Fonctions convexes

C - Convexité

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Généralités

La fonction f est convexe sur I si, pour tous $(x, y) \in I^2$ et $\lambda \in [0, 1]$, $f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$.

Inégalité de Jensen : si f est une fonction convexe sur un intervalle I , on a l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$$

quels que soient les réels positifs $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de somme 1 et quels que soient les éléments $x_1, \dots, x_n$ de I .

Caractérisation de la convexité par la croissance des pentes.

Position du graphe d'une fonction convexe par rapport à ses sécantes.

Interprétation géométrique.

Tout développement général sur les barycentres est hors programme.

b) Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables

Caractérisation des fonctions convexes dérivables.

Position du graphe d'une fonction convexe dérivable par rapport à ses tangentes.

Caractérisation des fonctions convexes deux fois dérivables.

Exercices traités en TD

Les exercices 1 à 5 ont été traités. .

Questions de cours.

Question 1:

Énoncer la définition d'une fonction convexe.

Question 2:

Énoncer l'inégalité de Jensen.

Question 3:

Énoncer le théorème de la croissance des pentes.