Chapitre 12 : Polynômes

Table des matières

Dans tout ce chapitre, l'ensemble $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 L'anneau des polynômes à une indéterminée

1.1 Définition-construction

Cette partie **n'est pas exigible**. On construit un polynôme à l'aide d'une suite.

Définition: Polynôme à une indéterminée

Un **polynôme à coefficient dans** $\mathbb{K}[X]$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ dont seul un nombre fini de termes sont non nuls.

Vocabulaire 1 *Notons $P = (a_k)_{k\geq 0}$ un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall j > n, \ \ a_k = 0$$

- *les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots$ sont les **coefficients** de P.*
- *si $a_n \neq 0$ on dit que n est le **degré** de P et a_n est appelé le **coefficient dominant** de P. On note alors $deg(P) = n$.*
- *Si le coefficient dominant d'un polynôme vaut 1 on dit que le polynôme est **unitaire**.*
- *si tous les coefficients de P sont nuls on dit que P est le **polynôme nul**.*
- *Par convention on dit que le degré du polynôme nul (qui est constant) est $-\infty$ et pas 0.(nous verrons plus loin pourquoi).*

1.2 Opérations

Théorème: Opérations + et ×

Soient $P = (a_k)_{k\geq 0}, Q = (b_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors

1. *(somme) $P + \lambda.Q = (a_k + \lambda \times b_k)_{k\geq 0} \in \mathbb{K}[X]$.*
2. *(produit) $P \times Q = (c_k)_{k\geq 0}$ où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \sum\limits_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$.*

L'ensembles des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ se construit à partir de l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ mais on note usuellement un élément de $\mathbb{K}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$ sous la forme :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$$

*L'ensemble des polynômes de **degré au plus** n se note $\mathbb{K}_n[X]$.*

Exemple

Les polynômes $P(X) = 1 + X + X^2$ et $Q(X) = -X + 5X^4$ appartiennent tous deux à l'ensemble $\mathbb{R}_4[X]$ mais pas à $\mathbb{R}_1[X]$.

Il est possible de composer deux polynômes comme des fonctions dont les domaines de définition et d'arrivée sont compatibles.

Définition: Composée de polynômes

Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X)$ deux polynômes appartenant à $\mathbb{K}[X]$. Notons pour tout $k \in \mathbb{N}$, $Q^k(X)$ le produit itéré k fois de $Q(X)$ avec pour convention $Q^0(X)$ égal au polynôme constant *valant 1. Le **polynôme composé** de P par Q noté $P \circ Q(X)$ est :*

$$P \circ Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k Q^k(X)$$

Exemple

Si $P(X) = 1 + X$ et $Q(X) = 1 - X + 3X^3$ alors le polynôme composé $Q \circ P(X)$ a pour expression

$$Q \circ P(X) = 3 + 8X + 9X^2 + 3X^3$$

Risque d'erreur

En reprenant les notations de l'exemple précédent et en calculant $P \circ Q(X)$ on peut s'apercevoir qu'en général la composition de polynômes n'est pas commutative.

1.3 Degré

Nous avons déjà vu la définition de degré et de coefficient dominant. Explorons maintenant le rapport entre degré d'un polynôme et opérations.

Proposition

Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

1. $deg(P(X) + Q(X)) \leq max(deg(P(X)), deg(Q(X)))$
2. $deg(P(X) \times Q(X)) = deg(P(X)) + deg(Q(X))$

***Démonstration**.*

***Remarque 1** La convention du degré $-\infty$ du polynôme nul prend ici tout son sens. En effet, pour tout $P(X) \in \mathbb{K}[X]$, $P(X) \times 0 = 0$ donc par la formule du degré d'un produit de polynômes on obtient $deg(P) + deg(0) = deg(0)$. La seule manière de rendre cohérente cette formule est d'accepter que $deg(0) = -\infty$ et la convention $n - \infty = -\infty$.*

Corollaire

Soient $P, Q \in \mathbb{K}_n[X]$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Alors $\lambda.P + \mu.Q$ appartient à l'ensemble $K_n[X]$.

*Démonstration :La proposition suivante reflète ce que l'on appelle l'**intégrité** de l'ensemble des polynômes.*

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors :

$$P \times Q = 0 \Longrightarrow P = 0 \text{ ou } Q = 0$$

Démonstration : Il s'agit d'une conséquence de la formule du degré d'un produit de polynômes.

Remarque 2 *Cette propriété est fausse pour les matrices. On se rappelera de l'exemple* $A^2 = 0$ *où* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 1 *Soit* $n \in \mathbb{N}^\star$*. Déterminer le degré du polynôme :*

$$(X+1)^n - (X-1)^n$$

1.4 Structure algébrique

Théorème: $\mathbb{K}[X]$ ***est un anneau***

L'ensemble des polynômes à une indéterminée $\mathbb{K}[X]$ *muni des lois* $+$ *et* $\times$ *est un anneau commutatif et intègre.*

Démonstration :sur feuille.

Risque d'erreur

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$ *l'ensemble* $\mathbb{K}_n[X]$ *a une structure de groupe abélien pour la loi* $+$ *mais pas de sous-anneau de* $\mathbb{K}[X]$.

1.5 Polynômes et fonctions polynomiales

Définition: Evaluation en un point

Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ *un élément de* $\mathbb{K}[X]$ *et* $\alpha \in \mathbb{K}$*. On appelle* ***évaluation de P(X) en*** α *l'élément :*

$$P(\alpha) = \sum_{k=0}^{n} a_k \times (\alpha)^k$$

Pour obtenir $P(\alpha)$ *on dit que l'on substitue* X *par* α *dans* P.

Il est possible d'associer à tout polynôme, dont on sait par construction qu'il correspond à une suite dont au plus un nombre fini de termes sont non nuls, une fonction polynomiale.

Définition: Fonctions polynomiale

On dit qu'une fonction $P : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ *est* **polynomiale** *s'il existe* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ *tels que pour tout* $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_n x^n$.
On note $\mathcal{P}ol(I, J)$ *l'ensemble des fonction polynomiales de* I *dans* J.

Théorème: Bijection Polynômes $\leftrightarrow$ ***fonctions polynomiales***

L'application

$$\phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathcal{P}ol(\mathbb{K}, \mathbb{K}) \\ P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k & \longmapsto & \left(x \mapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) \end{array}$$

est bijective.

Démonstration : : Le caractère surjectif de l'application ϕ est clair. L'injectivité de l'application est due au fait qu'un polynôme admettant une infinité de racines est nécessairement nul. Nous le démontrons dans la section Racines.

2 Divisibilité et division euclidienne

La notion de division euclidienne connue dans les entiers s'étend à l'ensemble des polynômes. On peut donc généraliser les résultats vus au chapitre 6 à l'anneau $\mathbb{K}[X]$.

Définition: Diviseur

*Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $Q(X)$ **divise** $P(X)$ et on note $(Q(X)|P(X)$ s'il existe $A(X) \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = A(X) \times Q(X)$.*

Exemple

Comme $X^4 - 1 = (X-1)(X^3 + X^2 + X^2 + X + 1)$, les polynômes $X - 1$ et $X^3 + X^2 + X + 1$ divisent tous deux $X^4 - 1$.

Exercice 2 *Quels sont les polynômes qui divisent le polynôme nul ? Lesquels sont divisibles par lui ?*

Proposition

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$. Alors $P|Q$ et $Q|P$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{K}^\star$ tel que $P = \lambda.Q$. Dans ce cas on dit que les polynômes P et Q sont associés.

Proposition

Soient $P, Q, A, B, D \in \mathbb{K}[X]$. Si D divise P et D divise Q alors D divise $A \times P + B \times Q$.

Théorème Division euclidienne

Soient $A(X), B(X) \in \mathbb{R}[X]$. Il existe une unique paire de polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ tels que :
- $A(X) = Q(X) \times B(X) + R(X)$
- $deg(R(X)) < deg(B(X))$

***Démonstration**.*

Méthode

Comment réaliser la division euclidienne de $A(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ par $B(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$, respectivement de degré n et m ?

1^{er} cas : si $deg(A(X)) < deg(B(X))$ alors la division euclidienne est :

$$A(X) = \underbrace{0}_{Q(X)} \times B(X) + \underbrace{A(X)}_{R(X)}$$

2^{me} cas : Si $deg(A(X)) \geq deg(B(X))$ alors on calcule $R'(X) = A(X) - (\frac{a_n}{b_m} X^{n-m}) \times B(X)$ et on distingue deux sous-cas :
- *si $deg(R'(X)) < deg(B(X))$ alors on pose $R'(X) = R(X)$*
- *sinon on recommence la division euclidienne de $R'(X)$ par $B(X)$ jusqu'à arriver à une des étapes précédentes.*

Exemple

Voici un exemple détaillé de division euclidienne de polynôme. Posons $A(X) = X^4+1$ et $B(X) = X^2+1$.

$$\begin{array}{cc} A(X) - X^2 \times B(X) & = \\ X^4+1-X^2(X^2+1) & = \\ X^4+1-X^4-X^2 & = \\ -X^2+1 & \end{array}$$

Or, $deg(-X^2+1) = 2 \geq deg(B(X))$ donc on cherche à éliminer le terme de degré deux comme suit.

$$\begin{array}{cc} A(X) - X^2 \times B(X) - (-1) \times B(X) & = \\ -X^2+1-(-1)\times(X^2+1) & = \\ -X^2+1+X^2+1 & = \\ 2 & \end{array}$$

Comme $deg(2) = 0 < deg(B(X))$ l'algorithme se termine et on peut calculer aisément les polynômes $Q(X)$ et $R(X)$ de la division.

$$A(X) = \underbrace{(X^2-1)}_{Q(X)} \times B(X) + \underbrace{2}_{R(X)}$$

Exercice 3 *Montrer que si $X-1$ divise P alors X^n-1 divise $P(X^n)$.*

3 Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$

3.1 Dérivation formelle

Définition: Dérivée formelle

*Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un élément de $\mathbb{K}[X]$. On appelle **dérivée formelle de P(X)** le polynôme suivant :*

$$P'(X) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$

Exemple

Si $P(X) = X^3 - 2X + 4$, alors $P'(X) = 3X^2 - 2$.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

- *Si $deg(P) \in \mathbb{N}^\star$ alors $deg(P') = deg(P) - 1$.*
- *le polynôme P est constant si et seulement si $P' = 0$.*

3.2 Opérations et dérivation

Théorème: Dérivation d'un produit

Soient $P(X), Q(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a :
- $(P(X) \times Q(X))' = P'(X) \times Q(X) + P(X) \times Q'(X)$
- $(\lambda.P(X) + Q(X))' = \lambda.P'(X) + Q'(X)$

3.3 Dérivées successives et formule de Taylor

Définition: Dérivée d'ordre k

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On définit par récurrence les dérivées d'ordre $k \in \mathbb{N}$ de la manière suivante :
- $P^{(0)} = P$
- *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P^{(k+1)} = \left(P^{(k)}\right)'$*

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a

$$(X^n)^{(k)} = \left(\prod_{j=0}^{k-1}(n-j+1)\right) X^{n-k}$$

*Nous avons déjà abordé la formule de Taylor avec reste intégrale dans le chapitre **Fonctions dérivables**. La notion de dérivation formelle successive permet de fournir une version simple de la formule de Taylor.*

Théorème: Formule de Taylor pour les polynômes

Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(\alpha)}{k!} (X-\alpha)^k$$

***Remarque 3** La formule de Taylor indique qu'un polynôme (ses coefficients) est entièrement déterminé par ses dérivées successives.*

4 Racines

4.1 Généralités

Définition *Racine d'un polynôme*
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α est une ***racine*** *de P si l'évaluation de P en α est nulle c'est à dire $P(\alpha) = 0$.*

Théorème
Soit P un polynôme. Alors $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine de P si et seulement si P se factorise par $X - \alpha$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$P(X) = (X - \alpha) \times Q(X)$$

Démonstration.
Si $P(X)$ est de la forme $(X - a) \times Q(X)$ alors a est bien une racine de P car $(a - a) \times Q(a) = 0 \times Q(a) = 0$.
Montrons la réciproque en supposant que a est une racine du polynôme $P(X)$ et réalisons la division euclidienne de $P(X)$ par $X - a$. Il existe donc $R(X) \in \mathbb{R}[X]$ de degré strictement inférieur à 1, c'est à dire un polynôme constant, tel que $P(X) = (X - a) \times Q(X) + R(X)$. Or a est une racine de P donc en évaluant cette expression en a, on obtient

$$0 = P(a) = \underbrace{(a - a) \times Q(a)}_{0} + R(a)$$

Ainsi $R(a) = 0$ et $R(X) = 0$ puisque c'est un polynôme constant.On en déduite le résultat annoncé.$\square$

Remarque 4
- *Une formulation arithmétique de ce résultat est que α est une racine de P implique que $X - \alpha$ est un diviseur de P.*
- *Ce théorème est un des nombreux résultats mathématiques de René Descartes (1596-1650).*

4.2 Racines et degré d'un polynôme

Définition: Polynôme scindé
Un polynôme est dit scindé sur $\mathbb{K}$ s'il existe $\alpha \in \mathbb{K}, p \in \mathbb{N}, (\alpha_0, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^{p+1}$ et $(m_0, \dots, m_p) \in \mathbb{N}^{p+1}$ tels que $P(X) = \lambda \prod_{k=0}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}$.

Proposition
Soit $P(X) = \lambda \prod_{k=0}^{p} (X - \alpha_k)^{m_k}$ un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$. On a

$$deg(P(X)) = \sum_{k=0}^{p} m_k$$

Théorème: Lien degré/racines
Soit P un polynôme de degré n non-nul à coefficients dans $\mathbb{K}$, alors P admet au plus n racines dans $\mathbb{K}$.

Démonstration :Par récurrence sur le degré de P.

4.3 Racine d'ordre r

***Définition: Racine d'ordre** r*

*Soit $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On dit que α **est une racine d'ordre** $r \in \mathbb{N}$ où*

$$r = max\{k \in \mathbb{N} | (X-\alpha)^k \text{ divise } P(X)\}.$$

*Lorsque $r = 1$ on dit que α est une **racine simple de P(X)** dans le cas contraire on dit qu'elle est **multiple**.*

Exemple

Le réel 2 est une racine d'ordre 2 du polynôme $(X-2)^2(X-1) = X^3 - 5X^2 + 8X - 4$.

Une des conséquences de la formule de Taylor est la proposition suivante qui nous permet de reconnaître une racine d'ordre r d'un polynôme.

Proposition

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ et $r \in \mathbb{N}^\star$. L'élément $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine d'ordre r de P si et seulement si $P(\alpha) = \cdots = P^{(r-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(r)}(\alpha) \neq 0$.

***Remarque 5** D'après la proposition précédente, $\alpha \in \mathbb{K}$ est une racine multiple de P si et seulement si $P(\alpha) = P'(\alpha) = 0$.*

4.4 Racines et coefficients

Théorème: Produit et sommes des racines

1. *Soit $a \neq 0$. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c \in \mathbb{K}_2[X]$ scindé et admettant comme racines dans $\mathbb{K}$ α et β, alors $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$ et $\alpha\beta = \frac{c}{a}$.*
2. *Soit $a \neq 0$. Soit $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \in K_3[X]$ scindé admettant comme racines dans $\mathbb{K}$ α, β et γ, alors $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta + \beta\gamma + \alpha\gamma = \frac{c}{a}$ et $\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}$.*
3. *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n scindé sur $\mathbb{K}$ admettant $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ comme racines dans K alors :*
   $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$ *et* $\prod\limits_{k=0}^{n} \alpha_k = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$.

***Exercice 4** Résoudre le système suivant :*

$$\begin{cases} x+y+z &= 1 \\ xy+yz+xz &= 1 \\ xyz &= 1 \end{cases}$$

*On peut obtenir une généralisation de la formule du produit et de la somme des racines d'un polynôme grâce à la notion de **fonctions symétrique élémentaire** que l'ont introduit dans le théorème suivant.*

Théorème: Expression des coefficients en les racines

Soit $P(X) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé de dergé $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que :

$$P(X) = a_n(X - r_1) \times ... \times (X - r_n).$$

On définit les fonctions symétriques élémentaires de $P(X)$ notées $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ associées aux

racines $r_1, \dots, r_n$ telles que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $\sigma_k = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_k \le n} r_{i_1} r_{i_2} \dots r_{i_n}$.
Les coefficients de $P(X)$ s'expriment à l'aide des fonctions symétriques élémentaires de la manière suivante.

$$\forall k \in [\![1,n]\!], \quad \sigma_k = (-1)^k \frac{a_{n-k}}{a_n}$$

Remarque 6 *Pour un polynôme de degré n scindé :*

- *σ_1 correspond à la somme des racines de $P(X)$.*
- *σ_n correspond au produit de toutes les racines comptées avec multiplicité.*

4.5 Problème d'interpolation

Théorème: Interpolation de Lagrange
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et $x_1, \dots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ distincts, $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ quelconques. Il existe un polynome $P(X) \in \mathbb{K}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $P(x_i) = y_i$. On appelle ***polynôme interpolateur de Lagrange*** *le polynôme satisfaisant à cette contrainte qui s'écrit sous la forme :*

$$P(X) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left[\prod_{\substack{1 \le j \le n \\ j \ne i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j} \right].$$

Démonstration :voir TD.

Remarque 7 *Naturellement le problème de l'interpolation n'a pas une unique solution si on ne fixe pas le degré.*

5 Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$

Théorème: Existence d'un PGCD et d'un PPCM pour un couple de polynômes
Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$.

- *PGCD : Il existe un unique polynôme unitaire $\Delta \in \mathbb{K}[X]$ appelé le PGCD de A et B caractérisé par :*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad P|A \text{ et } P|B \iff P|\Delta.$$

- *PPCM : Il existe un unique polynôme unitaire $M \in \mathbb{K}[X]$ appelé le PPCM de A et B caractérisé par :*

$$\forall P \in \mathbb{K}[X], \quad A|P \text{ et } B|P \iff M|\P.$$

On note $\Delta = A \wedge B$ et $M = A \vee B$.

Exemple
Pour $A = X - X^3$ et $B = X^2 + X$ on a $A \wedge B = X(1 + X)$ et $A \vee B = A$.

Méthode
Comment déterminer le PGCD de A et B ?

Il existe principalement deux possibilités :

1. *Soit A et B sont décomposés en produit de polynômes irréductibles :*

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \dots P_r^{\alpha_r} \quad et \quad B = \mu Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \dots Q_s^{\beta_s}$$

dans ce cas on obtient $A \wedge B = \prod_{k=1}^{N} P_k^{min(\alpha_k, \beta_k)}$ *et leur PPCM s'écrit* $A \vee B = \prod_{k=1}^{N} P_k^{max(\alpha_k, \beta_k)}$.

2. *On applique l'algorithme d'Euclide comme dans Z par division euclidienne successives.*

Exemple

Si $A = X^3 + X^2 - 2$ et $B = X^3 + X - 2$ on a $A \wedge B = X - 1$.

Définition: Polynômes premiers entre eux

Soit $(A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$ un couple de polynômes. On dit que A et B sont premiers entre eux si $A \wedge B = 1$.

Théorème: Bézout

$(A, B) \in (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})^2$. Les polynômes A et B sont premiers entre eux si et seulement si il existe un couple $(U, V) \in \mathbb{K}[X]^2$, tel que $AU + BV = 1$.

Méthode

Comment déterminer une relation de Bézout ?

Il suffit d'appliquer l'algorithme d'Euclide étendu comme pour les entiers.

Exemple

Si $A = X^3 + X^2 - 2$ et $B = X^3 + X - 2$ on a par l'algorithme d'Euclide étendu $X - 1 = \frac{1}{2}(X + 2) \times B - \frac{1}{2}(X + 1)A$.

Théorème: Gauss

Soit $(A, B, C) \in \mathbb{K}[X]^3$. Si $A|(BC)$ et $A \wedge B = 1$ alors $A|C$.

6 Décomposition en produit d'irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

6.1 Irréductibilité

Définition: Polynôme irréductible

*Un polynôme non constant $P(X) \in \mathbb{K}[X]$ est **réductible** dans $\mathbb{K}[X]$ s'il existe $A(X), B(X) \in \mathbb{K}[X]$ tels que :*

- *$deg(A(X)) \geq 1$, $deg(B(X)) \geq 1$.*
- *$P(X) = A(X) \times B(X)$.*

*Lorsqu'un polynôme n'est pas réductible on dit qu'il est **irréductible**.*

Remarque 8 *Tous les polynômes de degré 1 sont irréductibles. Ce sont les polynômes irréductibles de plus bas degré.*

Proposition

Soit P un polynôme de $K[X]$. Le polynôme P est irréductible si :

- *P n'est pas un polynôme constant.*
- *Les seuls diviseurs de P sont les polynômes constants et les multiples de P.*

Une question classique concernant les polynômes est la détermination d'une ou des racines. Mais un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ admet-il toujours des racines ? Cela dépend en réalité de $\mathbb{K}$.

6.2 Décomposition dans $\mathbb{C}[X]$

Théorème: d'Alembert

Soit $P(X) \in \mathbb{C}[X]$ non constant. Alors $P(X)$ admet au moins une racine dans $\mathbb{C}$.

Corollaire

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

Une des conséquences de ce dernier corollaire est que tous les polynômes dans $\mathbb{C}[X]$ sont scindés, ce qui n'est pas le cas dans $\mathbb{R}[X]$.

6.3 Décomposition dans $\mathbb{R}[X]$

Théorème: Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Dans $\mathbb{R}[X]$, les polynômes irréductibles sont :

- *les polynômes de degré 1.*
- *les polynômes de degré 2 sans racine réelle.*

Corollaire

Tout polynôme réel se décompose comme un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 ayant un discriminant négatif.

Exercice 5 *Décomposer dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le polynôme $X^4 + 1$.*

7 Fractions rationnelles

7.1 Généralités

Définition: Fraction rationnelle

Une ***fraction rationnelle*** *à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme $F = \dfrac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et Q n'est pas le polynôme nul.*

De plus, on dit que F est sous ***forme irréductible*** *si les polynômes P et Q sont premiers entre eux et que Q est unitaire.*

On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple

La fraction rationnelle $F(X) = \dfrac{X^3 - 1}{X^2 - 1}$ n'est pas mise sous forme irréductible qui est

$F(X) = \dfrac{X^2 + X + 1}{X + 1}$.

Définition: Zéro et pôle

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in K(X)$ *une fraction rationnelle irréductible et* $\alpha \in \mathbb{K}$.

- *On dit que* α *est un* ***zéro*** *de multiplicité* p *de* F *si elle est une racine de* P *de multiplicité* p .
- *On dit que* α *est un* ***pôle*** *de multiplicité* p *de* F *si elle est une racine de* Q *de multiplicité* p .

Exemple

La fraction rationnelle irréductible $F(X) = \dfrac{X^2 + X + 1}{X + 1}$ *admet pour zéros dans* $\mathbb{C}$ *les nombres* j *et* j^2 *et pour unique pôle* -1.

Théorème: Décomposition en parties entière et polaire

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle et* α *un pôle de* F *de multiplicité* $p \in \mathbb{N}^\star$.

1. *Il existe un couple* $(E, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ *unique tel que* E *est un polynôme,* G *est une fraction rationnelle de degré strictement négatif vérifiant l'égalité* $F = E + G$. *On dit que* E *est la* ***partie entière*** *de* F.
2. *Il existe un couple* $(R, G) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$, *unique tel que* G *est une fraction rationnelle n'admettant pas* α *pour pôle,* R *est un polynôme de degré strictement inférieur à* p *vérifiant l'égalité* $F = G + \dfrac{R}{(X-\alpha)^p}$. *La fraction* $F_\alpha = \dfrac{R}{(X-\alpha)^p}$ *est dite la* ***partie polaire*** *de* F *relative à* α.

Remarque 9 *Si* $F = \dfrac{P}{Q}$ *sa partie entière est le quotient dans la division euclidienne de* P *par* Q.

7.2 Décomposition en éléments simples

Théorème: Décomposition en élément simple

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ *une fraction rationnelle non nulle présentée sous forme irréductible.*

- *Cas de* $\mathbb{C}$ *:*
$$F = Ent(F) + \sum_{i=1}^{n} F_{\alpha_i} = Ent(F) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i - 1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i - k}}$$
- *Cas de* $\mathbb{R}$ *:*
$$F = Ent(F) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=0}^{p_i-1} \frac{a_{i,k}}{(X-\alpha_i)^{p_i-k}} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=0}^{q_j-1} \frac{b_{j,k}X + c_{j,k}}{(X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{q_j-k}}$$

  où $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} (X-\alpha_i)^{p_i} \times \prod_{j=1}^{m} (X^2 + \beta_j X + \gamma_j)^{q_j}$ *est la décomposition primaire de* Q *dans* $\mathbb{R}[X]$.

Proposition

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ de représentant irréductible $\dfrac{P}{Q}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle simple de F. Alors $Q = (X-\alpha)\tilde{Q}$ avec $\tilde{Q}(\alpha) \neq 0$ et la partie polaire de F relative à α s'écrit :

$$F_\alpha = \frac{a_0}{(X-\alpha)} \qquad \text{où } a_0 = \left(\frac{P}{\tilde{Q}}\right)(\alpha) = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

Méthode

Comment décomposer une fraction rationnelle en éléments simples ?

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Pour obtenir sa décomposition en éléments simples on suit les étapes suivantes :

1. *On écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ sous forme unitaire en simplifiant par le PGCD de P et Q.*
2. *On détermine la partie entière de F à l'aide de la division euclidienne de P par Q.*
3. *On décompose Q en produits d'irréductibles de $\mathbb{K}[X]$.*
4. *On exprime la décomposition en éléments simples comme dans le théorème avec des coefficients littéraux.*
5. *On détermine chaque coefficient de la partie polaire en multipliant par un bon polynôme et en passant à la limite lorsque x tend vers l'un des pôles.*

Exemple

La décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ de $F(X) = \dfrac{X^2+X+1}{X(X-1)^2(X^2+1)}$ est :

$$F(X) = -\frac{1}{X} + \frac{1}{2(X-1)^2} + \frac{1}{2(X-1)} + \frac{X-2}{2(X^2+1)}.$$

Proposition

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul et $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ ses zéros distincts de multiplicités respectives $(r_1, \ldots, r_p)$. Alors $\dfrac{P'}{P} = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{r_i}{(X-\alpha_i)}$.

8 Travaux dirigés

Exercice 6 *Effectuer les divisions euclidiennes suivantes dans* $\mathbb{R}[X]$ *:*
(a) $4X^5 - 2X^4 + 5X^3 + 4X + 2$ *par* $X^2 + 1$ *(b)* $-2X^5 - 2X^4 - X^3 + 4X^2 + 4X + 3$ *par* $X^2 + X + 1$

Exercice 7 *Déterminer* a *et* b *pour que* $X^2 - aX + 1$ *divise* $X^4 - X + b$.

Exercice 8 *Trouver tous les polynômes* P *tels que* $P(X^2) = (X^2 + 1)P(X)$. *Même question avec* $P \circ P = P$.

Exercice 9 *Soit* $P \in \mathbb{K}[X]$. *Montrer que* $P(X+1) = \displaystyle\sum_{n=0}^{deg(P)} \frac{1}{n!} P^{(n)}(X)$.

Exercice 10 *Résoudre les équations différentielles suivantes dans* $\mathbb{K}[X]$ *d'inconnue* P *:*

1. $(P')^2 = 4P$.
2. $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 11 *Soit* n *et* m *deux entiers naturels non nuls. Montrer que* n *divise* m *si et seulement si* $X^n - 1$ *divise* $X^m - 1$.

Exercice 12 *Polynômes interpolateurs de Lagrange :*
Soit $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ *deux à deux distincts.*

1. *Pour chaque* $i \in [|0, \ldots, n|]$, *construire un polynôme* L_i *de degré* n *tel que* $L_i(a_i) = 1$ *et* $\forall j \neq i, L_i(a_j) = 0$.
2. *Soit* $(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$ *des éléments de* $\mathbb{R}$. *Montrer qu'il existe un unique* P *dans* $\mathbb{R}_n[X]$ *tel que pour tout* i *dans* $[\![0, n]\!]$, $P(a_i) = \alpha_i$.
3. *Montrer que la famille* $(L_0, \ldots, L_n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 13 *Résoudre l'équation* $X^3 - 8X^2 + 23X - 28 = 0$ *sachant que la somme de deux de ses racines est égale à la troisième.*

Exercice 14 *Montrer que pour tout entier naturel* n, *il existe un unique polynôme* $P_n \in \mathbb{R}[X]$ *tel que* $P_n - P_n' = X^n$. *Exprimer les coefficients de* P_n *à l'aide de nombres factoriels.*

Exercice 15 *Déterminer la décomposition dans* $\mathbb{C}(X)$ *en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :*

1. $F(X) = \dfrac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$.
2. $F(X) = \dfrac{X - 2}{X(X-1)^2}$.
3. $F(X) = \dfrac{1}{X(X-1)^3}$.
4. $F(X) = \dfrac{2X}{X^2 + 1}$.
5. $F(X) = \dfrac{1}{X^2 + X + 1}$.
6. $F(X) = \dfrac{X}{(X^2 - 1)^3}$.

Exercice 16 *Déterminer la décomposition dans* $\mathbb{R}(X)$ *en éléments simples des fractions rationnelles suivantes :*

1. $F(X) = \dfrac{3X - 1}{X^2(X+1)^2}$.
2. $F(X) = \dfrac{2X^3 + X}{X^4 - 5X^2 + 4}$.
3. $F(X) = \dfrac{1}{X^4 + X^2 + 1}$.
4. $F(X) = \dfrac{1}{X^3 + 1}$.