DM 1 : étude du circuit RL série

1 Réponse indicielle du circuit

On cherche à obtenir la réponse indicielle du circuit RL série, soit ici pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$, c'est-à-dire l'expression du signal de sortie intensité du courant $i(t)$ suite à l'entrée d'un signal de tension $e(t)$ représentée Figure 1. On étudiera également la réponse de sortie du circuit en tension $u_L(t)$.

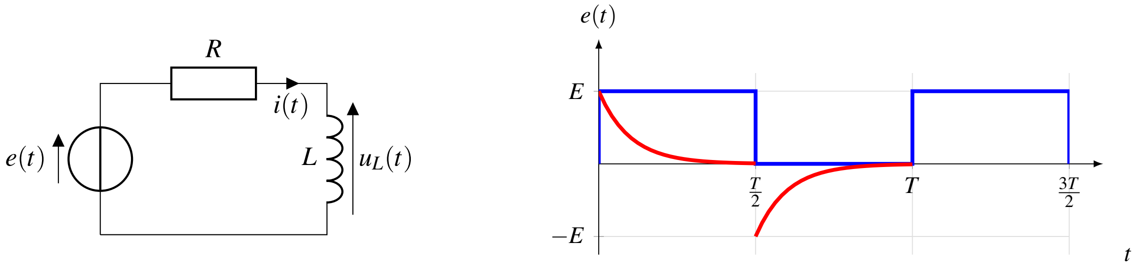


Figure 1: Schéma électrique du circuit RL série et évolution de $e(t)$ au cours du temps.

1. **Obtenir** l'équation différentielle du premier ordre en $i(t)$ pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$.

   En utilisant la loi des mailles

   $$e(t) = u_R(t) + u_L(t)$$
   $$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

   Pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$, il vient que

   $$\boxed{E = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$

2. **Trouver** la condition initiale pour $i(t)$.

   Il y a **continuité de l'intensité du courant parcourant une bobine**, ainsi à $i(t=0^-) = i(t=0^+) = i(t=0) = 0$.

3. **Résoudre** l'équation différentielle pour obtenir la réponse en intensité du courant du circuit $i(t)$ pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$. **Déterminer** τ la constante de temps du circuit.

   En utilisant la relation obtenue plus tôt

   $$E = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

   La solution particulière I_p est telle que

   $$E = RI_p$$

   soit

   $$I_p = \frac{E}{R}.$$

La solution homogène $i_h(t)$ est telle que

$$0 = Ri_h(t) + L\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t}.$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i_h(t).$$

On cherche donc une fonction i_h qui, lorsqu'on la dérive, est égale à elle-même multipliée par un facteur $-\frac{R}{L}$, on peut utiliser l'expression

$$i_h(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

avec A une constante d'intégration à déterminer à partir de la condition initiale.
On remarque que $\frac{R}{L}$ est homogène à l'inverse d'une durée, la constante τ du circuit est telle que $\tau = \frac{L}{R}$.
La solution générale est telle que

$$i(t) = I_p + i_h(t)$$
$$i(t) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}t}.$$

En utilisant la condition initiale

$$i(t=0) = \frac{E}{R} + Ae^{-\frac{R}{L}\times 0} = \frac{E}{R} + A = 0.$$

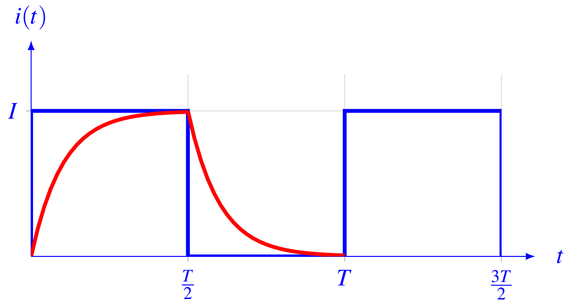
ainsi

$$A = -\frac{E}{R}$$

et donc

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).}$$

4. **Représenter** $i(t)$ sur un graphique .



5. **En déduire** la réponse en tension du circuit $u_L(t)$ pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$.
En utilisant la loi de la bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$u_L(t) = -L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$, il vient que

$$\boxed{u_L(t) = Ee^{-\frac{R}{L}t}.}$$

6. **Représenter** $u_L(t)$ sur un graphique avec $e(t)$.

2 Réponse du circuit en régime libre

On cherche à obtenir le comportement du circuit RL série en régime libre, soit ici pour $\frac{T}{2} \leq t < T$, c'est-à-dire l'expression du signal de sortie intensité du courant $i(t)$ suite à l'entrée d'un signal de tension $e(t)$. On étudiera également la réponse de sortie du circuit en tension $u_L(t)$.

7. **Obtenir** l'équation différentielle du premier ordre en $i(t)$ pour $\frac{T}{2} \leq t < T$.

   En utilisant la loi des mailles

$$e(t) = u_R(t) + u_L(t)$$
$$e(t) = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

   Pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$, il vient que

$$\boxed{E = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.}$$

8. **Trouver** la condition initiale pour $i(t)$.

   Il y a **continuité de l'intensité du courant parcourant une bobine**, ainsi à $i\left(t = \frac{T^-}{2}\right) = i\left(t = \frac{T^+}{2}\right) = i\left(\frac{T}{2}\right)$ soit, en utilisant l'expression de $i(t)$ pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$

$$\boxed{i\left(\frac{T}{2}\right) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\frac{T}{2}}\right).}$$

9. **Résoudre** l'équation différentielle pour obtenir la réponse en intensité du courant du circuit $i(t)$ pour $\frac{T}{2} \leq t < T$. **Déterminer** τ la constante de temps du circuit.

   En utilisant la relation obtenue plus tôt

$$0 = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

   La solution générale correspond à la solution homogène $i_h(t)$ telle que

$$0 = Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

   soit

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}i(t).$$

   On cherche donc une fonction i qui, lorsqu'on la dérive, est égale à elle-même multipliée par un facteur $-\frac{R}{L}$, on peut utiliser l'expression

$$i(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

   avec A une constante d'intégration à déterminer à partir de la condition initiale.

   On remarque que $\frac{R}{L}$ est homogène à l'inverse d'une durée, la constante τ du circuit est telle que $\tau = \frac{L}{R}$.

   En utilisant la condition initiale

$$i\left(\frac{T}{2}\right) = Ae^{-\frac{R}{L}\frac{T}{2}} = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}\frac{T}{2}}\right).$$

ainsi

$$A = \frac{E}{R}\left(e^{\frac{R}{L}\frac{T}{2}} - 1\right)$$

et donc

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(e^{\frac{R}{L}\frac{T}{2}} - 1\right)e^{-\frac{R}{L}t}.}$$

10. **Représenter** $i(t)$ sur le graphique de la question 4.
11. **En déduire** la réponse en tension du circuit $u_L(t)$ pour $\frac{T}{2} \leq t < T$.

En utilisant la loi de la bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$u_L(t) = L\frac{E}{R}\left(-\frac{R}{L}\right)\left(e^{\frac{R}{L}\frac{T}{2}} - 1\right)e^{-\frac{R}{L}t}$$

Pour $0 \leq t < \frac{T}{2}$, il vient que

$$\boxed{u_L(t) = E\left(1 - e^{\frac{R}{L}\frac{T}{2}}\right)e^{-\frac{R}{L}t}.}$$

12. **Représenter** $u_L(t)$ sur le graphique de la question 6.

3 Bilan de puissances et d'énergies pour un signal créneau

On effectue les bilans dans le cas d'un signal créneau $e(t) = E$ pour tout t.

13. **Exprimer** $\mathscr{P}_L(t)$ la puissance fournie à la bobine en fonction de τ, E et R.

D'après la définition de la puissance électrique

$$\mathscr{P}_L(t) = u_L(t) \times i(t) = Ee^{-\frac{t}{\tau}} \times \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

ainsi

$$\boxed{\mathscr{P}_L(t) = \frac{E^2}{R}\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - e^{-\frac{2t}{\tau}}\right).}$$

14. **Exprimer** $\mathscr{E}_{mag}$ l'énergie magnétique stockée dans la bobine entre $t = 0$ et $t \to +\infty$ en fonction de L et $I_{\mathrm{max}} = \frac{E}{R}$.

D'après la définition de l'énergie magnétique

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_{mag} &= \int_{t=0}^{t\to+\infty} \mathscr{P}_L(t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{E^2}{R}\left(\int_{t=0}^{t\to+\infty} e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{d}t - \int_{t=0}^{t\to+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{E^2}{R}\left(\left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\right]_{t=0}^{t\to+\infty} - \left[-\frac{\tau}{2}e^{-\frac{2t}{\tau}}\right]_{t=0}^{t\to+\infty}\right) \\
&= \frac{E^2}{R}\left(\tau - \frac{\tau}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}L\left(\frac{E}{R}\right)^2
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\mathscr{E}_{mag} = \frac{1}{2} L I_{\text{max}}^2.}$$

15. **Exprimer** $\mathscr{P}_G(t)$ la puissance fournie par le générateur de tension en fonction de τ, E et R.

   D'après la définition de la puissance électrique

$$\mathscr{P}_G(t) = E \times i(t)$$

   ainsi

$$\boxed{\mathscr{P}_G(t) = \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).}$$

16. **Exprimer** $\mathscr{P}_J(t)$ la puissance perdue par effet Joule par le résistor en fonction de τ, E et R.

   D'après la définition de la puissance électrique

$$\mathscr{P}_G(t) = u_R(t) \times i(t) = Ri^2(t)$$

   ainsi

$$\boxed{\mathscr{P}_G(t) = \frac{E^2}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)^2.}$$

17. Sans calcul, en considérant le comportement de la bobine en régime permanent, **déterminer** $\mathscr{E}_G$ l'énergie fournie par le générateur et $\mathscr{E}_J$ l'énergie perdue par effet Joule entre $t = 0$ et $t \to +\infty$.

   En régime permanent, la bobine se comporte comme un interrupteur fermé, il n'y a donc pas d'énergie stockée sous forme magnétique : toute l'énergie fournie par le générateur est fournie au résistor qui l'évacue sous forme de chaleur par effet Joule.

4 Problème de contact électrique

Afin d'alimenter un train électrique, on utilise des caténaires : un ensembles de fils électriques qui l'alimentent en tension. Néanmoins le contact entre le pantographe du train (dispositif de captage de la tension) et le fil d'alimentation du caténaire n'est pas parfait, il se produit un phénomène qui peut détériorer les dispositifs.

Afin d'étudier ce phénomène on modélise le caténaire par un générateur de tension idéal, le pantographe par un circuit RL de résistance r et d'inductance L. On modélise le problème de contact par un interrupteur K placé en série et qui s'ouvre à l'instant $t = 0$.

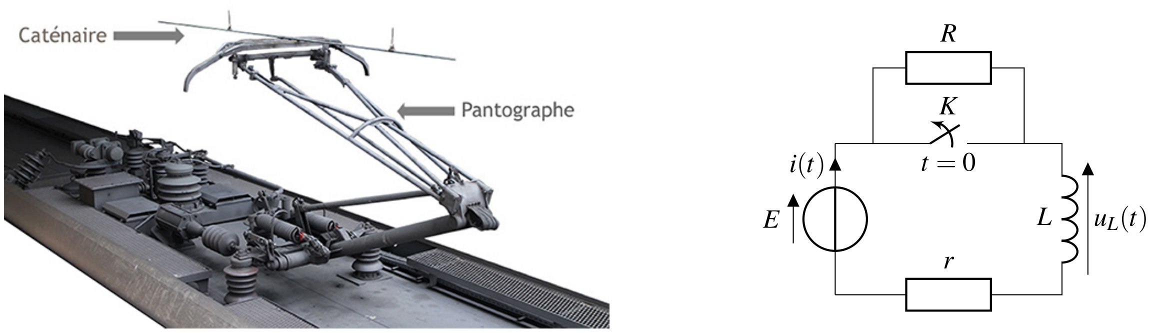


Figure 2: Principe de fonctionnement du caténaire et du pantographe, et schéma électrique du modèle.

Dans ce modèle, la bobine réelle a une inductance $L = 3\,\mathrm{mH}$, le résistor a une résistance $r = 2\,\Omega$, et le générateur idéal a une tension continue $E = 12\,\mathrm{V}$. La résistance $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ en parallèle de l'interrupteur K représente la résistance de l'air, qui est très grande, et **n'intervient que lorsque l'interrupteur est ouvert**. On cherche à obtenir $u(t)$ l'expression de la tension aux bornes de l'interrupteur K lorsqu'on l'ouvre à partir de l'instant $t = 0$.

18. **Déterminer** la valeur de $u(t = 0)$ juste avant l'ouverture de l'interrupteur K. **Faire** l'application numérique.

   Juste avant l'ouverture, l'interrupteur est fermé, la tension à ses bornes est donc nulle $u(t = 0) = 0$.

19. **Établir** l'équation différentielle respectée par $u(t)$ à partir de $t = 0$. On considère que $R \gg r$.

   À l'ouverture, la tension aux bornes de l'interrupteur $u(t)$ correspond à la tension aux bornes du résistor de résistance R. Si on utilise la loi des mailles

$$\begin{aligned} E &= u_R(t) + u_L(t) + u_r(t) \\ &= Ri(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + ri(t) \\ &= (R+r)\,i(t) + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}. \end{aligned}$$

   On peut multiplier par R dans la dérivée car ce coefficient ne dépend pas du temps, ainsi

$$E = \frac{R+r}{R}Ri(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}Ri}{\mathrm{d}t}$$

   soit pour $R \gg r$

$$\boxed{E = u(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.}$$

20. **Résoudre** l'équation différentielle en $u(t)$.

   En utilisant la relation obtenue plus tôt

$$E = u(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

   La solution particulière U_p est telle que

$$E = U_p$$

   soit

$$U_p = E.$$

   La solution homogène $u_h(t)$ est telle que

$$0 = u_h(t) + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t}.$$

   soit

$$\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L}u_h(t).$$

   On cherche donc une fonction u_h qui, lorsqu'on la dérive, est égale à elle-même multipliée par un facteur $-\frac{R}{L}$, on peut utiliser l'expression

$$u_h(t) = Ae^{-\frac{R}{L}t}$$

   avec A une constante d'intégration à déterminer à partir de la condition initiale.

On remarque que $\frac{R}{L}$ est homogène à l'inverse d'une durée, la constante τ du circuit est telle que $\tau = \frac{L}{R}$.
La solution générale est telle que

$$u(t) = U_p + u_h(t)$$
$$u(t) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}}.$$

La condition initiale porte sur la tension $u(t)$. Il n'y a pas de condition de continuité sur un résistor, mais il y en a une sur l'intensité du courant parcourant la bobine. À $t = 0$ le circuit se résume à un résistor de résistance r en série avec le générateur de tension. Ainsi, à $t = 0$, $u_r(t = 0) = E = rI$, donc

$$u(t = 0) = RI = \frac{R}{r}E.$$

En utilisant cette condition initiale

$$u(t = 0) = E + Ae^{-\frac{t}{\tau}\times 0} = E + A = \frac{R}{r}E$$

soit

$$A = \frac{R}{r}E - E = E\left(\frac{R}{r} - 1\right).$$

et donc

$$\boxed{u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + E\frac{R}{r}e^{-\frac{t}{\tau}}.}$$

21. **Exprimer** la valeur de $u(t = 0)$ et $\lim_{t\to+\infty} u(t)$ en fonction de R, r et E. **Faire** l'application numérique. **Décrire** le phénomène qui apparaît à $t = 0$ **dans le cas du contact caténaire-pantographe**.
Pour $t = 0$

$$u(t = 0) = E\frac{R}{r}.$$

A.N.

$$\boxed{u(t = 0) = 12\,\mathrm{V} \times \frac{10 \times 10^3\,\Omega}{2\,\Omega} = 60 \times 10^3\,\mathrm{V}.}$$

Pour $\lim_{t\to+\infty} u(t)$

$$\boxed{u(t \to +\infty) = E = 12\,\mathrm{V}.}$$

22. Afin de déterminer la durée de ce phénomène, on considère qu'il dure de $t = 0$ jusqu'à $t = T_R$ le temps de réponse du circuit définit tel que $\left|u(T_R) - \lim_{t\to+\infty} u(t)\right| = 0{,}01 \times \lim_{t\to+\infty} u(t)$. **Exprimer** T_R en fonction de L, R et r. **Faire** l'application numérique.
Le temps de réponse du circuit T_R est défini tel que

$$E\left(1 - e^{-\frac{T_R}{\tau}}\right) + E\frac{R}{r}e^{-\frac{T_R}{\tau}} - E = 0{,}01 \times E$$
$$\left(1 - e^{-\frac{T_R}{\tau}}\right) + \frac{R}{r}e^{-\frac{T_R}{\tau}} - 1 = 0{,}01$$
$$e^{-\frac{T_R}{\tau}}\left(\frac{R}{r} - 1\right) = 0{,}01$$
$$e^{-\frac{T_R}{\tau}} = 0{,}01\frac{r}{R - r}$$
$$T_R = -\tau \ln\left(0{,}01\frac{r}{R - r}\right)$$

soit

$$T_R = -\frac{L}{R}\ln\left(0{,}01\frac{r}{R-r}\right)$$

A.N.

$$\boxed{T_R = -\frac{3\times10^{-3}\,\mathrm{H}}{10\times10^{3}\,\Omega}\ln\left(0{,}01\frac{2\,\Omega}{10\times10^{3}\,\Omega-2\,\Omega}\right) = 3{,}9\times10^{-6}\,\mathrm{s}.}$$

23. **Déterminer** le type dipôle que l'on pourrait placer en parallèle de l'interrupteur K afin d'éviter ce phénomène.

En plaçant un condensateur en parallèle on utilise la continuité de la tension à ses bornes qui est nulle à $t=0$. Cela évite le phénomène de surtension sur un durée extrêmement courte que l'on a observé plus tôt. Cette surtension peut créer une étincelle de rupture qui est néfaste pour les caténaires.