TD I. Dynamique du point

Exercice I.1. Unités ★

1. Une force s'exprime en newton de symbole N. **Exprimer** cette unité avec les unités de base du système international (m, s, kg).
   D'après le PFD
   $$m\overrightarrow{a} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$$
   avec m la masse en kg et a la valeur de l'accélération du sysème étudié en m.s^{-2}. On voit donc que les forces sont homogènes à des masses accélérées, ainsi **on peut exprimer le newton en kg.m.s^{-2}.**
2. À partir de l'expression d'une force bien connue, **exprimer** l'unité du champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ avec les unités de base du du système international. **Justifier** qu'on appelle aussi cette grandeur l'accélération de pesanteur.
   On se rappelle que l'expression du poids est $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ avec g la valeur du champ de pesanteur. En menant une analyse dimensionnelle
   $$[P] = \text{kg.m.s}^{-2}$$
   $$[P] = [mg] = \text{kg.}\,[g]$$
   donc
   $$\text{kg.}\,[g] = \text{kg.m.s}^{-2}$$
   $$\boxed{[g] = \frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{kg}} = \text{m.s}^{-2}.}$$
   Le champ de pesanteur est homogène à une accélération, c'est pour cela que appelle aussi cette grandeur l'accélération de pesanteur.
3. À partir de l'expression de force de frottements fluides, **exprimer** l'unité du coefficient de frottements visqueux k_1 avec les unités de base du du système international.
   La force de frottement fluide est
   $$\overrightarrow{f} = -k_1\overrightarrow{v}$$
   avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du système.
   En menant une analyse dimensionnelle
   $$[f] = \text{kg.m.s}^{-2}$$
   $$[f] = [k_1 v] = \text{m.s}^{-1}\,[k_1]$$
   donc
   $$\text{m.s}^{-1}\,[k_1] = \text{kg.m.s}^{-2}$$
   $$\boxed{[k_1] = \frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m.s}^{-1}} = \text{kg.s}^{-1}.}$$
4. À partir de l'expression de la force de rappel d'un ressort, **exprimer** l'unité de la constante de raideur d'un ressort k avec les unités de base du du système international.
   La force de rappel d'un ressort est
   $$\overrightarrow{T_r} = -k\,(x - l_0)\,\overrightarrow{u_x}$$
   avec x la position du système et l_0 la longueur à vide du ressort.
   En menant une analyse dimensionnelle
   $$[T_r] = \text{kg.m.s}^{-2}$$

$$[T_r] = [k\,(x - l_0)] = \mathrm{m}.\,[k]$$

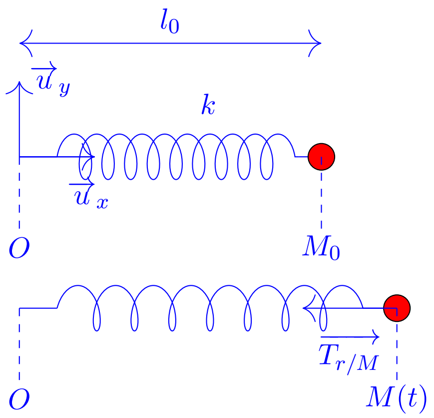
donc

$$\mathrm{m}.\,[k] = \mathrm{kg.m.s}^{-2}$$

$$\boxed{[k] = \frac{\mathrm{kg.m.s}^{-2}}{\mathrm{m}} = \mathrm{kg.s}^{-2}.}$$

Exercice I.2. Force de rappel élastique ★

1. **Représenter** un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 dont une des extrémités est accrochée à un support fixe situé à l'origine d'un repère, et dont l'autre extrémité est accrochée à point matériel M de masse m.
   Donner l'expression générale de la force de rappel exercée par le ressort sur M.



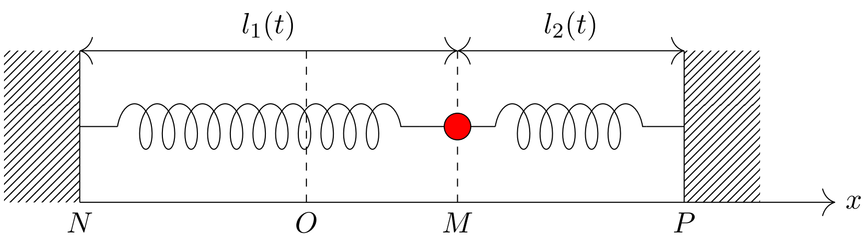
   D'après la loi de Hook, il vient que

$$\overrightarrow{T_{r/M}} = k\left(\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_0}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{T_{r/M}} = -k\,(x - l_0)\,\overrightarrow{u}_x}$$

   avec $OM_0 = l_0$ la longueur à vide du ressort.

2. **Exprimer** les forces $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ s'exerçant sur M dues à deux ressorts schématisés ci-dessous.
   On considère que l'origine est à égale distante des supports, de telle manière que $NO = OP = l_0$.
   Exprimer leur résultante $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2$ en fonction de l'abscisse x du point M. Les ressorts sont identiques, de même constante de raideur k et de même longueur à vide l_0. O est l'origine du repère fixe.



D'après l'expression obtenue précédemment il vient que

$$\overrightarrow{F_1} = -k\left(\overrightarrow{NM} - \overrightarrow{NM_0}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_1} = -k\left(l_1(t) - l_0\right)\overrightarrow{u_x}}$$

et

$$\overrightarrow{F_2} = -k\left(\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PM_0}\right)$$

$$\overrightarrow{F_2} = -k\left(-l_2(t)\overrightarrow{u_x} + l_0\overrightarrow{u_x}\right)$$

$$\boxed{\overrightarrow{F_1} = k\left(l_2(t) - l_0\right)\overrightarrow{u_x}.}$$

La résultante de ces deux forces est donc

$$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$

$$\overrightarrow{F} = \left(-k\left(l_1(t) - l_0\right) + k\left(l_2(t) - l_0\right)\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{F} = -k\left(l_1(t) - l_2(t)\right)\overrightarrow{u_x}.$$

Comme les ressorts sont identiques il vient qu'à tout instant $l_1(t) + l_2(t) = 2l_0$ donc $l_1(t) = 2l_0 - l_2(t)$ donc

$$\overrightarrow{F} = -k\left(2l_0 - l_2(t) - l_2(t)\right)\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{F} = -2k\left(l_0 - l_2(t)\right)\overrightarrow{u_x}.$$

La variation de longueur du ressort 2 peut s'exprimer telle que $l_2(t) = l_0 - x$ avec x la position du point M par rapport à l'origine O, ainsi

$$\overrightarrow{F} = -2k\left(l_0 - l_0 + x\right)\overrightarrow{u_x}.$$

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -2kx\overrightarrow{u_x}.}$$

Exercice I.3. Bond sur la Lune ★ ★

Dans l'album de Tintin, "On a marché sur le Lune", le Capitaine Haddock est étonné de pouvoir faire un bond beaucoup plus grand que sur terre. On assimile le mouvement du Capitaine Haddock à celui de son centre de gravité M de masse m. Il saute depuis le sol lunaire avec une vitesse initiale v_0 faisant un angle $\alpha = 30°$ avec le sol. On note g_l la valeur de l'accélération de pesanteur à la surface de la lune. En l'absence d'atmosphère, on peut considérer qu'il n'y a aucune force de frottement.

1. **Définir** le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.
   Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.
   Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.
   Faire le bilan des forces et appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD).
   Le système est le centre de gravité du Capitaine Haddock considéré comme un point matériel. On choisit le référentiel lié à la Lune considéré comme galiléen.
   La seule force qui s'applique sur le système est son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}_l$ avec $\overrightarrow{g}_l$ l'accélération de pesanteur de la Lune.

Le repère le plus adapté est le repère cartésien. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

On considère que le vecteur accélération de pesanteur de la Lune est orienté selon l'axe (Oz) dans le sens des $z < 0$, soit $\overrightarrow{g}_l = -g_l\overrightarrow{u_z}$, ainsi si on applique le PFD il vient que

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg_l \end{cases}.$$

2. En utilisant les questions précédentes, **établir** les équations du mouvement.
Pour obtenir l'équation du mouvement, on intègre les relations précédentes, soit

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g_l \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_{0,x} \\ \dot{y} = v_{0,y} \\ \dot{z} = -g_l t + v_{0,z} \end{cases}.$$

Or on sait que le système a une vitesse initiale $\overrightarrow{v}(t=0) = v_0 \cos\alpha \overrightarrow{u}_x + v_0 \sin\alpha \overrightarrow{u}_y$, ainsi

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g_l t + v_0 \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha + x_0 \\ y = y_0 \\ z = -\frac{1}{2} g_l t^2 + v_0 t \sin\alpha + z_0 \end{cases}.$$

On considère que la position initiale du système est $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = 0)$ soit

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = y_0 \\ z = -\frac{1}{2} g_l t^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}.$$

On peut alors exprimer les instants t en fonction de la position sur l'axe (Ox), soit

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}.$$

En introduisant cette expression de t dans celle de la position selon l'axe (Oz) on obtient l'équation de la trajectoire du système

$$z = -\frac{1}{2} g_l \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2} g_l \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha.}$$

3. **Déterminer** l'expression de la distance horizontale parcourue au cours du saut en fonction de v_0, α et g_l.
Le système retombe sur le sol après un bond lorsque $z = 0$, il vient alors que

$$0 = -\frac{1}{2} g_l \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha$$

$$\frac{1}{2} g_l \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} = x \tan\alpha$$

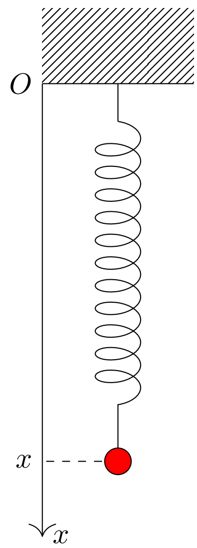
$$x = 2\frac{v_0^2}{g_l}\tan\alpha\cos^2\alpha = 2\frac{v_0^2}{g_l}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cos^2\alpha = 2\frac{v_0^2}{g_l}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\boxed{x = \frac{v_0^2}{g_l}\sin 2\alpha.}$$

4. Sur la Lune, la pesanteur est environ six fois moins forte que sur la Terre. **Déterminer** la distance horizontale parcourue par le sauteur sur la Lune, si elle est de $d = 1,50$ m sur la Terre.
   La distance parcourue sur la Terre est notée d_T telle que
   $$d_T = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha$$
   et la distance parcourue sur la Lune est notée d_L telle que
   $$d_L = \frac{v_0^2}{g_l}\sin 2\alpha.$$
   Le rapport entre les deux distances est
   $$\frac{d_L}{d_T} = \frac{v_0^2}{g_l}\sin 2\alpha\frac{g}{v_0^2\sin 2\alpha} = \frac{g}{g_L}.$$
   Un bond sur la Lune est donc 6 fois plus long que sur la Terre.
   A.N.
   $$\boxed{d_L = d_T \times \frac{g}{g_L} = 1,50 \text{ m} \times 6 = 9 \text{ m}.}$$

Exercice I.4. Oscillation d'une masse suspendue à un ressort ★ ★

On s'intéresse au mouvement d'un petit objet de masse m attaché à un ressort dont l'autre extrémité est accrochée à un bâti fixé au sol. Le ressort étant initialement dans sa situation de repos pour laquelle sa longueur est égale à sa longueur à vide, on lâche l'objet sans lui donner de vitesse initiale. Le mouvement qui suit est vertical et on veut l'étudier. On idéalise le comportement du ressort en l'assimilant à un ressort parfaitement élastique, sans masse, de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de l'objet sur un axe (Ox) vertical descendant par son abscisse x. L'origine O du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.



1. **Définir** le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.
   Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.
   Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.
   Faire le bilan des forces et appliquer le PFD.
   Le système est le petit objet de masse m considéré comme ponctuel. On l'étudie dans le référentiel terrestre.
   Les forces exercées sur lui son son poids $\overrightarrow{P}$ et la force de rappel du ressort $\overrightarrow{T_r}$.
   On utilise le repère cartésien dont l'axe (Ox) est vertical orienté vers le bas.
   Si on applique le PFD il vient que
   $$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T_r}.$$

2. **Montrer** que l'équation du mouvement s'écrit :
   $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$
   où ω_0 et x_{eq} sont des constantes à déterminer en fonction de l_0, g, m et k.
   Le mouvement s'effectue seulement selon l'axe (Ox) il vient que
   $$m\ddot{x}\overrightarrow{u_x} = mg\overrightarrow{u_x} + \overrightarrow{T_r}.$$
   Afin d'obtenir l'expression de $\overrightarrow{T_r}$ on utilise la loi de Hooke généralisée
   $$\overrightarrow{T_r} = k\left(\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{M_0O}\right)$$
   $$\overrightarrow{T_r} = -k\left(\overrightarrow{OM_0} - \overrightarrow{OM_0}\right)$$
   $$\overrightarrow{T_r} = -k\left(x\overrightarrow{u_x} - l_0\overrightarrow{u_x}\right)$$
   il vient que
   $$m\ddot{x} = mg - k(x - l_0)$$
   $$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{k}{m}l_0.$$
   On identifie une équation différentielle du deuxième ordre caractéristique d'un oscillateur harmonique mais avec un second membre non nul. On peut également identifier la pulsation propre du système ω_0 introduite dans l'énoncé
   $$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
   ainsi
   $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = g + \omega_0^2 l_0$$
   $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left(l_0 + \frac{1}{\omega_0^2}g\right)$$
   $$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left(l_0 + \frac{m}{k}g\right).$$
   On peut alors identifier la constante $x_{eq} = l_0 + \frac{m}{k}g$.

3. **Déterminer** ce que représente la position M_{eq} d'abscisse $x = x_{eq}$.
La position M_{eq} est la position pour laquelle $x = x_{eq}$ or, on remarque que $x(t)$ est égale à x_{eq} lorsque l'accélération est nulle
$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$
$$\omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}.$$
Donc, lorsque $x = x_{eq}$, la somme des forces qui s'applique sur le système est nulle, le système est à l'équilibre : la position M_{eq} est la position d'équilibre autour de laquelle va osciller le système.
4. Pour résoudre l'équation du mouvement, on déplace l'origine du repère en M_{eq}. **Montrer** que cela revient à faire le changement d'inconnue $X = x - x_{eq}$.
En effectuant le changement d'inconnue $X = x - x_{eq}$ il vient que
$$x = X + x_{eq}$$
soit
$$\left(\ddot{X} + \ddot{x_{eq}}\right) + \omega_0^2 \left(X + x_{eq}\right) = \omega_0^2 x_{eq}$$
comme x_{eq} est une constante il vient que
$$\ddot{X} + \omega_0^2 X + \omega_0^2 x_{eq} = \omega_0^2 x_{eq}$$
$$\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0.$$
5. **En déduire** que l'on obtient alors une équation différentielle du mouvement connue.
On remarque que l'équation précédente est l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique dont on connaît la solution générale qui est
$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
avec A et B des constantes que l'on peut déterminer à partir des conditions initiales. En effectuant le changement d'inconouе $x = X + x_{eq}$ il vient que
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_{eq}.$$
6. **Résoudre** en tenant compte des conditions initiales.
À $t = 0$ le ressort est dans état de repos soit $x(t = 0) = l_0$ donc
$$l_0 = A + x_{eq}$$
$$A = l_0 - x_{eq}.$$
À $t = 0$ la vitesse du ressort est nulle donc
$$\dot{x}(t) = -\omega_0 \left(l_0 - x_{eq}\right)\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$$
$$0 = \omega_0 B$$
$$B = 0.$$
Ainsi l'équation du mouvement de l'objet est
$$x(t) = \left(l_0 - x_{eq}\right)\cos(\omega_0 t) + x_{eq}$$

$$x(t) = \left(l_0 - l_0 - m\frac{k}{g}\right)\cos(\omega_0 t) + x_{eq}$$

$$x(t) = x_{eq} - m\frac{k}{g}\cos(\omega_0 t)$$

$$x(t) = x_{eq} + m\frac{k}{g}\cos(\omega_0 t + \pi)$$

7. **Représenter** l'évolution temporelle de l'abscisse x.
L'évolution temporelle de l'abscisse de l'objet correspond à une fonction cosinus de pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ de phase à l'origine π oscillant autour de la valeur $x_{eq} = l_0 + \frac{m}{k}g$ avec une amplitude $\frac{m}{k}g$. Le maximum de la fonction est donc $l_0 + 2\frac{m}{k}g$ et son minimum est l_0.

Exercice I.5. Chaussette dans un sèche-linge ★ ★

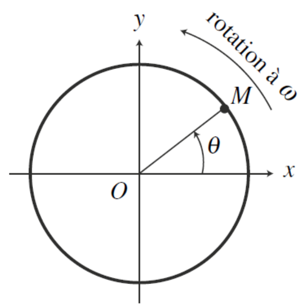
Dans le tambour d'un sèche-linge, on observe que le mouvement d'une chaussette s'effectue en une alternance de deux phases.

Dans une première phase, elle est entraînée par le tambour dans un mouvement de rotation uniforme.

Dans une deuxième phase, elle retombe en chute libre.

L'observation montre qu'à chaque tour, elle décolle du tambour au même endroit. On cherche à déterminer ce lieu.

On modélise le tambour par un cylindre de rayon $R = 25$ cm tournant à 50 tour.min^{-1}. On s'intéresse au mouvement de la chaussette que l'on assimile à un point matériel M de masse m. On étudie la première phase pendant laquelle le linge est entraîné dans un mouvement de rotation circulaire et uniforme à la même vitesse que le tambour et en restant collé aux parois du tambour. Pour les applications numériques, on considère $g = 9{,}8$ m.s^{-2}.



1. **Définir** le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.
Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.
Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.
Faire le bilan des forces et appliquer le PFD.
On étudie le mouvement de la chaussette assimilée à un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre galiléen.
La chaussette est soumise à son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$ et à la réaction du tambour $\overrightarrow{R}$.
Le repère adapté est le repère polaire. Dans ce repère

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

Le PFD donne
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}.$$

2. **Déterminer** l'accélération de la chaussette.
Lors de la première phase, M est en mouvement circulaire et uniforme de centre O et de rayon R à la vitesse angulaire ω. Sa vitesse est tangente au cercle et de norme $v = R\omega$ et son accélération est radiale centripète de norme $\frac{v^2}{R}$ d'où :
$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_\rho} = -R\omega^2\vec{u_\rho}.$$

3. **En déduire** la réaction du tambour sur la chaussette.
La chaussette étant collée à la paroi du tambour, elle est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction du tambour $\vec{R}$. On lui applique le principe fondamental de la dynamique :
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$$
$$\vec{R} = m\vec{a} - \vec{P} = \begin{cases} -mR\omega^2 + mg\sin\theta \\ mg\cos\theta \end{cases}$$

4. **Montrer** que la réaction normale s'annule lorsque la chaussette atteint un point dont on déterminera la position angulaire.
La composante radiale de la réaction du support s'annule lorsque $mR\omega^2 = mg\sin\theta$ soit pour $\theta = \theta_0$ tel que
$$\sin\theta_0 = \frac{R}{g}\omega^2.$$

5. **Déterminer** ce qu'il se passe en ce point. **Décrire** le mouvement ultérieur.
L'annulation de la force de contact entre le tambour et la chaussette montre qu'il y a rupture de contact. La chaussette décolle de la paroi et est alors projetée avec une vitesse $R\omega$ tangente au tambour depuis le point repéré par la coordonnée angulaire θ_0. Le mouvement ultérieur, sous la seule action du poids, est un vol parabolique.

Exercice I.6. Tirs de basket-ball ★ ★ ★

On étudie les tirs de basket-ball de manière simplifiée. On suppose que le joueur est face au panneau à une distance D de ce dernier. Le cercle du panier est situé à une hauteur H =3,05 m au-dessus du sol et on assimilera dans un premier temps le cercle à un point situé sur le panneau. De même, le ballon sera considéré comme ponctuel. On néglige les frottements fluides de l'air. Le joueur tire d'une hauteur $h =$ 2,00 m au-dessus du sol en imposant une vitesse initiale $\vec{v_0}$ faisant un angle α avec l'horizontale.

1. **Définir** le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.
Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.
Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.
Faire le bilan des forces et appliquer le PFD.
Le système est le ballon de basket que l'on étudie dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
La seule force qui s'applique sur le système est son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ avec $\vec{g}$ l'accélération de pesanteur terrestre.

Le repère le plus adapté est le repère cartésien. Les vecteurs position, vitesse et accélération sont

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

On considère que le vecteur accélération de pesanteur est orienté selon l'axe (Oz) dans le sens des $z < 0$, soit $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_z}$, ainsi si on applique le PFD il vient que

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}.$$

2. **Établir** l'équation du mouvement du ballon lors du tir.
   Pour obtenir l'équation du mouvement, on intègre les relations précédentes, soit

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = v_{0,x} \\ \dot{y} = v_{0,y} \\ \dot{z} = -gt + v_{0,z} \end{cases}.$$

   Or on sait que le système a une vitesse initiale $\overrightarrow{v}(t=0) = v_0 \cos\alpha \overrightarrow{u}_x + v_0 \sin\alpha \overrightarrow{u}_y$, ainsi

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha + x_0 \\ y = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + z_0 \end{cases}.$$

   On considère que la position initiale du système est $(x_0 = 0, y_0 = 0, z_0 = h)$ soit

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos\alpha \\ y = y_0 \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + h \end{cases}.$$

3. **En déduire** les équations horaires de ce mouvement.
   Voir question précédente.
4. **Déterminer** l'équation de la trajectoire du ballon.
   On peut exprimer les instants t en fonction de la position sur l'axe (Ox), soit

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}.$$

   En introduisant cette expression de t dans celle de la position selon l'axe (Oz) on obtient l'équation de la trajectoire du système

$$z = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \sin\alpha + h$$

$$\boxed{z = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x\tan\alpha + h.}$$

5. On suppose que le module de la vitesse initiale est fixé. **Donner** l'équation à vérifier par l'angle α pour que le panier soit marqué. On la mettra sous la forme d'une équation du second degré en $\tan\alpha$.

Le ballon est marqué donc il atteint une position de coordonnées $x = D$ et $z = H$. L'équation du mouvement devient alors

$$H = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + D\tan\alpha + h$$

$$H = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha} + D\tan\alpha + h = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} + D\tan\alpha + h$$

$$H = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\left(\tan^2\alpha + 1\right) + D\tan\alpha + h = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\tan^2\alpha + D\tan\alpha + \left(h - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\right).$$

$$\boxed{0 = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\tan^2\alpha + D\tan\alpha + \left(h - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} - H\right).}$$

6. **Montrer** que cette équation n'admet des solutions que si le module v_0 de la vitesse initiale vérifie une inéquation du second degré en v_0^2.
   On pose $X = \tan\alpha$, l'équation devient

$$0 = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}X^2 + DX + \left(h - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} - H\right)$$

   cette équation admet des solutions réelles si le discriminant est positif, soit

$$\Delta = D^2 + 4 \times \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2}\left(h - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} - H\right) \geq 0$$

$$\Delta = D^2 + 2g\frac{D^2}{v_0^2}\left(h - \frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} - H\right) \geq 0$$

   soit

$$D^2 + 2gh\frac{D^2}{v_0^2} - 2g\frac{D^2}{v_0^2}\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2} - 2g\frac{D^2}{v_0^2}H \geq 0$$

$$D^2 + 2gh\frac{D^2}{v_0^2} - g^2\frac{D^4}{v_0^4} - 2g\frac{D^2}{v_0^2}H \geq 0$$

$$1 + \frac{2gh}{v_0^2} - g^2\frac{D^2}{v_0^4} - \frac{2g}{v_0^2}H \geq 0$$

$$v_0^4 + 2ghv_0^2 - g^2D^2 - 2gv_0^2H \geq 0$$

$$\boxed{v_0^4 - 2gv_0^2(H - h) - g^2D^2 \geq 0.}$$

7. **En déduire** l'existence d'une valeur minimale de v_0 pour que le panier soit marqué.
   On pose $Y = v_0^2$, l'équation devient

$$Y^2 - 2g(H - h)Y - g^2D^2 \geq 0.$$

   Le discriminant de cette équation du second ordre est

$$\Delta_2 = 4g^2(H - h)^2 + 4g^2D^2$$

on constate ce discriminant est toujours positif ($H > h$). Les racines de cette équation sont

$$Y = \frac{2g\left(H-h\right) \pm 2g\sqrt{\left(H-h\right)^2 + D^2}}{2}$$

$$Y = g\left(H-h\right) \pm g\sqrt{\left(H-h\right)^2 + D^2}.$$

La première racine est positive et la seconde est négative.
Cette équation décrit une parabole dont les valeurs sont négatives lorsque Y est compris entre les deux racines, et positives à l'extérieur.
On cherche les valeurs de Y pour que l'équation soit supérieur à 0 et des valeurs de $Y > 0$ car $Y = v_0^2$, il faut donc que

$$Y \geq g\left(H-h\right) + g\sqrt{\left(H-h\right)^2 + D^2}$$

et la valeur minimale de v_0 est donc

$$\boxed{v_{min} = \sqrt{g\left(H-h+\sqrt{\left(H-h\right)^2 + D^2}\right)}.}$$

8. **Faire l'application numérique** pour un lancer franc (la distance D vaut alors 4,60 m) puis pour un panier à trois points (la distance D vaut alors 6,25 m selon les règles de la Fédération Internationale de Basket-Ball).
A.N. pour un lancer franc

$$v_{min} = \sqrt{9,8 \times \left(3,05 - 2,00 + \sqrt{\left(3,05-2,00\right)^2 + (4,6)^2}\right)} = 7,5 \text{ m.s}^{-1}.$$

A.N. pour un panier à trois points

$$v_{min} = \sqrt{9,8 \times \left(3,05 - 2,00 + \sqrt{\left(3,05-2,00\right)^2 + (6,25)^2}\right)} = 8,5 \text{ m.s}^{-1}.$$

9. Si la condition précédente est vérifiée, **donner** l'expression de $\tan\alpha$ et en déduire qu'il existe deux angles possibles pour marquer le panier.
Si la vitesse est supérieure à la vitesse minimale, la première équation du second ordre admet deux solutions réelles qui sont

$$\tan\alpha = X = \frac{-D \pm \frac{D}{v_0}\sqrt{1 - 2g(H-h) - g^2\frac{D^2}{v_0^2}}}{-g\frac{D^2}{v_0^2}}$$

$$\boxed{\tan\alpha = \frac{v_0^2 \mp \sqrt{v_0^4 - 2g(H-h)v_0^2 - g^2D^2}}{gD}.}$$

Il y a donc bien deux valeurs possibles pour l'angle α.

10. **Donner** les valeurs numériques des angles α permettant de marquer un lancer franc en supposant que v_0 = 10,0 m.s^{-1}.
A.N.

$$\alpha_+ = \arctan\left(\frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - 2g(H-h)v_0^2 - g^2D^2}}{gD}\right)$$

$$\alpha_+ = \arctan\left(\frac{10,0^4 - \times\sqrt{10,0^4 - 2\times 9,8\times(3,05-2,00)\times 10,0^2 - 9,8^2\times 4,6^2}}{9,8\times 4,6}\right) = 27°$$

$$\alpha_- = \arctan\left(\frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - 2g(H-h)v_0^2 - g^2D^2}}{gD}\right)$$

$$\alpha_- = \arctan\left(\frac{10,0^4 + \times\sqrt{10,0^4 - 2\times 9,8\times(3,05-2,00)\times 10,0^2 - 9,81^2\times 4,6^2}}{9,8\times 4,6}\right) = 76°.$$

11. Dans la suite, on suppose que l'angle de tir est fixé. **Déterminer** l'expression de la vitesse initiale v_0 à imposer pour marquer le panier.
En reprenant l'équation de la question 5 il vient que

$$H = -\frac{1}{2}g\frac{D^2}{v_0^2\cos^2\alpha} + D\tan\alpha + h$$

$$2\cos^2\alpha\,(H - h - D\tan\alpha) = -g\frac{D^2}{v_0^2}$$

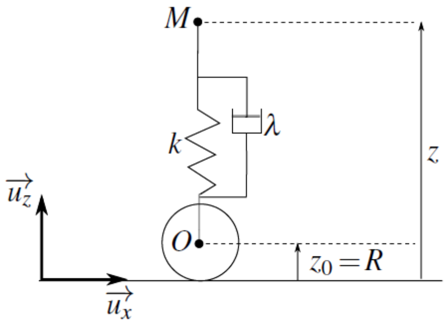
$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{gD^2}{2\cos^2\alpha\,(h - H + D\tan\alpha)}}.}$$

12. **Faire l'application numérique** pour un lancer franc et un angle de tir $\alpha = 70°$.

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{9,8\times 4,60^2}{2\cos^2 70°\times(2,00-3,05+4,60\times\tan 70°)}} = 8,7\ \text{m.s}^{-1}.}$$

Exercice I.7. Modélisation d'un amortisseur ★ ★ ★

On considère l'amortisseur d'un véhicule. Chaque roue supporte un quart de la masse de la voiture assimilé à un point M de masse m = 500 kg, et est reliée à un amortisseur dont le ressort a une constante de raideur $k = 2,5.10^4$ N.m^{-1}. Le point M subit aussi un frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\lambda\overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est la vitesse verticale de M et $\lambda = 5,0.10^3$ kg.s^{-1}.



Le véhicule franchit à vitesse constante un défaut de la chaussée de hauteur $h = 5,0$ cm. Son inertie est suffisante pour qu'il ne se soulève pas immédiatement mais acquiert une vitesse verticale $v_0 = 0,50$ m.s^{-1}. On pose $\alpha = \lambda/2m$. On note Z_i la cote du point M avant le passage du défaut.

1. **Définir** le système et le référentiel dans lequel on étudie son mouvement.
   Établir un bilan des forces détaillé et réaliser un schéma à un instant quelconque en y faisant figurer les différentes forces.
   Définir le repère adapté à l'étude de ce mouvement et rappeler l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération dans ce type de repérage.
   Faire le bilan des forces et appliquer le PFD.
2. On note $Z(t)$ la cote de M. **Établir** l'équation différentielle pour Z après le passage de l'obstacle. Déterminer $Z(t)$ en fonction des données. On remarquera que $\alpha = \Omega$ ou Ω est la pseudo-pulsation.
3. Les passagers sont sensibles à l'accélération verticale de la voiture, **calculer** sa valeur maximale. On utilisera le fait que $\alpha = \Omega$.
4. Il faut en fait éviter des oscillations susceptibles de provoquer chez les passagers la mal des transports, en se plaçant dans les conditions critiques. **Déterminer** pour quelle masse par roue ces conditions sont atteintes, k et λ étant inchangés.