Fiche méthode 4 - Forces et énergies potentielles

Cette fiche liste les expressions des différentes forces à connaître en MP2I ainsi que les énergies potentielles associées lorsque ces forces en dérivent.

I. Poids

Force à distance à la surface d'un astre présentant un accélération de pesanteur $\overrightarrow{g}$ (familièrement appelée "pesanteur") et exercée au niveau du centre de gravité d'un objet de masse m situé en un point M.

$$\boxed{\overrightarrow{F} \equiv \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}.}$$

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM}$$

pour $\overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u}_x + \mathrm{d}y\overrightarrow{u}_y + \mathrm{d}z\overrightarrow{u}_z$ et $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u}_z$

$$\delta W = -mg\mathrm{d}z = \mathrm{d}\left(-mgz\right).$$

Le travail élémentaire se met sous la forme d'une différentielle d'une coordonnée de position, **la force dérive bien d'une énergie potentielle** telle que

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W = \mathrm{d}\left(mgz\right)$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_p = mgz + \text{cst.}}$$

II. Force gravitationnelle

Force à distance exercée par un astre de masse M situé en O exercée au niveau du centre de gravité d'un objet de masse m situé en un point M à une distance r de O.

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -G\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{u}_r}$$

avec $G = 6{,}6743 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3{\cdot}\mathrm{kg}^{-1}{\cdot}\mathrm{s}^{-2}$ la constante de gravitation universelle.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = -G\frac{mM}{r^2}\overrightarrow{u}_r \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM}$$

pour $\overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u}_\varphi$

$$\delta W = -G\frac{mM}{r^2}\mathrm{d}r = \mathrm{d}\left(G\frac{mM}{r}\right).$$

Le travail élémentaire se met sous la forme d'une différentielle d'une coordonnée de position, **la force dérive bien d'une énergie potentielle** telle que

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W = \mathrm{d}\left(-G\frac{mM}{r}\right)$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -G\frac{mM}{r} + \text{cst.}}$$

III. Force de réaction du support

Force de contact exercée par le support sur lequel se trouve un objet de masse m situé en un point M.

En première année on considère seulement les cas où le support présente un plan horizontal. Dans ce cas la réaction du support notée $\overrightarrow{R}$ compense exactement le poids $\overrightarrow{P}$ de l'objet de telle manière que

$$\overrightarrow{F} \equiv \overrightarrow{R} = -\overrightarrow{P}.$$

Si l'objet décolle du support ou s'enfonce dans le support, cette force s'annule.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = 0$$

car si l'objet se déplace dans la direction de la force de réaction du support, alors celle-ci s'annule, ainsi **La force de réaction du support ne travaille pas**.

IV. Force de tension

Force de contact exercée par un fil tendu attaché à un support et retenant un objet de masse m situé en un point M.

La tension du fil notée $\overrightarrow{T}$ compense exactement le poids $\overrightarrow{P}$ de l'objet de telle manière que

$$\overrightarrow{F} \equiv \overrightarrow{T} = -\overrightarrow{P}.$$

Si le fil se détend ou s'allonge alors cette force s'annule.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = 0$$

car si l'objet se déplace dans la direction de la force de tension du fil, alors celle-ci s'annule, ainsi **La force de tension du support ne travaille pas**.

Travail de la force

V. Force de rappel d'un ressort

Force de contacte exercée par un ressort de longueur à vide l_{eq}, de constante de raideur k, avec une extrémité fixée en O sur une masselotte m située en un point x en considérant que le ressort est aligné avec l'axe (Ox).

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -k\,(x - l_{eq})\,\overrightarrow{u}_x}.$$

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u}_x = -k\,(x - l_{eq})\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}\left(-\frac{1}{2}k\,(x - l_{eq})^2\right)$$

Le travail élémentaire se met sous la forme d'une différentielle d'une coordonnée de position, **la force dérive bien d'une énergie potentielle** telle que

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \mathrm{d}\left(\frac{1}{2}k\,(x - l_{eq})^2\right)$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\,(x - l_{eq})^2 + \text{cst.}}$$

VI. Force de frottement visqueux

Force de contact exercée par un fluide sur un objet située en un point M de l'espace se déplaçant avec une vitesse $\overrightarrow{v}$.

Elle peut être propotionnelle à la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'objet, ou proportionnelle au carré de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de l'objet. Dans tous les cas elle est opposée à son mouvement donc opposé à $\overrightarrow{v}$.

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\alpha\,\overrightarrow{v} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{F} = -\beta v\,\overrightarrow{v}}$$

avec α en $\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$ et β en $\mathrm{kg \cdot m^{-1}}$ des coefficients de frottement dépendant de la taille de l'objet et de la viscosité du fluide.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = -\alpha \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} \qquad \text{ou} \qquad \overrightarrow{F} = -\beta v \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM}.$$

Le travail élémentaire ne peut pas se mettre sous la forme d'une différentielle d'une coordonnée de position, **la force de frottement visqueux ne dérive pas d'une énergie potentielle.**

VII. Force électrostatique

Force à distance exercée par un champ électrique $\overrightarrow{E}$ sur un objet de charge électrique q située en un point M.

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}(M)}$$

avec $\overrightarrow{E}(M)$ la valeur du champ électrique au point M.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = q\overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM}.$$

Le travail élémentaire ne dépend que de la position donc il peut se mettre sous la forme d'une différentielle d'une coordonnée de position, **la force dérive bien d'une énergie potentielle.**

Pour l'exprimer on peut utiliser la relation entre champ électrique $\overrightarrow{E}(M)$ et potentiel électrique $V(M)$ au point M : le champ électrique est égal à l'opposé du gradient du potentiel électrique, soit en coordonnées sphériques

$$\overrightarrow{E}(M) = -\overrightarrow{\nabla}V(M) = -\left(\frac{\partial V(M)}{\partial r}\overrightarrow{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V(M)}{\partial \theta}\overrightarrow{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial V(M)}{\partial \varphi}\overrightarrow{u}_\varphi\right).$$

ainsi pour un vecteur position $\overrightarrow{\mathrm{d}OM} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u}_r + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\overrightarrow{u}_\varphi$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -\delta W &= -q\overrightarrow{E}(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} = q\overrightarrow{\nabla}V(M) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}OM} \\ &= \left(q\left(\frac{\partial V(M)}{\partial r}\mathrm{d}r + \frac{\partial V(M)}{\partial \theta}\mathrm{d}\theta + \frac{\partial V(M)}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi\right)\right) = q\mathrm{d}V(M) = \mathrm{d}(qV(M))\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_p = qV(M) + \text{cst.}}$$

VIII. Force magnétique

Force à distance exercée par un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ sur un objet de charge électrique q située en un point M de l'espace et se déplaçant avec une vitesse $\overrightarrow{v}$.

$$\boxed{\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}(M)}$$

avec $\overrightarrow{B}(M)$ la valeur du champ magnétique au point M.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = q\left(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}(M)\right) \cdot \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t = 0.$$

La force magnétique exercée sur une particule chargée ne travaille pas (le produit vectorielle donne un vecteur orthogonal à $\overrightarrow{v}$, donc le produit scalaire est nul). Mais on verra qu'on peut exprimer son énergie potentielle.

IX. Force de Laplace

On considère une portion infinitésimale de circuit électrique orientée $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$ parcouru par un courant d'intensité i et plongé dans un champ magnétique uniforme $\overrightarrow{B}$. La force de Laplace élémentaire que subit cette portion de circuit est telle que

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = i\mathrm{d}\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B}.}$$

En intégrant sur le circuit de longueur $\mathcal{L}$ par rapport à $\mathrm{d}\overrightarrow{l}$, la force $\overrightarrow{F}$ de Laplace exercée est

$$\overrightarrow{F} = \int_{\mathcal{L}} i\mathrm{d}\overrightarrow{l} \wedge \overrightarrow{B}.$$

Si le courant et le champ sont les mêmes quelques soit l'élément de longueur infinitésimal du circuit alors il vient que

$$\boxed{\overrightarrow{F} = i\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B}}$$

avec $\overrightarrow{L}$ la longueur orientée du circuit.

N.B. L'orgine de cette force est la force magnétique, force à distance exercée par le champ magnétique sur les électrons du circuit, qui, eux-mêmes, exercent une force de contact sur le réseaux ioniques constitutifs du circuit.

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = i\left(\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B}\right) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = i\overrightarrow{B} \cdot \left(\mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{L}\right) = i\overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$$

avec $\mathrm{d}\overrightarrow{S} = \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{L}$ l'élément de surface élémentaire orientée balayée par le circuit de longueur L lors de son déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

Le vecteur longueur du circuit $\overrightarrow{L}$ est constant quelque soit la position du circuit, ainsi que le champ magnétique $\overrightarrow{B}$ dans le cas d'un champ uniforme. Ainsi la force de Laplace dans ce cas dérive bien d'une énergie potentielle.

Si on introduit le flux magnétique élémentaire $\phi = \overrightarrow{B} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}$ il vient que

$$\boxed{\mathrm{d}\mathcal{E}_p = -i\mathrm{d}\phi.}$$

donc, en intégrant sur toute la surface $\mathcal{S}$

$$\boxed{\mathcal{E}_p = -i\phi + \text{cst.}}$$

X. Force de pression

On considère que la force de contact infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{F}$ exercée par un fluide sur un élément infinitésimal de surface $\mathrm{d}\overrightarrow{S}$ d'un objet orientée vers l'extérieur de cette objet est définie telle que

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F} = P\mathrm{d}\overrightarrow{S}}$$

avec P la pression du fluide au point niveau de la surface élémentaire.

La force $\overrightarrow{F}$ sur toute la surface $\mathcal{S}$ est telle que

$$\boxed{\overrightarrow{F} = \int_{\mathcal{S}} P\mathrm{d}\overrightarrow{S}.}$$

Travail de la force

$$\delta W = \overrightarrow{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \left(\int_{\mathcal{S}} P\mathrm{d}\overrightarrow{S}\right)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

Si on considère que l'élément de surface se déplace d'une longueur $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}\,\overrightarrow{l}$, on peut introduire l'élément de volume infinitésimal balayé par le dépalcement de la surface infinitésimale $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\overrightarrow{S}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{l}$. En intégrant sur toute la longueur $\mathcal{L}$ sur laquelle la surface s'est déplacée, on obtient le travail total

$$W = \int_{\mathcal{L}}\int_{\mathcal{S}} P\mathrm{d}\overrightarrow{S}\cdot\mathrm{d}\,\overrightarrow{l} = \int_{\mathcal{V}} P\mathrm{d}\tau$$

avec $\mathcal{V}$ le volume total balayé par toute la surface $\mathcal{S}$ en se déplaçant de $\mathcal{L}$.

La pression ne peut pas se mettre sous la forme d'une fonction de la position **en général !** Néanmoins sous certaines conditions cela est possible. On pourra donc voir, particulièrement en mécanique des fluides, le terme d'énergie potentielle de force de pression. **En MP2I on considérera que la force de pression ne dérive pas d'une énergie potentielle en général !**

XI. Poussée d'Archimède

La résultante des forces de pression exercées par un fluide de masse volumique ρ sur un objet dans le volume immergé est V_{im} correspond à la force de contact appelée poussée d'Archimède définie telle que

$$\boxed{\overrightarrow{F} \equiv \overrightarrow{\Pi} = -\rho V_{\text{im}}\overrightarrow{g}}$$

avec $\overrightarrow{g}$ l'accélération de pesanteur.

Travail de la force

Cette force, puisqu'elle correspond à la résultante de forces de pression, pour les mêmes raisons que la force de pression, **la poussée d'Archimède ne dérive pas, en général d'une énergie potentielle**.