Chapitre 11 : Convexité

Table des matières

1 Introduction

Dans tout le chapitre on notera I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction convexe peut se comprendre comme une fonction dont l'image d'un point c de l'intervalle $[a,b] \subset I$ est situé sous la corde reliant les points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

Cette famille de fonctions est outil fécond pour permettre de montrer certaines inégalités, notament grâce à l'aide de l'inégalité de Jensen.

On donne dans ce chapitre plusieurs caractérisations simples des fonctions convexes, d'une part d'ordre géométrique et d'autre part en imposant des conditions sur les dérivées dans le cas de fonctions dérivables.

2 Généralités

2.1 Définition et interprétation géométrique

Définition: Fonction convexe/concave

Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est **convexe** si pour tous $x, y \in I$ et $\lambda \in [0,1]$:

$$f(\lambda.x + (1-\lambda).y) \leq \lambda.f(x) + (1-\lambda).f(y).$$

Lorsque $-f$ est convexe on dit de f qu'elle est **concave**.

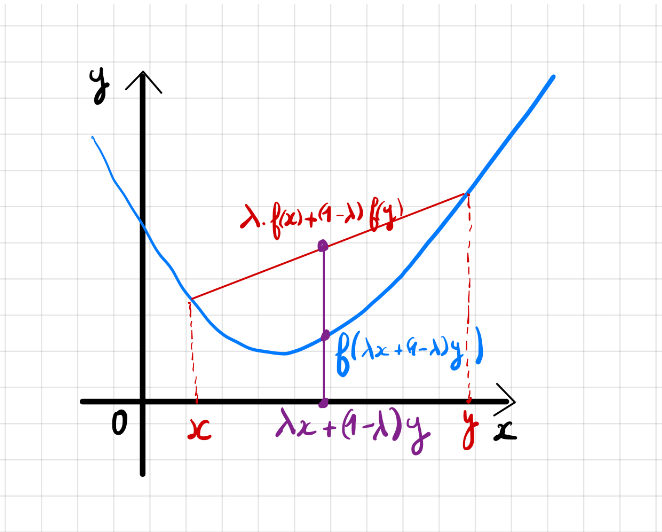

Figure 1 – Graphe d'une fonction convexe

Exemple

La fonction carrée est convexe sur $\mathbb{R}$ et la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est concave sur $\mathbb{R}_+$.

2.2 Le théorème de Jensen

Théorème: Jensen
Soit une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$. Alors pour tout $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ des réels positifs tels que $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ et n points quelconques de I, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in I$, on a :

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k . x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k . f(x_k).$$

<u>Démonstration</u> :sur feuille.

3 Caractérisations

Il n'est pas très difficile d'établir qu'une fonction est convexe. Balayons plusieurs critères.

3.1 Croissance des pentes

Lorsque l'on fixe un point quelconque $a \in I$, la pente de la corde reliant $(a, f(a))$ à $(t, f(t))$ croit avec t.

Théorème: Croissance des pentes
Soit $f : I \to \mathbb{R}$. La fonction f est convexe si et seulement si pour tout $x \in I$, l'application :

$$\begin{array}{rccc} g_x : & I \setminus \{x\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \dfrac{f(t) - f(x)}{t - x} \end{array}$$

est croissante.

<u>Démonstration</u> :sur feuille.

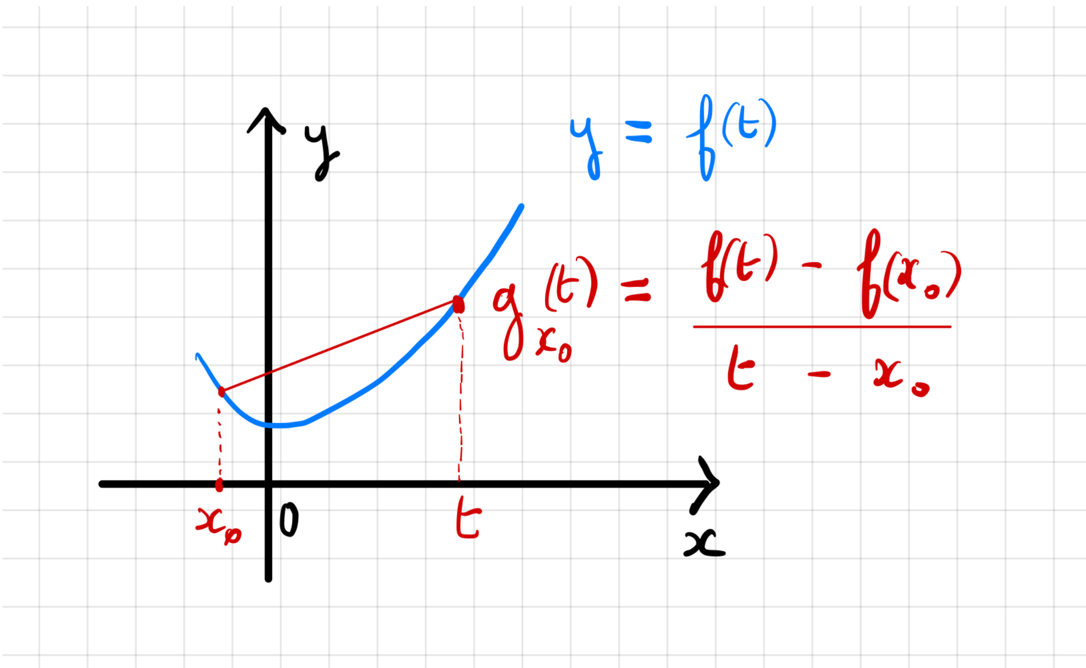

Figure 2 – Croissance des pentes

Pour $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe et $x, y, z \in I$ tels que $x < y < z$ on a en appliquant la proposition précénte à g_x et g_z les inégalités sur les pentes suivantes :

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

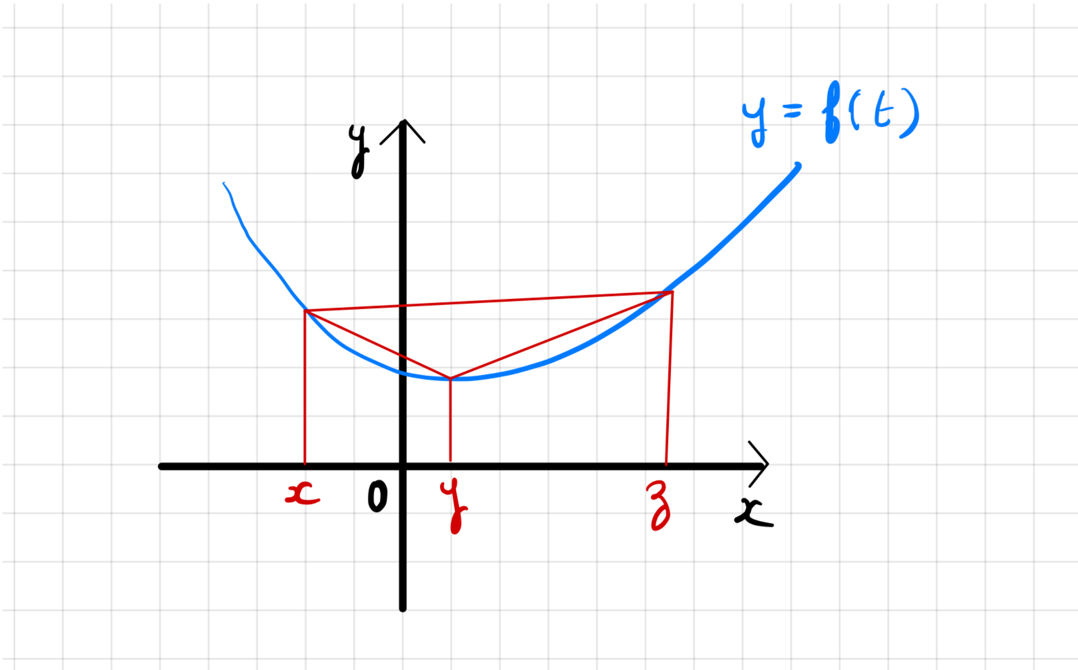

Figure 3 – Inégalité des pentes

Une conséquence fondamentale de la croissante des pentes est la continuité d'une fonction convexe en tout point intérieur.

Proposition

Une fonction convexe $f : I \to \mathbb{R}$ est continue en tout point a intérieur à I (pas nécessairement aux extrémités). De plus elle admet une dérivée à gauche et à droite en a qui vérifie l'inégalité :

$$f'_g(a) \leq f'_d(a).$$

3.2 Fonctions dérivables et deux fois dérivables

Théorème: Caractérisation des fonctions convexes dérivables
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur I. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est convexe.
2. f' est croissante.
3. La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ est au dessus de toutes ses tangentes.

Corollaire
Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable est convexe si et seulement si sa dérivée seconde f'' est positive sur I.

Démonstration :

Méthode
Comment montrer qu'une fonction est convexe ?
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour démontrer que f est convexe, on met en oeuvre la définition de convexité ou bien on peut utiliser les caractérisations précédentes suivant la régularité de f :

1. Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ on vérifie que $f'' \leq 0$ sur I.
2. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ on vérifie que f' est croissante sur I.
3. Sinon on vérifie l'inégalité des cordes.

Exemple
On peut montrer à l'aide de la méthode précédente que pour $\alpha \in [0, 1]$ $x \mapsto x^\alpha$ est concave et pour $\alpha \geq 1$ elle est convexe.

4 Travaux dirigés

Exercice 1 *Exemples de fonctions convexes*

Montrer que les fonctions suivantes sont convexes :

1. $f: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & -\ln(x) \end{array}$.
2. $g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$.
3. $h: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x \end{array}$.
4. $s: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+e^x) \end{array}$.

Exercice 2 *Convexité d'une composée Soit f et g deux fonctions convexes définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose que g est croissante sur $\mathbb{R}$.*
Montrer que $g \circ f$ est convexe.

Exercice 3 *Position relative*
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. *On suppose que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est positive.*
2. *On suppose que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote en $+\infty$. Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à cette droite.*

Exercice 4 *Une inégalité sur le logarithme*
Soit $f :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par l'expression $f(x) = -\ln((\ln(x))$.

1. *Montrer que f est convexe.*
2. *En déduire que pour tout $(a,b) \in]1,+\infty[^2$, on a :*

$$\ln\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(a)\ln(b)}.$$

Exercice 5 *($\star$) Inégalité arithmético-géométrique*

1. *Montrer que $x \mapsto -ln(x)$ est convexe.*
2. *À l'aide de l'inégalité de Jensen, montrer que si $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont des nombres réels strictement positifs, alors :*

$$\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Exercice 6 *($\star\star$) Inégalité de Hölder*
Soient deux nombres réels $p, q > 0$ tels que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
Pour toute famille de réels positifs $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ on a :

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$