Chapitre 10 : Calcul matriciel

Table des matières

1 Introduction

Les matrices sont des objets mathématiques se représentant à l'aide de tableaux finis de nombres et possèdent des propriétés algébriques que nous allons étudier tout au long de ce chapitre. Elles permettent de représenter des objets et de modéliser des situations issus de divers domaines.
Pour n'en citer que quelques uns :

— la géométrie, en effet les matrices représentent une famille de fonctions dite *applications linéaires* dont les espaces d'arrivé et de départ sont des vecteurs de longueur donnée.
— calculer le terme général de suites récurrentes (cf TD).
— manipuler plus synthétiquement des systèmes linéaires.
— modéliser des situation en théorie des probabilités comme les *chaînes de Markov.*

2 Ensembles de matrices

Notation : Dans ce chapitre on notera $\mathbb{K}$ l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition

Une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$ de taille (ou de **dimension**) $n \times p$ où $n, p \in \mathbb{N}^\star$ est un ensemble de nombres $(a_{i,j}) \in \mathbb{K}$ appelés **coefficients** de la matrice où $i \in L = [\![1, n]\!]$ qui représente l'indice d'une ligne et $j \in C = [\![1, p]\!]$ qui représente l'indice d'une colonne. Formellement, une matrice M à n lignes et p colonnes peut s'écrire $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p}$ et se représente comme suit

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots a_{n,p} \end{pmatrix}$$

Définition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$, on note :

- $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à n lignes et p colonnes.
- $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices dite **carrées** correspondant à l'ensemble $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$
- $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **lignes** et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices **colonnes**.

3 Opérations matricielles

Vous avez déjà rencontré au lycée les opération d'addition et de multiplication par un scalaire (un réel) sur les vecteurs.

On peut multiplier un vecteur par un nombre réel quelconque. Par exemple, $2.\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 \\ 2.3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Ce type d'opération s'applique également à l'ensemble des matrices.

Définition: Multiplication par un scalaire

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$, $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le résultat de la multiplication de la matrice A par le scalaire λ est la matrice notée $\lambda.A$ dont les coefficients notés $(c_{i,j})$ valent :

$$\forall i \in [\![1, n]\!], j \in [\![1, p]\!], \quad c_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$$

Exemple

Pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $\lambda = 2$ on a $\lambda.A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

Définition : Addition

Soient $n, p \in \mathbb{N}^\star$ et $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La somme de A et B, noté $A+B$ est la matrice appartenant à $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ de coefficients $(c_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ où pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]$, $c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$.

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A + B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Risque d'erreur

Il est fondamental de s'assurer que les matrices qu'on additionnent soient de même taille. Par exemple, le calcul suivant n'a pas de sens : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

En général on a la propriété suivante qui généralise les calculs de l'exemple précédent.

Proposition : Commutativité et associativité de l'addition

Soient $A, B, C \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. L'opération " $+$ " est commutative et associative, c'est-à-dire :
- $A + B = B + A$.
- $A + (B + C) = (A + B) + C$.

Démonstration : admise.

La proposition suivante répertorie les principales opérations que l'on a le droit de faire en multipliant une matrice par un scalaire.

Proposition

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Alors :

1. $(\lambda + \mu).A = \lambda.A + \mu.A$
2. $(\lambda \times \mu).A = \lambda.(\mu.A)$
3. $\lambda.(A + B) = \lambda.A + \lambda.B$.

Démonstration : admise.

Définition: Combinaison linéaire de matrices

Soient $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **combinaison linéaire des matrices** A **et** B une matrice M de la forme :

$$M = \lambda.A + \mu.B \qquad \text{où} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$$

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. La matrice suivante est une combinaison linéaire de A et B dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$:

$$M = 1.A + i.B = \begin{pmatrix} 1-i & 1+2i \\ -2i & -1 \end{pmatrix}$$

3.1 Matrices élémentaires

Notation : Pour $n, m \in \mathbb{N}$ et i, j deux entiers compris entre 0 et n, on pose la matrice $E_{i,j} = (e_{k,l}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ définie comme suit. Pour tout k, l entier tel que $0 \leq k \leq n$ et $0 \leq l \leq m$ on a :

$$e_{k,l} = \begin{cases} 1 \text{ si } k = i \text{ et } l = j \\ \hfill 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Exemple

Dans $\mathbb{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, on a :

$$E_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad E_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ces matrices possèdent la propriété intéressante suivante que nous reverrons au chapitre consacré aux espaces vectoriels :

Proposition

Toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaires des matrices de la forme $E_{i,j}$.

Définition: Symbole de Kronecker

Soit $i, j \in \mathbb{N}$, on appelle *symbole de Kronecker d'indice (i,j)* noté $\delta_{i,j}$ qui vaut :

$$\delta_{i,j} = 1 \text{ si i=j} \quad 0 \text{ si } i \neq j$$

3.2 Produit de matrices

Donnons un premier aperçu du produit matriciel AX dans le cas d'une matrice quelconque $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et d'une matrice colonne $X \in \mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.

Si on écrit $A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_p \end{pmatrix}$ où pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ A_i désigne les colonnes de A et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.

Alors la matrice produit AX est la combinaison linéaire :

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k . A_k$$

Au delà du produit d'une matrice par un réel, il est possible de multiplier les matrices dont les lignes et les colonnes sont compatibles de la manière suivante :

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} (0 \times 1 + (-1) \times 2) & (0 \times 2 + 0 \times 0) \\ (-1 \times 1 + 2 \times 2) & ((-1) \times 2 + 2 \times 0) \end{pmatrix} \end{array}$$

Ainsi le produit AB vaut $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$

Définition

Soient $A = (a_{i,l})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq l \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B = (b_{l,j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors le produit de la matrice A par la matrice B, qui se note $AB \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{R})$ dont on note les coefficients $(c_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq q}$ sont donnés par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \qquad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Remarque 1 *Moins formellement, pour obtenir la j-ième colonne du produit AB, il suffit de multiplier la matrice A par la j-ième colonne de B. Pour obtenir la i-ième ligne de AB, il suffit de calculer le produit de la i-ième ligne de A par la matrice B.*

Exercice 1 *Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Calculer les produits en précisant à chaque fois leur dimension : AX, AY et AB.*

Risque d'erreur

1. Il faut bien prêter attention aux dimensions des matrices dont on souhaite calculer le produit. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ le produit AB n'est pas défini.
2. Ce n'est pas parce que le produit AB est défini que c'est le cas pour BA.

Le produit matriciel possède la propriété d'être associatif comme la multiplication des réels mais pas la commutativité.

Proposition

Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B = \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lambda.AB = A(\lambda.B)$.

Démonstration : admise.

Théorème : Associativité et bilinéarité du produit matriciel

Soit $A, \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C =\in \mathcal{M}_{q,m}(\mathbb{K})$. Alors :

1. $A.(BC) = (AB).C$ (**Associativité**).
2. Si les tailles de A, B et C sont identiques, on a pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la **bilinéarité** du produit matriciel :
   (a) $(\lambda.A + \mu.B) \times C = \lambda.AC + \mu.BC$
   (b) $A \times (\lambda.B + \mu.C) = \lambda.AB + \mu.AC$

Démonstration : admise.

Théorème: Produit de deux matrices élémentaires

Soit $E_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E_{k,l} \in \mathcal{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ deux matrices élémentaires. Alors le produit $E_{i,j}E_{k,l}$ est la matrice $\delta_{j,k}E_{i,l}$.

Démonstration : : sur feuille.

3.3 Transposition

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la **transposée** de M est une matrice appartenant à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ notée ${}^tM = (b_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq, j\leq p}$ et tels que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $j \in [\![1, p]\!]$, $b_{i,j} = a_{j,i}$.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ a pour transposée la matrice ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

Méthode : Calculer la transposée d'une matrice

Étant donné une matrice $M = (a_{i,j})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}$. Pour calculer ${}^tM$, on peut raisonner de la manière suivante :

1. on écrit $M = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$ à l'aide de ses matrices lignes L_i.
2. pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose C_i la matrice colonne $C_i =^t L_i$.
3. La matrice ${}^tM \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ se décrit à l'aide des colonnes C_i décrites à l'étape précédente.

Exercice 2 *Calculer la transposée de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

Proposition

Soiet $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors :

1. pour $\lambda \in \mathbb{K}$, ${}^t(\lambda.A) = \lambda.({}^tA)$.
2. ${}^t(A+B) =^t A +^t B$.
3. ${}^t(AB) =^t B^tA$.

3.4 Matrices triangulaires et diagonales

Définition : Matrices triangulaires

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une matrice :

— **triangulaire supérieure** si pour tout $i < j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$.

— **triangulaire inférieure** si pour tout $i > j \in [\![1, n]\!]$, $a_{i,j} = 0$.

Si M est triangulaire supérieure ou inférieure on dit qu'elle est **triangulaire**.

Calculer les puissances d'une matrice est long en général puisque chaque coefficient d'un produit de matrice se calcule à l'aide d'une somme. Néanmoins il existe une famille de matrices dont le calcul des puissances est très simple. Il s'agit des matrices diagonales.

Théorème : Puissances d'une matrice diagonale.

Soit $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, une matrice diagonale. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = (dk_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont $dk_{i,i} = (d_{i,i})^k$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

Exemple

Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

3.5 Matrices d'opérations élémentaires

L'ensemble des matrices définies dans cette sous-section sont carrées et par défaut appartiennent à l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition: Matrices de transvection
Soit $a \in \mathbb{K}$, $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq m$. Une **matrice de transvection** notée $T_{i,j}(a) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ est une matrice de la forme
$$T_{i,j}(a) = I_n + a.E_{i,j}$$

Définition: Matrices de transposition
Pour $1 \leq i, j \leq n$, on appelle **matrice de transpostion d'indice i et j**, notée $T_{i,j}$, la matrice obtenue en échangeant les colonnes C_i et C_j de la matrice identité I_n.

Définition: Matrices de dilatation
Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $1 \leq i \leq n$. On appelle **matrice de dilatation de niveau i et de coefficient** λ la matrice notée $D_i(\lambda)$ définie par :
$$D_i(\lambda) = I_n + (\lambda - 1).E_{i,i}$$

Exemple
Dans $M_3(\mathbb{R})$ on a $D_2(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Les matrices élémentaires agissent par multiplication à gauche sur les matrices associées à un système linéaire comme les opérations élémentaires.

Théorème: Action des matrices élémentaires
Soit $M \in \mathbb{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ la matrice associée au système linéaire $\mathcal{S}$. On a :

1. $T_{i,j}(a)M$ est la matrice associée au système $\mathcal{S}'$ obtenu en appliquant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + a.L_j$ à $\mathcal{S}$.
2. $T_{i,j}M$ est la matrice associée au système $\mathcal{S}'$ obtenu en appliquant l'opération élémentaire $L_j \leftrightarrow L_i$ à $\mathcal{S}$.
3. $D_i(\lambda)M$ est la matrice associée au système $\mathcal{S}'$ obtenu en appliquant l'opération élémentaire $L_j \leftarrow \lambda.L_j$ à $\mathcal{S}$.

Démonstration : admise.

4 Systèmes linéaires et matrices

4.1 Définitions

Définition: Équation linéaire à p inconnues
Soient $p \in \mathbb{N}^{\star}$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, ainsi que $a_1, a_2, \ldots, a_p, b \in \mathbb{K}$. On appelle **équation linéaires à p inconnues**, d'inconnues $x_1, x_2, \ldots, x_p \in \mathbb{K}$, une équation de la forme $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_px_p = b$.

Exemple

L'équation $x+y+z+t=-1$ est une équation linéaire à 4 inconnues x, y, z, t dont $(1,0,0,-2)$ et $(1,1,1,-4)$ sont des solutions.

Définition *Système linéaire*

Un système linéaire à **n lignes** et **p inconnues** est un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

où pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,p\}$, les réels $(a_{i,j})$ appelés **coefficients** du système et (b_i) **seconds membres** du système.

Remarque 2 *On peut voir un système linéaire à n lignes et p inconnues comme n équations linéaires L_i pour $i \in [\![1;n]\!]$ vérifiées simultanément.*

Vocabulaire 1 *On emploiera régulièrement le vocabulaire suivant :*

- ***Résoudre*** *un système linéaire (S) de n lignes à p inconnues consiste à déterminer l'ensemble des listes de p nombres $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ qui satisfont les n lignes du système simultanément.*
- *Une telle liste $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ s'appelle une* ***solution*** *du système (S).*
- *Un système qui n'a pas de solutions est dit* ***incompatible****.*
- *On appelle aussi un système linéaire à n lignes et p inconnues un système* $\boldsymbol{n\times\ p}$.
- *Lorsque le nombre de lignes est égal au nombre d'inconnues, on dit que le système est* ***carré****.*
- *Les* ***coefficients diagonaux*** *d'un système linéaire (S) sont les coefficients de la forme $a_{i,i}$.*

Application à la Physique

En physique les équations de Laplace pour déterminer la circulation de la chaleur à l'intérieur d'un objet passe dans certains cas par la résolution de ce système de taille $n\times n$.

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} 2x_1 & + & x_2 & + & 0 & + & \cdots & + & 0 & = & b_1 & (L_1) \\ -x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & +0 & \cdots & + & 0 & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & & & \\ 0 & + & 0 & + & \cdots & + & -x_{n-1} & + & 2x_n & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Pour résoudre ce système on peut utliser une méthode de résolution générale que nous allons rencontrer dans la prochaine section. Ce type de résolution sera abordé à l'aide de Python en TP d'informatique.

4.2 Ecriture matricielle d'un système linéaire

Un système linéaire de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 & (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 & (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

peut se représenter comme une équation matricielle $AX = B$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ où $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont les matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots a_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots a_{i,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots a_{n,p} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définition: Système linéaire compatible

Un système linéaire $AX = B$ est *compatible* si la matrice B s'écrit comme combinaison linéaire des colonnes de A. Cela signifie que le système admet des solutions.

On appelle **système homège associé** au système linéaire $AX = B$ le système linéaire $AX = 0$ où 0 désigne la matrice colonne nulle.

Définition: Matrice augmentée associée à un système linéaire

Soit (S) le système linéaire de taille $n \times p$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \quad (L_1) \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \quad (L_2) \\ & & & & \vdots & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \quad (L_n) \end{array}\right.$$

La **matrice augmentée associée à** (S), notée $(A \mid b)$ est la matrice de taille $n \times (p+1)$ dont les coefficients sont les suivants :

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots a_{1,p} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots a_{i,p} & b_p \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots a_{n,p} & b_n \end{pmatrix}$$

Exemple

La matrice augmentée associée au système de taille 2×3

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} x & - & 2y & + & z & = & 3 \\ 4x & + & y & - & z & = & -12 \end{array}\right.$$

Alors la matrice associée à (S) est $(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & -12 \end{pmatrix}$.

L'ensemble des solutions d'un système linéaire dépend entièrement d'une solution particulière ainsi que de l'ensemble des solutions de son système homogène associé.

Théorème: Solutions d'un système linéaire

Soit (S) un système linéaire de taille $n \times p$ et (S_H) son système homogène associé. Notons $X_0 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ une solution particulière de (S) et $\mathcal{S}_H$ l'ensemble des solutions du système (S_H). On a alors :

$$\mathcal{S} = \{X_0 + Y \mid Y \in \mathcal{S}_H\}$$

4.3 Algorithme de Gauss

Pour résoudre un système linéaire on lui applique une succession d'opérations jusqu'à arriver à une matrice triangulaire supérieur. On peut alors déterminer simplement les solutions en "remontant" le système. C'est ce qu'on appelle l'*algorithme de Gauss* rencontré au chapitre *Calculs algébriques*.

On distingue 4 types d'opérations élémentaires sur les systèmes linéaires.

Définition : Opérations élémentaires

Soit (S) un système linéaire de taille $n \times p$ et A sa matrice associée. On note $(L_i)_{1 \leq i \leq n}$ les lignes du système (S) (respectivement de A). Appliquer une opération élémentaire consiste à transformer (S) ou de la matrice en :

- permutant deux lignes , noté $L_i \leftrightarrow L_j$
- multipliant une ligne par un réel non nul λ noté $L_i \leftarrow \lambda.L_i$
- ajoutant $\lambda \in \mathbb{K}$ fois une ligne et en l'ajoutant à une autre notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ où $(i \neq j)$.

Méthode

On travaille sur la matrice augmentée $(A \mid b)$ associée à (S). On procède par étape :

- Étape 1 : On échange les lignes du système de manière à ce que les premières lignes contiennent des coefficinets non nuls.
- Étape 2 : On effectue pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_{i,1}}{a_{1,1}}.L_1$.
- Étape 3 : On recommence les étapes (1) et (2) au système $(n-1) \times (p-1)$ formé par les lignes $(L_i)_{2 \leq i \leq n}$ jusqu'à ce que $n = 1$ ou $p = 1$.
- Étape 4 : le système obtenu est échelonné. On distingue alors deux cas. Si il existe des lignes dans la matrice obtenue à la dernière étape qui sont nulles sauf le coefficient de la dernière colonne, alors le système n'a pas de solutions. Si ce n'est pas le cas, le système (S) admet au moins une solution.

Exemple

Résolvons par l'algorithme de Gauss le système suivant :

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & & 2y & + & z & = & 1 & (L_1) \\ x & - & y & + & z & = & 0 & (L_2) \\ x & + & y & + & z & = & 3 & (L_3) \end{array} \right.$$

5 L'anneau des matrices carrées

5.1 Généralités algébriques

Théorème: Les matrices carrées forment un anneau

L'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ muni de l'addition $+$ et de la multiplication matricielle $\times$ est un anneau non commutatif dont l'élément neutre pour la loi "$+$" est la matrice nulle 0_n et l'élément neutre pour la loi "$\times$" est la matrice identité I_n.

Démonstration :sur feuille.

Remarque 3 *L'anneau des matrices carrées de taille n n'est pas intègre, c'est-à-dire $AB = 0$ sans que A ou B soit la matrice nulle. Par exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ on a $A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais A n'est pas la matrice nulle !*

Risque d'erreur

En général le produit de deux matrices **n'est pas commutatif**. Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AB \neq BA$. En effet,

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5.2 Quelques matrices carrées particulières

Définition : Matrice nulle et identité

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

— La matrice identité de taille n, notée $I_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale dont tous les coefficients diagonaux valent 1. Elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— La matrice nulle est la matrice de taille n, notée 0_n est la matrice dont tous les coefficients sont nuls.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A.I_n = I_nA = A$ et $A.0_n = 0_n$. On a donc I_n qui est le neutre pour la loi $\times$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

5.3 Puissances de matrices

Exercice 3 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$*. Calculer* A^3*.*

Théorème
Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et pour tous entiers naturels p et q :

$$A^p \times A^q = A^{p+q} \quad \text{et} \quad (A^p)^q = A^{pq}$$

Démonstration : admise.

Exercice 4 *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$*. Calculer* A^6*.*

Exercice 5 *Soit* $A = \begin{pmatrix} (-2) & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$*. Calculer* A^8*.*

Pour deux nombres réels x et y et un entier naturel n, il est possible à l'aide de la formule du binôme de calculer sous forme de somme la quantité $(x+y)^n$: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$. Cette formule peut s'étendre dans certains cas à une somme de matrices.

Théorème
Soient A et B deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n\mathbb{R}$ telles que $AB = BA$, (on dit que les matrices A et B *commutent*). Alors,

$$(A+B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} . A^k . B^{p-k}$$

Démonstration :

Exemple

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a $AB = BA = B$ car $A = I_2$ donc les matrices commutent et on peut appliquer la formule du binôme de Newton.
Remarquons que $B^2 = 0_2$ et que pour tout $p \in \mathbb{N}$, $A^p = A = I_2$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
(A+B)^p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} . A^{p-k} . B^k && (1)\\
&= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} . B^k && (2)\\
&= \binom{p}{0} . B^0 + \binom{p}{1} . B^1 + 0 = I_2 + p.B && (3)\\
&= \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} && (4)
\end{aligned}$$

Méthode : Calculer $(A+B)^p$

Pour calculer la puissance p d'une somme de matrices $A+B$ en appliquant le binôme de Newton on suit en général la méthode suivante :

1. On s'assure que A et B vérifient $AB = BA$.
2. On calcule les puissances de A et de B, en général leur forme est simple dans les exercices.
3. On calcule les coefficients binomiaux si la puissance p est un nombre explicite.
4. On applique la formule du binôme de Newton.

5.4 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $M = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. La matrice M est **symétrique** si ${}^tM = M$ et **antisymétrique** si ${}^tM = -M$.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ est symétrique de taille 2.

Exercice 6 *Existe-t-il une matrice A de taille 2 symétrique et triangulaire supérieure ?*

Théorème: Décomposition

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice symétrique S et antisymétrique A telle que $M = S + A$.

5.5 Le groupe linéaire

5.6 Généralités

Dans l'anneau $(\mathbb{R}, +, \times)$ (qui est aussi un corps) on sait que l'ensemble des inversibles $\mathbb{R}^\star$ forme un un groupe pour la loi $\times$. Il en est de même avec l'anneau $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times)$ où l'ensemble des matrices inversibles forme un groupe pour la loi "produit matriciel" que l'on appelle **groupe linéaire d'ordre n**.

Définition : Groupe linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. L'ensemble des **matrices inversibles** de taille n que l'on note $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, également appelé **groupe linéaire**, est l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ satisfaisant la relation $AB = BA = I_n$. Une telle matrice B s'appelle l'inverse de A et se note A^{-1}.

Proposition

Soit $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. Il existe une unique matrice $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $BA = AB = I_n$.

Démonstration :

Remarque 4 *Une matrice inversible A possède un unique inverse, ce qui justifie bien dans la définition de parler de "l'inverse" de A et d'employer la notation A^{-1}.*

Théorème: Structure algébrique du groupe linéaire

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Le groupe linéaire $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour la loi $\times$ de neutre la matrice identité.

Démonstration :sur feuille.

Première méthode : Montrer qu'une matrice est inverse d'une autre

Pour montrer que A est inversible d'inverse B donné, il suffit de calculer le produit AB ou BA indifféremment et de montrer qu'il s'agit de l'identité.

Exemple

La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$,

1. I_n est inversible d'inverse elle-même.
2. la matrice nulle n'est pas inversible.

Démonstration :

Théorème
Soient A, B des matrices inversibles appartenant à l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors :

1. AB est inversible d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$.
2. $(A^{-1})^{-1} = A$.

Démonstration :

Risque d'erreur
La somme de deux matrices inversibles n'est, en général, pas inversible. Par exemple, $I_3+(-I_3) = 0$ n'est pas inversible.

Théorème: Matrices triangulaires inversibles
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire. La matrice T est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.
Dans ce cas la matrice T^{-1} est aussi triangulaire.

Corollaire
Soit $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonale. La matrice D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls et dans ce cas la matrice D^{-1} est aussi diagonale.

5.7 Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution d'un système linéaire

Soients $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$

On s'intéresse à l'équation $AX = Y$ d'inconnue X. Le produit $AX = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
& AX = Y \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} 2x_1 & + & x_2 & = & y_1 \\ x_1 & + & x_2 & = & y_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow L_1 \leftarrow L_1 - L_2 & \begin{cases} x_1 & + & 0 & = & y_1 - y_2 \\ x_1 & + & x_2 & = & y_2 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 & = & y_1 - y_2 \\ x_2 & = & y_2 - x_1 = 2y_2 - y_1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{cases} x_1 & = & y_1 - y_2 \\ x_2 & = & y_2 - x_1 = 2y_2 - y_1 \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Cette équivalence nous amène à définir une matrice B qui vérifie $X = B.Y$. En réalité, on a $B = A^{-1}$.

Grâce au théorème suivant, on peut déterminer l'inverse d'une matrice inversible à l'aide de la résolution d'un système linéaire.

Théorème: Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On a l'équivalence des propositions suivantes :

1. A est inversible.
2. Le système $AX = 0$ n'admet que la solution nulle.
3. Pour toute matrice colonne B, le système $AX = B$ admet une unique solution.
4. Pour toute matrice colonne B, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Démonstration :sur feuille.

5.8 Calcul de l'inverse d'une matrice : la méthode matricielle

Méthode

Calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Soit $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

1. On part de la matrice identité I_n.
2. On applique l'algorithme de Gauss sur les lignes à la matrice A, ce qui revient à appliquer une suite finie d'opérations élémentaires jusqu'à obtenir la matrice identité.
3. Si $k \in \mathbb{N}$ désigne le nombre d'opérations élémentaires et notons leur matrice associée dans l'ordre B_i pour $i = 1, \dots, k$. On pose $B = B_k.B_{k-1} \dots B_1$ que l'on obtient en multipliant à gauche au fur et à mesure de la méthode de Gauss la matrice identité par les matrices B_i.
4. La matrice B obtenue à la dernière étape est l'inverse de A, c'est-à-dire $B = A^{-1}$.

Exercice 7 *À l'aide de la méthode précédente, déterminer l'inverse de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

5.9 Action des matrices élémentaires à gauche

Théorème: L'ensemble des matrice élémentaires (matrices de transposition, transvections, dilatation) de taille n sont des éléments de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$.

Corollaire
Soit $(S)\quad AX = B$ un système linéaire matriciel tel que $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Pour T une matrice élémentaire de taille n, le système $(TA)X = TB$ a les mêmes solutions que $AX = B$.

6 Bilan

Les principaux points à retenir dans ce chapitre sont les suivants :

1. Connaître les définitions des matrices particulières : nulle, identité, triangulaire, diagonale, symétrique et antisymétrique, inversible.
2. Savoir réaliser des opérations simples sur les matrices définies explicitement : additions, produit et puissances.
3. Calculer quand cela est possible, les puissances d'une matrice à l'aide du binôme de Newton.
4. Résoudre un système linéaire de manière matricielle.
5. Déterminer si une matrice est inversible et savoir calculer son inverse.

Travaux dirigés

Calcul

Exercice 8 *On pose dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*
Calculer $AB, BA, A^2 - B^2$ et $(A+B)(A-B)$.

Puissances

Exercice 9 *Puissance de matrice*

On pose $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. *Calculer toutes les puissances positives de C à l'aide du binôme de Newton.*
   Indice *: utilisez la matrice $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent* 1.
2. *Vérifier que C est inversible et que la formule trouvée pour les puissances positives s'étend aux puissances négatives.*

Exercice 10 *On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.*

1. *Calculer A^3 et en déduire toutes les puissances positives de A.*
2. *On considère deux suites réelles définies par la donnée de u_0 et v_0 par les relations :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + v_n \text{ et } v_{n+1} = -u_n$$
   Déterminer une expression de u_n et v_n en fonction de n.

Exercice 11 *Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ -2 & 6 & 2 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.*

1. *Montrer que $A = P^{-1}DP$.*
2. *Calculer A^n pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$.*

Classiques à savoir refaire

Exercice 12 *On dit qu'une matrice S est positive si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X^T SX \geq 0$. On se donne dans la suite une matrice D diagonale.*

1. *Calculer $X^T DX$ pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.*
2. *En déduire une CNS pour que D soit positive.*

Exercice 13 *Soit A une matrice réelle carrée de taille n telle qu'il existe un entier naturel p tel que $A^p = 0$. Montrer que $I_n - A$ est inversible et exprimer son inverse.*

Exercice 14 *Montrer que le produit de deux matrices symétriques est une matrice symétrique si et seulement si les deux matrices commutent.*

Exercice 15 *Soit n un entier naturel non nul. Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. Calculer $AE_{i,j}$ et $E_{i,j}A$ où $E_{i,j}$ est une matrice élementaire ayant un 1 en case (i,j) et des 0 partout ailleurs. En déduire toutes les matrices A de $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant pour tout B dans $\mathcal{M}_n(K)$, $AB = BA$.*

Inversibilité

Exercice 16 *Soit $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.*

Exercice 17 *Déterminer les matrices inversibles et leurs inverses dans la liste suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ (indication : on pourra chercher un vecteur x non-nul tel que $Bx = 0$).*

Montrer que la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & \dots & \dots & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible si la taille de la matrice est au moins 2.

Exercice 18 $\star$ *Calculer l'inverse de la matrice :*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Matrices et suites récurrentes

On veut déterminer l'ensemble des suites réelles satisfaisant : $(E) : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 4u_n - 3u_{n+2}$.

Pour tout entier naturel n, on définit la matrice $X_n \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = AX_n$.
2. Montrer que connaître l'expression de A^n permettrait de trouver X_n en fonction de A et X_0 puis u_n en fonction de n et des premiers termes u_0, u_1 et u_2.
3. Déterminer les rangs des matrices $A - I_3$, $A + 2I_3$ et $(A + 2I_3)^2$ où I_3 représente la matrice identité de taille 3.

4. Calculer $(A+2I_3)^2(A-I_3)$. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
5. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3/4 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (b) Calculer les puissances successives de T.
   (c) Montrer que $AP = PT$.
6. Expliquer comment calculer $A^n, \forall n \in \mathbb{N}$ à l'aide des résultats précédents.