CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés. Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité. Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré. Multiplicité d'une racine. Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale. Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée. Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme. Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B. L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM. Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Notation $A \vee B$. Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.
h) Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ est hors programme.
i) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.	La démonstration est hors programme. Toute technicité dans les exemples est exclue. Application au calcul de primitives, de dérivées k-ièmes.

Exercices traités en TD

L'ensemble des exercices ont été traités. .

Questions de cours.

Question 1:
Donner la définition de polynôme irréductible ainsi que l'ensemble des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.

Question 2:
Décrire ce qu'est la division euclidienne d'un polynôme $A \in \mathbb{K}[X]$ par $B \in \mathbb{K}[X]$.

Question 3:
Donner la définiton de polynôme interpolateur de Lagrange associé à une famille de $n+1$ points $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$.

Question 4:
Donner la définition de zéro et de pôle de multiplicité $p \in \mathbb{N}^\star$ d'une fraction rationnelle irréductible $F = \dfrac{P}{Q}$.