_2-2D}{c}$$

donc

$$t_0=t_2+\frac{x_2-2D}{c}.$$

On connaît l'expression du signal à t_0 lorsque l'onde est émise au niveau de la source en $x_0=0$

$$E(x_0,t_0)=E_0\cos\left(\omega t_0+kx_0\right)=E_0\cos\left(\omega t_0\right)=E(t_0).$$

On voit qu'en x_0 le signal n'est que fonction du temps. Pour obtenir l'expression du signal en t_2 on tient compte du retard de ce signal en utilisant l'expression précédente mais pour laquelle on a exprimé t_0 en fonction de t_2.

$$E(t_0) = E(t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c})$$
$$E_0 \cos(\omega t_0) = E_0 \cos\left(\omega\left(t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c}\right)\right)$$

donc

$$E(x_2, t_2) = E_0 \cos\left(\omega\left(t_2 + \frac{x_2 - 2D}{c}\right)\right) = E_0 \cos(\omega t_2 + k(x_2 - 2D)).$$

Cela est vrai pour tout signaux mesuré en x à l'instant associé t, donc le signal réfléchi est tel que

$$\boxed{E(x,t) = E_0 \cos(\omega t + k(x - 2D)).}$$

Pour $x = D$ on voit que le signal est

$$\boxed{E(x = D, t) = E_0 \cos(\omega t + k(D - 2D)) = E_0 \cos(\omega t - kD).}$$

On constate qu'on a bien affaire à l'expression du signal se propageant vers les x positifs en $x = D$.

8. L'onde réfléchie a en réalité une amplitude égale à $-E_0$ et pas E_0, car la réflexion implique un déphasage de π. Exprimer la valeur du champ électromagnétique total E_{tot} dû à la superposition des ondes progressive et rétrograde sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

   L'onde réfléchie en x a donc un signal tel que

   $$E(x,t) = -E_0 \cos(\omega t + k(x - 2D)).$$

   En la sommant avec le signal de l'onde progressive $E(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)$, il vient que

   $$E_{\text{tot}} = E_0 \cos(\omega t - kx) - E_0 \cos(\omega t + k(x - 2D))$$
   $$E_{\text{tot}} = E_0 (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + k(x - 2D))).$$

   On reconnaît une expression de la forme $\cos(a-b) - \cos(a+b)$ avec

   $$a - b = \omega t - kx$$
   $$a + b = \omega t + k(x - 2D)$$

   donc en sommant les deux dernières relations, et en calculant leur différence

   $$2a = 2\omega t - 2kD$$
   $$-2b = -2kx + 2kD$$

   soit

   $$a = \omega t - kD$$
   $$b = k(x - D).$$

   En utilisant les identités trigonométriques, il peut voir que $\cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a \sin b$ donc

   $$E_{\text{tot}} = E_0 (\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + k(x - 2D)))$$

   $$\boxed{E_{\text{tot}} = 2E_0 (\sin(\omega t - kD) \sin(k(x - D))).}$$

9. Déterminer la condition sur x pour que E_{tot} s'annule. On voit, grâce à l'expression prédédente que E_{tot} s'annule pour des valeurs de x telles que $\sin(k(x-D))=0$, soit

$$k(x-D)=m\pi$$

avec m un entier relatif. soit

$$x_m=m\pi\frac{1}{k}+D=x=m\pi\frac{\lambda}{2\pi}+D$$

$$\boxed{x_m=m\frac{\lambda}{2}+D}$$

avec x_m les valeurs de x pour lesquelles E_{tot} s'annule.

10. Déterminer l'écart entre deux position x consécutives pour lesquelles E_{tot} s'annule. En déduire à l'aide de la Figure 4 la valeur de la fréquence f de l'onde électromagnétique. Si on prend les positions x_{m+1} et x_m, la différence de ces positions est

$$x_{m+1}-x_m=(m+1)\frac{\lambda}{2}+D-\left(m\frac{\lambda}{2}+D\right)$$

$$\boxed{x_{m+1}-x_m=\frac{\lambda}{2}.}$$

D'après la Figure 4 on voit que l'écart moyen entre deux annulations de la tension, donc annulation de E_{tot} est $\frac{x_{m+4}-x_m}{4}=\frac{42{,}8\,\mathrm{cm}-37{,}3\,\mathrm{cm}}{4}=1{,}375\,\mathrm{cm}$. L'incertitude $u(x_{m+4}-x_m)=\frac{u(x_m)}{4\sqrt{3}}=\frac{0{,}1\,\mathrm{cm}}{4\sqrt{3}}=0{,}01\,\mathrm{cm}$. Ainsi

$$x_{m+1}-x_m=(1{,}38\pm0{,}01\,\mathrm{cm}).$$

Donc

$$\lambda=2(x_{m+1}-x_m)\pm2u(x_{m+1}-x_m)=(2{,}76\pm0{,}02)\,\mathrm{cm}$$

$$\boxed{f=\frac{c}{\lambda}\pm\frac{c}{\lambda^2}u(\lambda)=(10{,}9\,\mathrm{GHz}\pm0{,}08\,\mathrm{GHz}).}$$

11. Le constructeur annonce une fréquence $f_{\text{cons}}=11\pm1{,}1\,\mathrm{GHz}$, soit une incertitude-type $u_{\text{cons}}=\frac{1{,}1}{\sqrt{3}}=0{,}6\,\mathrm{GHz}$. Déterminer l'incertitude sur votre valeur de f obtenue plus tôt et comparer votre mesurer avec la fréquence annoncée par le constructeur à l'aide de l'outil adapté. On a obtenu l'incertitude plus tôt. Pour comparer notre valeur à celle du constructeur on peut utiliser le Z-score.

$$Z=\frac{|f-f_{\text{cons}}|}{\sqrt{u^2(f)+u^2(f_{\text{const}})}}.$$

A.N.

$$Z=\frac{|10{,}9-11|}{\sqrt{(0{,}08)^2+(0{,}6)^2}}=0{,}17.$$

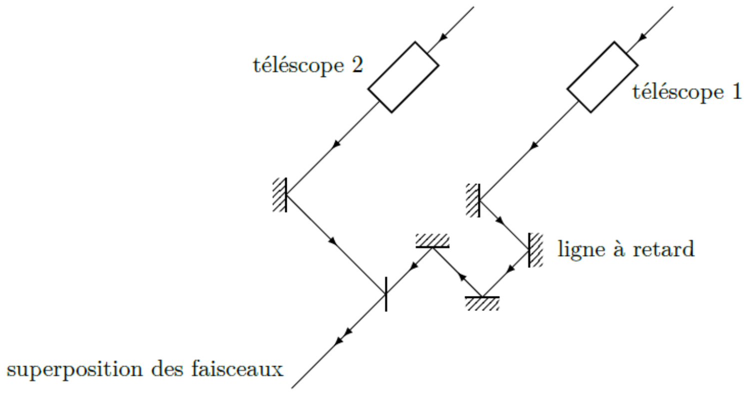
Le Z-score est inférieur à 2, **les deux valeurs sont compatibles**.

3 Le télescopte interférentiel VLTI

Adapté du concours concours Centrale - Supélec - MP (2014)

Ce sujet traite de l'observation, à l'aide de télescopes, des rayonnements infrarouges provenant de l'espace. Ces rayonnements sont émis par des corps tels que des étoiles jeunes ou des poussières froides. L'observation dans ce domaine de longueurs d'onde se heurte à plusieurs difficultés. D'une part, ces rayonnements sont fortement absorbés par l'atmosphère. D'autre part, l'atmosphère et les instruments de mesure sont également sources de rayonnement infrarouge. On peut s'affranchir du problème de l'atmosphère en embarquant le télescope sur un satellite et de l'émission thermique de l'instrument en refroidissant les différents éléments à l'aide de puissants systèmes cryogéniques. Cependant, les dimensions des télescopes en orbite étant limitées, leur résolution théorique est moins bonne que celle de certains télescopes au sol comme ceux du Very Large Telescope array (VLT) de l'European Southern Observatory à Paranal au Chili qui bénéficient d'un ciel très pauvre en vapeur d'eau et d'une atmosphère très stable.

Pour augmenter la résolution qu'offre un télescope unitaire du VLT on peut faire interférer les signaux optiques reçus par deux télescopes comme cela est illustré Figure 5.



;

Figure 5: Principe du VLTI.

On assimile les deux télescopes distants de a (variable jusqu'à $100\,\mathrm{m}$) à deux trous T_1 et T_2 de taille négligeable, de sorte que le VLTI sera équivalent au montage de la Figure 6, où la lentille d'axe optique Oz, de centre O possède une distance focale f'. Le foyer image de la lentille est noté F' et le plan focal est le plan d'observation. T_1 et T_2 sont à une distance $a/2$ de l'axe optique.

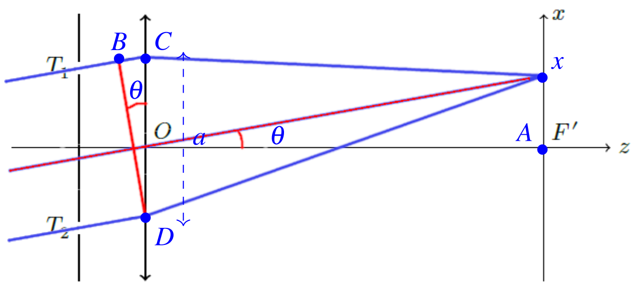


Figure 6: Schéma équivalent du VLTI.

Un unique objet ponctuel à l'infini A est observé dans la direction de l'axe optique. Pour simplifier, on supposera encore que cet objet émet une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2{,}00\,\mu\mathrm{m}$.

12. Où se trouve l'image géométrique A' de A à travers la lentille ?

    L'image géométrique de A se trouve **au foyer image principal F'.**

13. Calculer la différence de chemin optique δ_0 entres les ondes provenant de A et se recombinant en A', passant par les deux trous T_1 et T_2 sur la Figure 6.

    L'objet A se trouvant sur l'axe optique et les deux trous T_1 et T_2 se trouvant à des distances égales de l'axe, **la différence de chemin optique δ_0 est nulle.**

14. En déduire le rôle de la ligne à retard introduite dans le cas de figure décrit par la Figure 5.

    Sur la Figure 5 on voit que les deux faisceau ne prennent pas le même chemin : le faisceau passant par le télescope 2 parcourt une plus grande distance que le télescope 1. **Pour compenser cette différence, on rallonge le chemin du faisceau passant par le télescope 1 à l'aide d'une ligne à retard.**

15. Pour qu'il y ait interférence dans le cas d'ondes lumineuses, on se souvient que le retard entre les deux ondes ne doit pas être plus important que le temps de cohérence τ de la source de ces ondes. Exprimer en fonction de τ et d'autres grandeurs la différence de chemins optiques maximale δ_{max} pour avoir interférence. Expliquer alors la nécessité de la ligne à retard.

    Pour qu'il y ait interférence, il ne faut pas que les deux ondes présentent un retard entre elles supérieur à τ la durée de cohérence : durée pendant laquelle la différence de phase entre les rayons est constante. Ainsi la différence de distance parcourue entre les deux faisceaux ne doit pas excéder la distance parcourue durant τ, soit $c\tau$. La différence de chemins optiques maximale est donc

    $$\delta_{\text{max}} = c\tau.$$

    La ligne à retard assure que la différence de chemin optique est toujours inférieure à cette différence de chemin optique maximale.

16. On considère que les deux ondes ont une amplitude identique. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I_A(x)$ d'un point d'abscisse x dans le plan focal.

    L'intensité I est directement proportionnelle à l'éclairement ε. Ainsi

    $$I_A(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

    avec $I_1(x)$ et $I_2(x)$ les intensités dues aux ondes passant respectivement par T_1 et T_2, et $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}n\left(AT_2x - AT_1x\right)$ la différence de phase entre les deux ondes issues de A, passant par T_1 ou T_2 et arrivant en x.

    À la sortir de la lentille les deux rayons vont parcourir la même distance. La différence de chemin optique se situe en amont de la lentille. En utilisant le triangle rectangle BCD, on voit que l'onde 1 parcourt une distance supplémentaire BC telle que

    $$\sin\theta = \frac{BC}{a}$$

    soit, en utilisant l'approximation des petits angles $BC \approx a\theta$.

    On retrouve cet angle θ dans l'autre triangle rectangle OAx tel que

    $$\tan\theta = \frac{x}{f'}$$

    soit, en utilisant l'approximation des petits angles $\theta \approx \frac{x}{f'}$, et donc

    $$BC \approx \frac{ax}{f'}.$$

    La différence de phase $\Delta\varphi$ est donc telle que

    $$\Delta\varphi = -\frac{2\pi}{\lambda_0}n\frac{ax}{f'}.$$

    Pour deux ondes d'intensités I_1 et I_2 identiques, notée I_0, il vient que

    $$\boxed{I_A(x) = 2I_0(x)\left(1+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}n\frac{ax}{f'}\right)\right).}$$

17. En déduire l'expression de l'interfrange.

    Pour obtenir l'interfrange il faut déterminer les positions x pour lesquelles il y interférences constructrices ou destructrices. On choisit d'étudier les interférences constructrices. Elles apparaissent pour

    $$\frac{2\pi}{\lambda_0}n\frac{ax}{f'} = m2\pi$$

avec m un entier relatif. Ainsi les x_m pour lesquels on a interférences constructrices sont

$$x_m = m\frac{\lambda_0 f'}{na}.$$

L'interfrange est la distance entre deux points x_m telle que

$$i = x_{m+1} - x_m = (m+1)\frac{\lambda_0 f'}{na} - m\frac{\lambda_0 f'}{na}$$

soit

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 f'}{na}.}$$

18. Tracer l'allure de la figure d'interférence dans le plan $(xF'y)$ telle qu'on pourrait l'observer avec une caméra infrarouge.

    On observe une alternance de franges sombres et brillantes perpendiculaires à l'axe (Ox) et (Oz), avec une frange brillante en $x = 0$.

19. Un unique objet ponctuel à l'infini B est observé dans la direction $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique dans le plan xOy avec les mêmes caractéristiques que A.

    À quelle distance x_B de F' se trouve l'image géométrique de B ? On se place dans les conditions de Gauss $i_B \ll 1$.

    L'image B' se trouve sur un foyer image secondaire de la lentille. Cette position est donnée en utilisant le triangle rectangle avec un angle i_B de côté adjacent f' et de côté opposé x_B. Ainsi il vient que

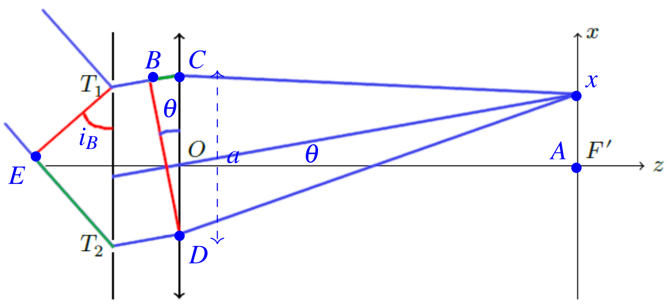
$$\tan i_B = \frac{x_B}{f'}$$

ainsi, en utilisant l'approximation des petits angles

$$\boxed{x_B \approx i_B f'.}$$

20. Déterminer l'expression de l'intensité lumineuse $I_B(x)$ en un point d'abscisse x.

    On peut reprendre les conclusions obtenues précédemment mais cette fois-ci dans le cas représenté ci-dessous.



L'intensité lumineuse $I_B(x)$ en un point x sera telle que

$$I_B(x) = 2I_0(x)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_B(x)\right)\right)$$

avec $\delta_B(x)$ la différence de chemins optiques dans cette situation à déterminer.

On voit que la distance ET_2 s'ajoute au chemin du rayon passant par le trou T_2, la différence de parcours entre ce rayon et le rayon passant par le trou T_1 est donc

$$ET_2 - BC = ET_2 - \frac{ax}{f'}.$$

La distance ET_2 peut être obtenu en se plaçant dans le triangle rectangle ET_2T_1, on voit que

$$\sin i_B = \frac{ET_2}{a}$$

soit, dans le cas de l'approximation des petits angles

$$ET_2 = a i_B = \frac{a x_B}{f'}$$

en utilisant l'expression de x_B obtenu plus tôt.
Ainsi

$$ET_2 - BC = \frac{a x_B}{f'} - \frac{ax}{f'} = \frac{a}{f'}(x_B - x)$$

et la différence de chemins optiques $\delta_B(x)$ est telle que

$$\delta_B(x) = n(ET_2 - BC) = \frac{na}{f'}(x_B - x).$$

L'intensité lumineuse $I_B(x)$ est donc

$$\boxed{I_B(x) = 2I_0(x)\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B - x)\right)\right).}$$

21. L'interfrange est-il différent de celui trouvé précédemment ?

Pour obtenir l'interfrange il faut déterminer les positions x pour lesquelles il y interférences constructrices ou destructrices. On choisit d'étudier les interférences constructrices. Elles apparaissent pour

$$\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x - x_B) = m2\pi$$

avec m un entier relatif. Ainsi les x_m pour lesquels on a interférences constructrices sont

$$x_m = x_B + m\frac{\lambda_0 f'}{na}.$$

L'interfrange est la distance entre deux points x_m telle que

$$i = x_{m+1} - x_m = x_B + (m+1)\frac{\lambda_0 f'}{na} - \left(x_B + m\frac{\lambda_0 f'}{na}\right)$$

soit

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 f'}{na}.}$$

L'interfrange est le même.

22. Deux objets ponctuels à l'infini A et B sont observés dans les directions $i_A = 0$ et $i_B \neq 0$ par rapport à l'axe optique dans le plan xOz. Pour simplifier, on supposera que ces deux objets émettent une unique radiation de longueur d'onde $\lambda = 2{,}00\,\mu\text{m}$ et la même puissance lumineuse.

Erreur du rédacteur.

23. Ces deux sources sont-elles cohérentes ? Justifier la réponse.

    Ces deux sources ne sont pas cohérentes car il n'y a aucune raison que les radiations de deux étoiles différentes présentent des phase à l'origine avec des relations particulières : pas de différence constante au cours du temps, et a fortiori pas d'égalité.

24. En déduire l'intensité lumineuse $I_{\text{total}}(x)$ en un point d'abscisse x. On mettra cette expression sous la forme d'un produit de fonctions sinusoïdales.

    Comme les sources ne sont pas cohérentes, l'intensité totale est simplement la somme de leur intensités soit

$$\begin{aligned} I_{\text{total}}(x) &= I_A(x) + I_B(x) \\ &= 2I_0(x)\left(1+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x\right)\right) + 2I_0(x)\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-x)\right)\right) \\ &= 2I_0(x)\left(2+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x\right)+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-x)\right)\right). \end{aligned}$$

On peut identifier la somme de fonctions sinusoïdales précédentes à la somme de fonctions $\cos(a+b)+\cos(a-b)$, soit en utilisant les identités trigonométriques

$$\cos(a-b)+\cos(a+b) = 2\cos a \cos b.$$

On peut identifier a et b tels que

$$\begin{aligned} a-b &= -\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x \\ a+b &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-x) \end{aligned}$$

donc en sommant les deux dernières relations, et en calculant leur différence

$$\begin{aligned} 2a &= \frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-2x) \\ -2b &= -\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} a &= \frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-2x) \\ b &= -\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{I_{\text{total}}(x) = 2I_0(x)\left(2+2\cos\left(\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}(x_B-2x)\right)\cos\left(-\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B\right)\right).}$$

25. Pour quelle(s) distances(s) a entre les deux télescopes y a-t-il brouillage des interférences ? On exprimera le résultat en fonction de i_B.

    Il y a brouillage des interférences lorsque le terme d'interférence dans l'expression de l'intensité s'annule. On constate que ce terme s'annule lors la fonction $\cos\left(-\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B\right)$ est égale à 0, soit lorsque

$$\frac{\pi}{\lambda_0}\frac{na}{f'}x_B = \left(m+\frac{1}{2}\right)\pi$$

avec m un entier relatif. Ainsi les distances a_m pour lesquelles il y a brouillage sont

$$a_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 f'}{nx_B}$$

soit en exprimant x_B en fonction de i_B

$$\boxed{a_m = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 f'}{nf'i_B} = \left(m+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0}{ni_B}.}$$

26. Proposer alors une méthode de détermination expérimentale de l'angle entre deux étoiles composant une étoile double.

L'intensité de deux étoiles doubles observées avec le VLTI correspond à l'expression obtenue plus tôt. Ainsi si on diminue la distance a, soit la distance entre les deux télescope on peut obtenir la plus petite valeur a_m avec $m=0$ pour laquelle il y a brouillage, soit disparition des franges d'interférences. Dans ce cas

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{ni_B}$$

on obtient alors l'expression de i_B l'angle entre les deux étoiles A et B

$$\boxed{i_B = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{na_0}.}$$

27. Quelle est la valeur numérique (en secondes d'arc) de la limite de résolution angulaire i_m du VLTI ?

La valeur maximale de la distance a dans le cas du VLTI est $a_{\text{max}} = 100\,\text{m}$, donc la limite de résolution du VLTI, soit l'angle minimal $i_{B,\text{min}}$ est tel que

$$i_{B,\text{min}} = \frac{1}{2}\frac{\lambda_0}{na_{\text{max}}}.$$

A.N.

$$\boxed{i_{B,\text{min}} = \frac{1}{2}\frac{2{,}00\times10^{-6}\,\text{m}}{1\times100\,\text{m}} = 1{,}00\times10^{-8}\,\text{rad} = 5{,}73\times10^{-7\circ} = 2{,}06\times10^{-3\,\prime\prime}.}$$

4 Phénomènes d'interférences

28. Déterminer les conditions pour que l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux ondes de même fréquence soit nulle. 7 D'après la formule des interférences l'amplitude du signal résultant de la superposition de deux ondes de même fréquence est

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

avec A_1 et A_2 les amplitudes des deux ondes, et φ_1 et φ_2 les phases des deux ondes.

Pour que A soit nulle il faut que **les amplitudes des ondes soient égales** et que **le cosinus soit égale à -1, soit que la différence de phase** $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ soit telle que

$$\Delta\varphi = \left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi.$$

Par exemple, si $A_1 = A_2 \equiv A_0$

$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 + 2A_0^2\cos\left(\left(m+\frac{1}{2}\right)2\pi\right)}$$
$$A = \sqrt{A_0^2 + A_0^2 - 2A_0^2}$$
$$A = 0.$$

29. Deux ondes sonores de mêmes amplitude A interfèrent. Déterminer la valeur maximale de l'amplitude total.

    La valeur maximale de l'amplitude totale est atteinte, d'après la formule des interférences, lorsque le cosinus est égal à 1, dans ce cas

$$A_{tot} = \sqrt{A^2 + A^2 - 2A^2} = \sqrt{4A^2}$$

$$\boxed{A_{tot} = 2A.}$$

30. Deux ondes lumineuses de même éclairement $\mathscr{E}$ interfèrent. Déterminer la valeur maximale de l'éclairement total.

    Pour deux ondes sinusoïdales, l'éclairement total $\mathscr{E}_{tot}(M)$ au point M est défini tel que

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = \frac{1}{2}K\left\langle A^2(M)\right\rangle$$

avec $A(M)$ l'amplitude du signal résultant de la superposition des ondes lumineuses au point M.
Ainsi

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = \frac{1}{2}K\left\langle A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)\right\rangle$$

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = \frac{1}{2}KA_1^2 + \frac{1}{2}KA_2^2 + KA_1A_2\cos(\Delta\varphi).$$

or comme

$$\mathscr{E}_1 = \frac{1}{2}KA_1^2$$

$$\mathscr{E}_2 = \frac{1}{2}KA_2^2$$

il vient que

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + 2\sqrt{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2}\cos(\Delta\varphi)$$

de plus comme $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}$ il vient que

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = 2\mathscr{E} + 2\mathscr{E}\cos(\Delta\varphi).$$

On voit que l'éclairement est maximal, si la différence de phase entre les ondes est un multiple entier de 2π, soit $\Delta\varphi = m2\pi$. Il vient alors que

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = 2\mathscr{E} + 2\mathscr{E}$$

$$\boxed{\mathscr{E}_{tot}(M) = 4\mathscr{E}.}$$

31. Deux ondes lumineuses de même éclairement $\mathscr{E}$ interfèrent. Déterminer la valeur du déphasage lorsque l'éclairement total est à $\mathscr{E}$. En déduire la différence de chemin optique.

    Comme on l'a vu précédemment deux ondes de même éclairement et de même fréquence produisent un éclairement total tel que

$$\mathscr{E}_{tot}(M) = 2\mathscr{E} + 2\mathscr{E}\cos(\Delta\varphi).$$

Lorsque $\mathscr{E}_{tot}(M) = \mathscr{E}$ il vient

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E} + 2\mathscr{E}\cos(\Delta\varphi)$$

$$\mathscr{E} = 2\mathscr{E}(1 + \cos(\Delta\varphi))$$

$$\frac{1}{2} = 1 + \cos(\Delta\varphi)$$

$$-\frac{1}{2} = \cos(\Delta\varphi)$$

soit

$$\boxed{\Delta\varphi = \pm\frac{2\pi}{3} + 2m\pi}$$

avec m un entier relatif.

Or la différence de chemin optique δ est défini tel que

$$\boxed{\delta = \frac{\lambda_0}{2\pi}\Delta\varphi = \pm\frac{\lambda_0}{3} + m\lambda_0.}$$

32. Déterminer l'ordre des franges brillantes visibles sur la Figure 7.

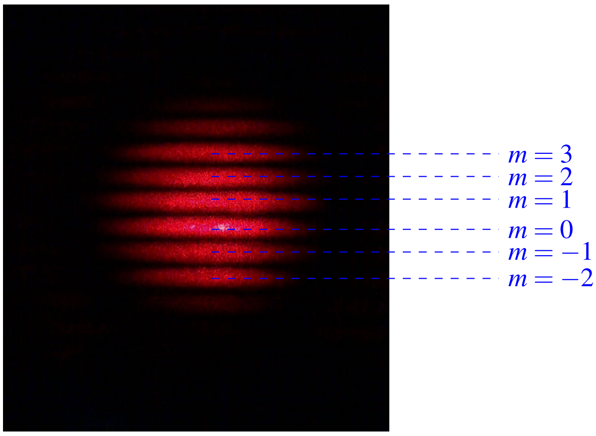


Figure 7: Figure d'interférence produite par les trous d'Young[1].

On peut observer clairement 6 franges. La franges la plus brillante étant la frange centrale ou la troisième frange en partant du bas, sont ordre est $m = 0$. Les ordres des franges inférieures sont $m = -1$ et $m = -2$. Les ordres des franges supérieures sont $m = 1$, $m = 2$ et $m = 3$.

33. Un dispositif de trous d'Young est installé de telle manière que la différence de marche entre les deux ondes lumineuses varient entre -3 µm et 3 µm sur la zone éclairée de l'écran, zone qu'on appelle champ d'interférence. La longueur d'onde des deux ondes est $\lambda = 532$ nm. Déterminer le nombre de franges brillantes et le nombre de franges sombres.

Une frange brillante correspond à une différence de chemin optique entre les deux ondes lumineuses issues de trous d'Young telle que

$$\delta = m\lambda_0.$$

Ainsi si la différence de marche ou différence de chemin optique est comprise entre -3 µm et 3 µm cela veut dire que

$$-3 \text{ µm} \leq m\lambda_0 \leq 3 \text{ µm}$$

$$-3 \text{ µm} \leq m 532 \text{ nm} \leq 3 \text{ µm}$$

soit

$$-5{,}6 \leq m \leq 5{,}6.$$

Donc m est un entier variant de -5 à 5 : **il y a 11 franges claires** avec la frange d'ordre $m = 0$.

Pour les franges sombres, la différence de chemin optique impose que

$$\delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0$$

donc

$$-3 \text{ µm} \leq \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda_0 \leq 3 \text{ µm}$$

[1]Source : site de François Legrand.

$$-3\ \mu\text{m} \leq \left(m+\frac{1}{2}\right) 532\ \text{nm} \leq 3\ \mu\text{m}$$

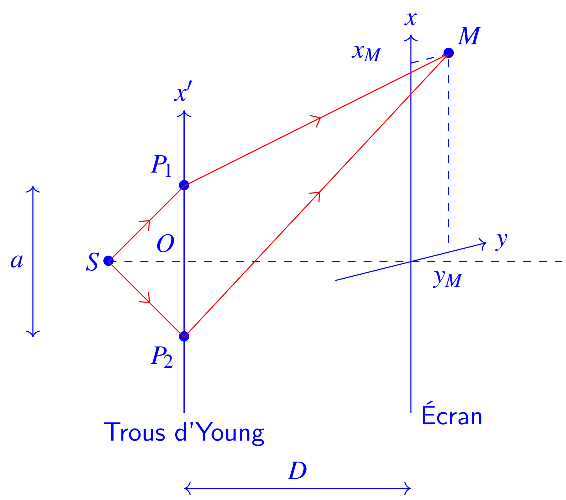
soit

$$-5,6 \leq m+\frac{1}{2} \leq 5,6.$$

$$-6,1 \leq m \leq 5,1.$$

Donc m est un entier variant de -6 à 5 : **il y a 12 franges sombres** avec la frange d'ordre $m=0$.

34. Schématiser une expérience de trous d'Young pour laquelle la distance entre les trous et un écran est égale à D et les trous sont orientés selon un axe (Ox'). Retrouver l'expression de la différence de chemin optique entre deux ondes $\delta = \frac{nax}{D}$.



Voir cours pour la démonstration.

35. À partir de l'expression de la différence de chemin optique précédente, en déduire l'expression de l'interfrange i.

Voir cours pour la démonstration.

36. On constate que les franges de la figure d'interférence obtenue dans une expérience de trous d'Young sont trop serrées. Déterminer comment déplacer l'écran pour y remédier.

Comme $i = \lambda D/a$, pour augmenter l'écart entre les franges, soit l'interfrange, on peut augmenter D, soit **reculer l'écran** par rapport aux trous d'Young.

37. La Figure 7 a été obtenue à l'aide d'un capteur CCD rectangulaire avec une longueur de $4,4$ mm, une largeur de $4,0$ mm et comportant $9,0.10^6$ pixels carrés. Déterminer la valeur du côté l d'un pixel.

En déduire la valeur de l'interfrange i à partir de la Figure 7.

La surface S du capteur est telle que

$$S = 4,4.10^{-3} \times 4,0.10^{-3} = 1,8.10^{-5}\ \text{m}^2.$$

Sur cette surface se répartissent $9,0.10^6$ pixels carrés, un seul pixel prend donc une surface S_p telle que

$$S_p = \frac{S}{9,0.10^6} = \frac{1,8.10^{-5}}{9,0.10^6} = 2,0.10^{-12}\ \text{m}^2.$$

Un pixel étant carré, son côté l est tel que

$$\boxed{l = \sqrt{S_p} = \sqrt{2,0.10^{-12}} = 1,4.10^{-6}\ \text{m} = 1,4\ \mu\text{m}.}$$

Sur la figure on mesure un écart entre 6 franges claires de 1,5 cm, l'interfrange apparent est donc $i_a = 1,5/5 = 0,30$ cm. Om mesure une longueur apparente du capteur $l_a = 5,1$ cm. Ainsi la relation entre les longueurs apparentes et les longueurs réelles sont

$$\frac{l_a}{l} = \frac{i_a}{i}$$

donc

$$i = i_a \frac{l}{l_a}.$$

A.N.

$$\boxed{i = 0,30.10^{-2} \times \frac{4,4.10^{-3}}{5,1.10^{-2}} = 2,6.10^{-4} \text{ m.}}$$

38. En déduire la valeur de la distance D entre le capteur et les trous sachant que $\lambda = 633$ nm et $a = 1,5$ mm.

5 Problème ouvert

Deux stations de radio sont distantes de 250 m et émettent en phase des ondes avec une longueur d'onde de 100 m. Un point A est à 400 m des deux stations, un point B à 450 m des deux stations, et un point C est à 400 m de l'une et 450 m de l'autre. Déterminer les types d'interférences qu'on observe aux points A, B et C.

Comme les ondes ont la même longueur d'onde, elles ont aussi la même fréquence. De plus, étant émises en phase, leur différence de phase à l'origine est nulle. On peut obtenir le type d'interférence qu'elles produisent directement à partir de leur différence de marche, soit la différence de distances entre le point étudié et les sources des deux ondes.

Au point A la différence de marche entre les deux ondes est

$$\delta(A) = 400 - 400 = 0.$$

Comme $\delta(A) = m\lambda = m100$ m avec $m = 0$, il y a **interférence constructrice** entre les deux ondes.

Au point B la différence de marche entre les deux ondes est

$$\delta(B) = 450 - 450 = 0.$$

Comme $\delta(B) = m\lambda = m100$ m avec $m = 0$, il y a **interférence constructrice** entre les deux ondes.

Au point C la différence de marche entre les deux ondes est

$$\delta(C) = 450 - 400 = 50 \text{ m}.$$

Comme $\delta(C) = (m + 1/2)\lambda = (m + 1/2)\,100$ m avec $m = 0$, il y a **interférence destructrice** entre les deux ondes.