

# Chapitre 5 - Mécanique du point

Le domaine de la Physique qui s'intéresse aux mouvements et à leurs causes se nomme **mécanique**. On peut le diviser en trois champs : **la cinématique** qui fournit les outils permettant de décrire les mouvements, **la dynamique** qui permet d'interpréter les causes des mouvements à partir des actions mécaniques, plus précisément, des interactions, et enfin, **l'énergétique** qui les interprète comme des échanges d'énergie.

Au premier semestre, nous nous limiterons à l'étude du mouvement d'un objet théorique : le point. On nomme ce domaine particulier la **mécanique du point**.

Afin de pouvoir mener une étude mécanique, que ce soit en cinématique, dynamique ou énergétique, il nous faut utiliser les outils adaptés. Dans une première leçon nous allons formaliser ces outils et nous familiariser avec eux. Nous pourrions alors, dans une deuxième leçon, mener des études cinématiques de systèmes réels.

## Leçon I. Repérage dans l'espace et dans le temps

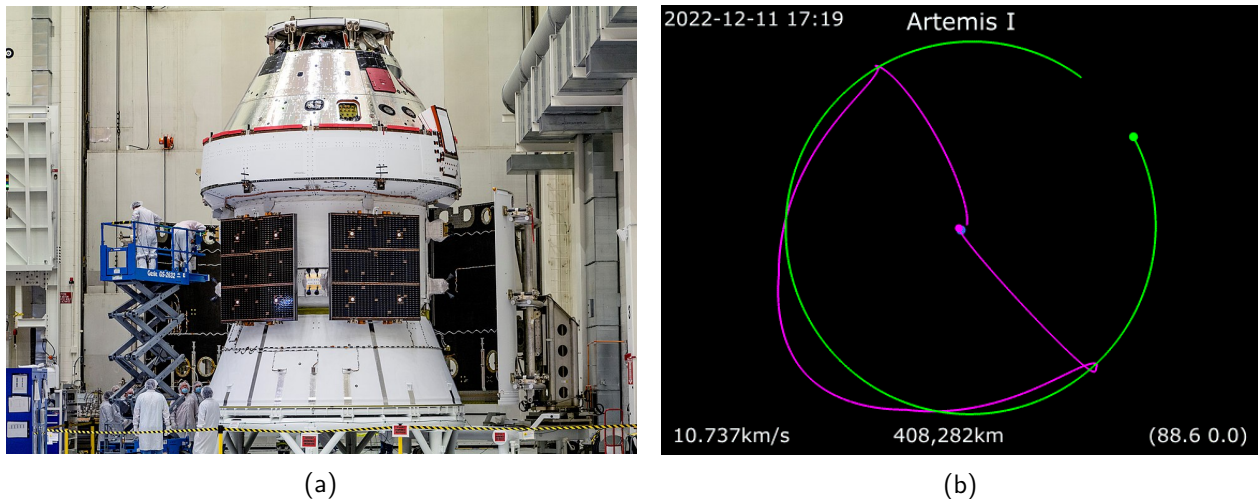
Dans cette leçon nous allons fixer le cadre de l'étude en mécanique. Après avoir défini la notion de point en physique, nous pourrions introduire les outils géométriques permettant de représenter les grandeurs cinématiques liées à un point : la position, la vitesse et l'accélération. Nous finirons en précisant les limites de la description de l'espace et du temps que nous avons choisie : la description classique.

### I.1. Notion de point en Physique

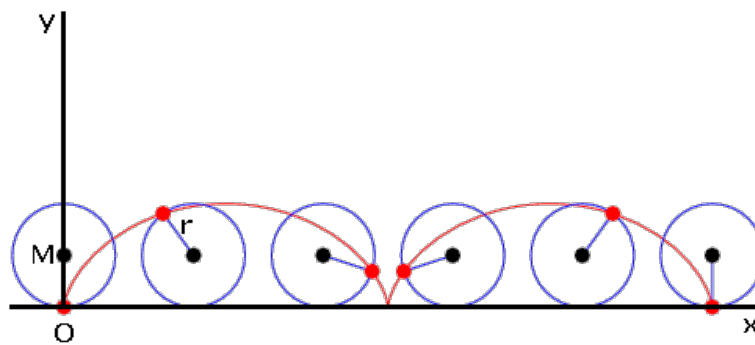
Aucun objet physique, même au niveau subatomique, ne correspond à un point : un objet a toujours une étendue spatiale. Le point est donc une nouvelle notion purement théorique. C'est un **modèle**, un objet qui appartient uniquement au monde des idées, mais qui permet de décrire la réalité sous certaines conditions.

#### Exemples

- Le lancement du vaisseau Orion de la mission Artemis I de la NASA a eu lieu le 16 novembre 2022. Une photo du vaisseau, d'une hauteur d'à peu près 7 m, et un schéma de sa trajectoire sont présentés Figure 5.1.  
Le système d'intérêt est le vaisseau Orion. On étudie sa trajectoire au cours de la mission Artemis I. Comparons la taille  $L$  du système et la distance  $d$  de la trajectoire étudiée :  $L/d \approx 10/4 \cdot 10^5 = 2,5 \cdot 10^{-5}$ . On constate que l'extension du vaisseau est négligeable devant la distance d'intérêt. L'infinité de points qui constituent le vaisseau a sensiblement la même trajectoire : on peut assimiler le vaisseau à un seul et même point.
- Si on étudie maintenant la trajectoire d'une roue de vélo pendant un tour de roue, on constate que les points qui constituent la roue ont des trajectoires très différentes : le point central de la roue a une trajectoire rectiligne alors que les points périphériques décrivent des courbes particulières appelées cycloïdes, comme on peut le voir Figure 5.11. On ne peut pas assimiler la roue à un seul et même point.



**Figure 5.1** – (a) Photographie du vaisseau Orion et (b) trajectoire de la mission Artemis I en violet (distance parcourue : 408 282 km)<sup>1</sup>.



**Figure 5.2** – Trajectoire de points constituant une roue de vélo pendant un tour de roue.

### ♥ Définitions

**La modélisation d'un solide comme un point** est possible lorsque tous les points du solides ont sensiblement la même trajectoire.

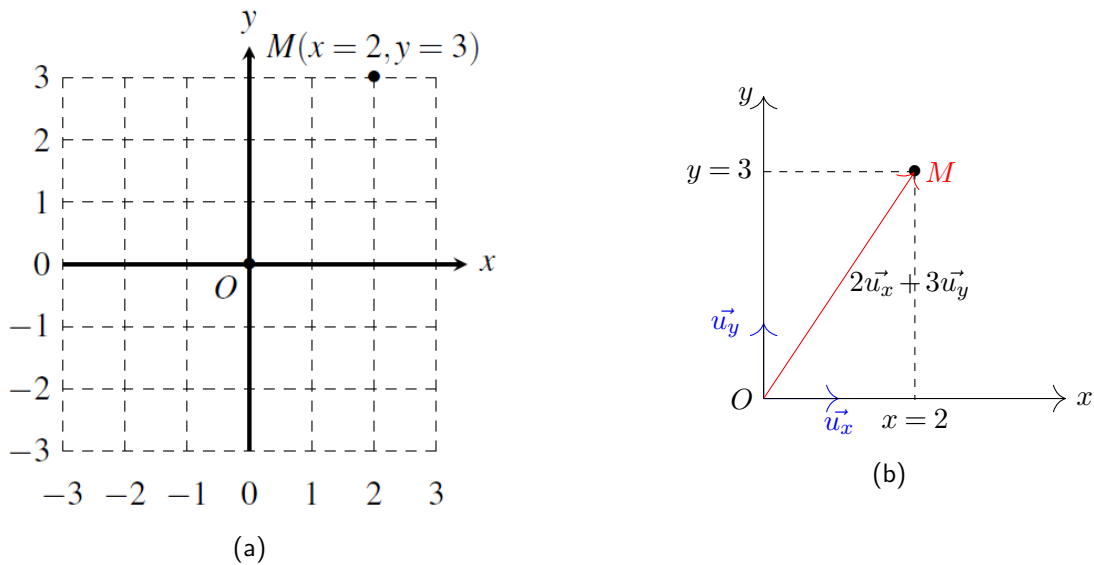
Pour repérer complètement un point dans l'espace il suffit de trois paramètres appelés **coordonnées**. Un point auquel on assigne une masse est appelé **point matériel**.

Une fois le système défini, s'il est assimilable à un point, on peut le repérer dans l'espace à l'aide de **systèmes de coordonnées**. Commençons par repérer un point dans un espace à deux dimensions.

## 1.2. Repérage d'un point dans un plan

Désignons un point par la lettre  $M$  (pour mobile). Il peut se déplacer uniquement dans un plan fixe  $\mathcal{P}$ . Nous pouvons le repérer et étudier son mouvement à l'aide de deux systèmes de coordonnées

1. Source : [wikipédia](https://fr.wikipedia.org/wiki/Artemis_I).



**Figure 5.3** – (a) Quadrillage du plan  $\mathcal{P}$  à l'aide d'une grille carrée et (b) repérage d'un point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  en coordonnées cartésiennes.

### 1.2.a Coordonnées cartésiennes

Le repérage cartésien revient à quadriller le plan à l'aide d'une grille carrée. Les points du plan sont repérés par leur coordonnées sur deux axes orthogonaux comme illustré Figure 5.3.

#### ■ Base de coordonnées : repérage d'un point du plan

On place un point  $O$  et deux vecteurs fixes unitaires  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$  tels que le doublet  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  forme une base orthonormée directe du plan  $\mathcal{P}$  (les vecteurs unitaires sont orthogonaux, même norme, et on passe du premier vecteur au second en effectuant une rotation dans le sens direct).

Étant dans un espace à deux dimensions, le point  $M$  est repéré par deux paramètres géométriques, ici  $x = 2$  et  $y = 3$ .

- 2 est la coordonnée du projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe orienté  $(O, \vec{u}_x)$ .
- 3 est la coordonnée du projeté orthogonal de  $M$  sur l'axe orienté  $(O, \vec{u}_y)$ .

#### ■ Base de projection : décomposition d'un vecteur du plan

Le doublet  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  forme **une base de projection fixe** du plan  $\mathcal{P} = (Oxy)$ . Tout vecteur quelconque  $\vec{v}$  s'écrit de manière unique sous la forme

$$\vec{v} = v_x \vec{u}_x + v_y \vec{u}_y$$

ou sous la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}.$$

On dit que  $v_x$  et  $v_y$  sont les composantes du vecteur  $\vec{v}$ . Elles correspondent aux **projection du vecteur  $\vec{v}$  sur les vecteurs de la base de projection  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$** .

## ♥ Définition

On peut écrire le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans cette base telle que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y$$

ou

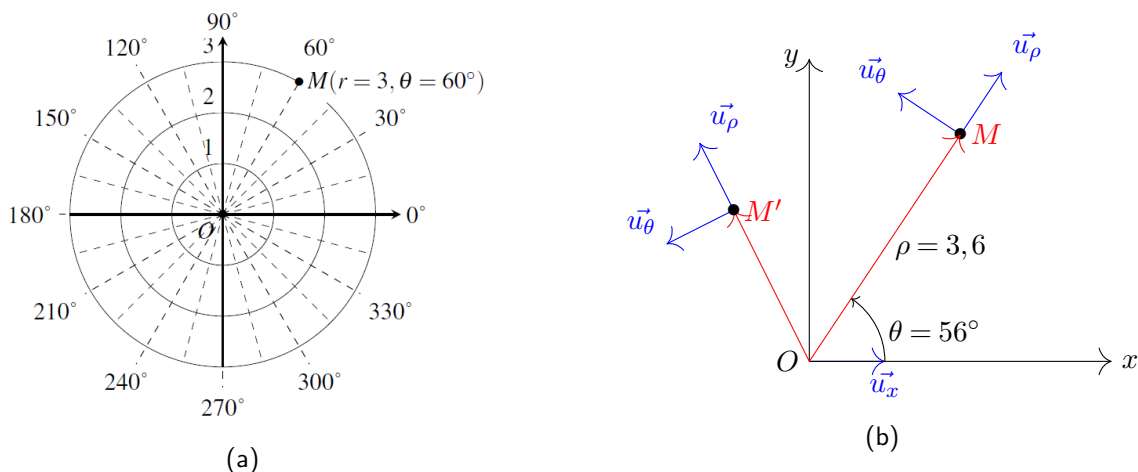
$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

## 👉 Nota bene

Les coordonnées cartésiennes d'un point  $M$  correspondent aux composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base cartésienne : **c'est un cas particulier !**

## 1.2.b Coordonnées polaires

Le repérage polaire revient à quadriller le plan  $\mathcal{P}$  à l'aide d'une grille centrée sur un point  $O$  du plan. Un point quelconque  $M$  est repéré par sa distance à  $O$  et un angle mesuré par rapport à un axe fixe comme illustré Figure 5.4.



**Figure 5.4** – (a) Quadrillage du plan  $\mathcal{P}$  à l'aide d'une grille centrée sur un point  $O$  et (b) repérage d'un point  $M$  du plan  $\mathcal{P}$  en coordonnées polaires.

## ■ Base de coordonnées : repérage d'un point du plan

En général, on utilise le point  $O$  et le vecteur  $\vec{u}_x$  des coordonnées cartésiennes pour définir la droite orientée  $(Ox)$  prise comme référence des angles. Le point  $M$  est repéré par ses coordonnées polaire  $\rho$  et  $\theta$ , avec

- $\theta$  est l'angle orienté que fait le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  avec le vecteur  $\vec{u}_x$
- $\rho$  est la distance  $OM$ , égale à la norme du vecteur  $\overrightarrow{OM}$ , soit  $\rho = \|\overrightarrow{OM}\|$ .

## ■ Base de projection : décomposition d'un vecteur du plan

On définit la **base de projection mobile** ou **base de projection locale**  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  orthonormée directe. On dit qu'elle est mobile car elle dépend de la position du point  $M$  : un autre point  $M'$  a une base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  orientée différemment.

La base de projection  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  est définie telle que

- $\vec{u}_\rho$  est un vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux de  $\overrightarrow{OM}$ , soit  $\vec{u}_\rho = \frac{\overrightarrow{OM}}{\|\overrightarrow{OM}\|}$
- $\vec{u}_\theta$  est obtenu par rotation de  $\vec{u}_\rho$  d'un angle de  $\pi/2$  dans le sens direct.

Le vecteur  $\vec{u}_\rho$  pointe toujours de  $O$  vers  $M$ .

Tout vecteur *vecv* du plan s'écrit de manière unique dans la base de projection mobile  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  **liée au point**  $M$  de telle manière que

$$\vec{v} = v_\rho \vec{u}_\rho + v_\theta \vec{u}_\theta$$

ou sous la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_\rho \\ v_\theta \end{pmatrix}.$$

### ♥ Définition

On peut écrire le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base de projection mobile  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta)$  **liée au point**  $M$  de telle manière que

$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

ou

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \end{pmatrix}.$$

### 👉 Nota bene

Les coordonnées polaires d'un point  $M$  ne correspondent pas aux composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base polaire.

## 1.3. Repérage d'un point dans l'espace

On généralise le repérage d'un point dans un plan au repérage d'un point dans l'espace.

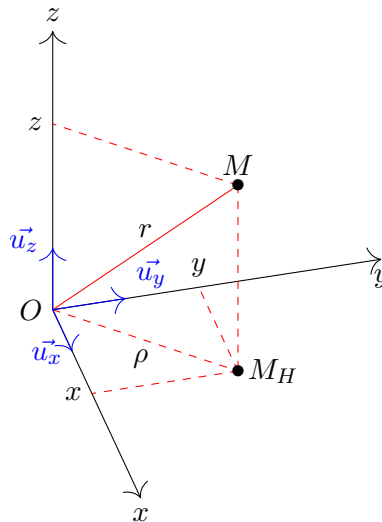
### 1.3.a Repérage cartésien

On ajoute un axe  $(Oz)$  orthogonal au plan  $(Oxy)$  pour obtenir **le système de coordonnées cartésiennes dans l'espace**. L'orientation de  $(Oz)$  est choisie pour que le triplet  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  soit une base orthonormée directe. Le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  s'écrit alors

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

ou

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$



**Figure 5.5** – Repérage d'un point  $M$  en coordonnées cartésiennes. Le projeté de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  noté  $M_H$  est repéré en coordonnées cartésiennes planes.  $M$  est à "une altitude"  $z$  de  $M_H$ .

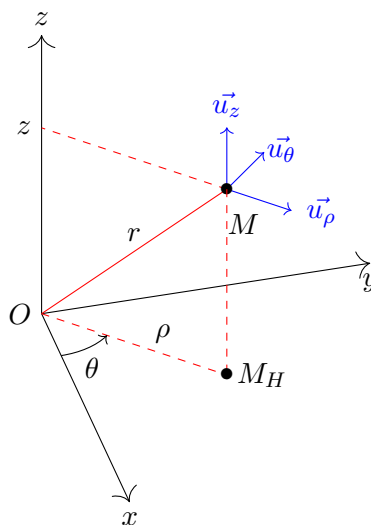
### 1.3.b Repérage cylindrique

De même, on ajoute un axe  $(Oz)$  orthogonal au plan  $(Oxy)$ . On obtient alors le **système de coordonnées cylindriques**. L'orientation de  $(Oz)$  est choisie pour que le triplet  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  soit une base orthonormée directe. Le vecteur position  $\vec{OM}$  s'écrit alors

$$\vec{OM} = \rho \vec{u}_\rho + z \vec{u}_z$$

ou

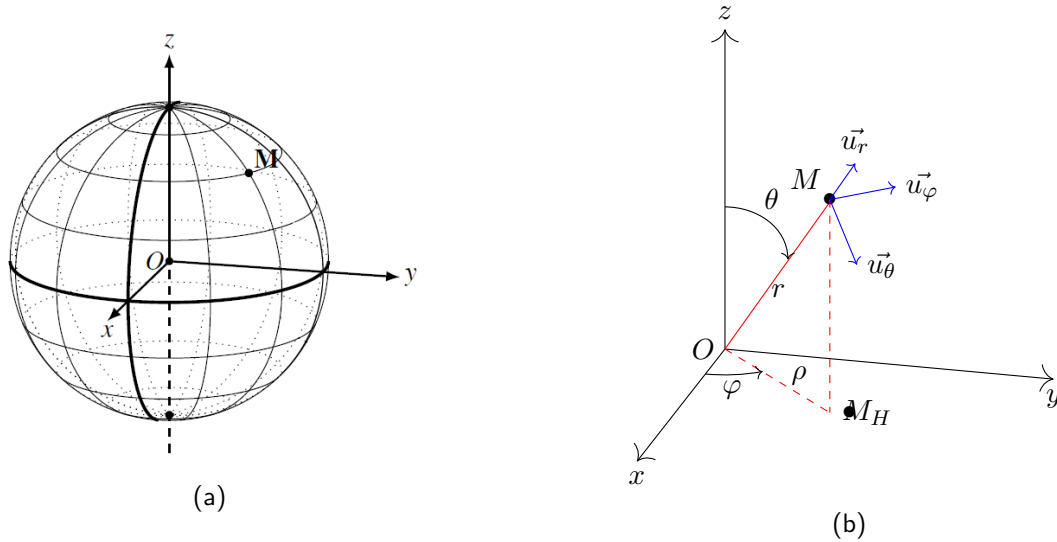
$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix}.$$



**Figure 5.6** – Repérage d'un point  $M$  en coordonnées cylindriques. Le projeté de  $M$  sur le plan  $(Oxy)$  noté  $M_H$  est repéré en coordonnées polaires.  $M$  est à "une altitude"  $z$  de  $M_H$ .

### 1.3.c Repérage sphérique

Le repérage sphérique d'un point  $M$  consiste à repérer  $M$  par la distance  $OM$ , puis sa position sur la sphère de rayon  $OM$  par deux angles  $\theta$  et  $\varphi$ .



**Figure 5.7** – (a) Quadrillage d'une sphère de rayon  $OM$  en coordonnées sphériques (b) repérage d'un point  $M$  en coordonnées sphériques.

#### ■ Base de coordonnées : repérage d'un point de l'espace

Le point  $M$  est repéré par ses coordonnées sphériques :  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$ .

- $r$  est la distance  $OM$ , égale à la norme du vecteur  $\vec{OM}$  telle que  $r = \|\vec{OM}\|$ .  $r$  est donc positive.
- L'angle orienté entre la droite  $(Oz)$  et le vecteur  $\vec{OM}$  est appelé **co-latitude** et est noté  $\theta$ .  $\theta$  varie sur l'intervalle  $[0; \pi]$ .
- L'angle orienté entre la droite  $(Ox)$  et le vecteur  $\vec{OM}_H$  est appelé **longitude** et est noté  $\varphi$ .  $\varphi$  varie sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$ .

#### ■ Base de projection : décomposition d'un vecteur de l'espace

On définit la base mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  orthonormée directe de la manière suivante :

- $\vec{u}_r$  est un vecteur unitaire dont la direction et le sens sont ceux de  $\vec{OM}$  tel que  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$ .
- $\vec{u}_\theta$  est un vecteur unitaire du plan passant par  $(Oz)$  et  $M$ , et dirigé dans le sens où  $\theta$  augmente.
- $\vec{u}_\varphi$  est un vecteur unitaire du plan parallèle à  $(Oxy)$  et passant par  $M$ .

Tout vecteur  $\vec{v}$  de l'espace s'écrit de manière unique dans la base de projection mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  **liée au point**  $M$  de telle manière que

$$\vec{v} = v_r \vec{u}_r + v_\theta \vec{u}_\theta + v_\varphi \vec{u}_\varphi$$

ou sous la forme

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_\varphi \end{pmatrix}.$$

## ♥ Définition

On peut écrire le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base de projection mobile  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  **liée au point**  $M$  de telle manière que

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

ou

$$\overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

## 👉 Nota bene

Les coordonnées sphériques d'un point  $M$  ne correspondent pas aux composantes du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  dans la base sphérique.

## 1.4. Référentiel

Avant d'étudier le mouvement d'un objet, il faut établir le référentiel le plus adapté à ce mouvement.

## ♥ Définition

**Un référentiel** est le cadre spatio-temporel choisi pour l'étude du mouvement d'un objet. Il est constitué d'un référentiel de temps et un référentiel d'espace.

## 1.4.a référentiel d'espace

Pour repérer la position d'un objet, il nous faut une référence de position, c'est-à-dire, établir un **référentiel de position**. Le référentiel une fois choisi, on doit choisir le repère ou le système de coordonnées adaptés pour l'étude du mouvement que l'on étudie.

Il existe deux manières d'établir un référentiel de position.

- On peut prendre un point fixe comme origine du référentiel et lui associé trois axes dirigés vers trois points fixes différents.  
Deux exemples de référentiels définis de cette manière sont à connaître.

Le premier exemple est le **référentiel héliocentrique**, ou référentiel copernicien. Il correspond à un repère dont l'origine se trouve au centre du Soleil et dont les trois axes sont orientés vers trois étoiles fixes.

Le deuxième exemple est le **référentiel géocentrique**. Il correspond à un repère dont l'origine se trouve au centre de la Terre et dont les trois axes sont orientés vers les mêmes étoiles que celles utilisées par le référentiel géocentrique. Le référentiel géocentrique est en **translation circulaire** autour du référentiel héliocentrique comme on peut le voir sur la Figure 5.8.



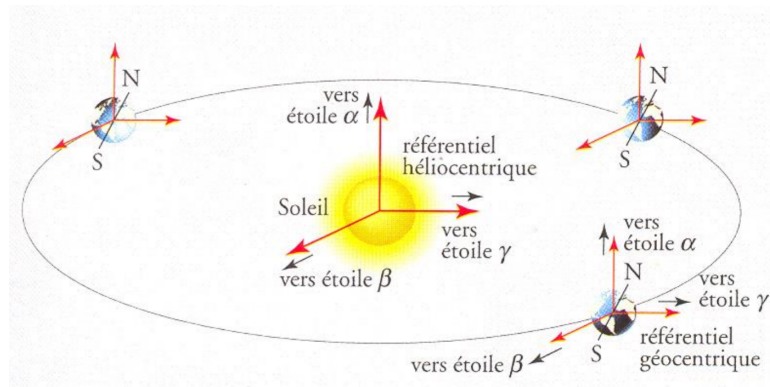


Figure 5.8 – Référentiels héliocentrique et géocentrique.

- On peut aussi utiliser un **solide de référence** pour construire notre référentiel. En prenant comme origine du référentiel, un point particulier de ce solide ainsi que des axes particuliers de ce solide, on obtient un référentiel d'espace.

Le référentiel à connaître qui est défini de cette manière est le **référentiel terrestre**. Dans ce cas, on prend comme origine un point au niveau de la surface de la Terre. Les axes associés sont choisis par l'utilisateur, en général on prend un axe orienté vers le haut par rapport à la surface, comme illustré sur la figure Figure 5.9.

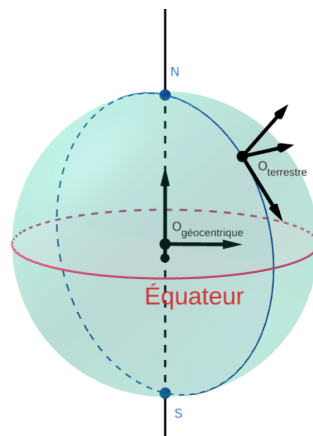


Figure 5.9 – Référentiel géocentrique et un référentiel terrestre.

#### 1.4.b Repère de temps

Afin de constater le mouvement d'un objet il faut comparer sa position entre deux instants différents. Il y a donc besoin d'un repère de temps afin de dater un événement.

Ce repère de temps est constitué d'une origine des temps : un instant particulier choisi comme l'instant zéro. Comme l'origine des temps peut être choisie comme on le désire, elle n'a pas de signification physique, tout comme l'origine de l'espace.

#### 1.4.c Relativité du mouvement

Le choix du référentiel est très important pour la description du mouvement qu'on veut étudier. Par exemple, un objet immobile dans le référentiel terrestre étudié pendant 1 seconde ne le sera pas dans le référentiel héliocentrique quand on l'étudiera pendant 1 journée.

Un autre exemple est la trajectoire de la mission Artemis I étudié plus tôt. On a vu plus tôt [la trajectoire étudiée dans le référentiel géocentrique](#). Si maintenant on change de référentiel : on choisit le référentiel qui

a pour origine le centre terrestre mais qui tourne maintenant avec la lune. On voit alors qu'[Artemis I n'a plus du tout la même trajectoire](#). On dit que **les mouvements sont relatifs** : ils dépendent du référentiel choisi. Néanmoins, si le mouvement est relatif, il dépend d'un point de vue ; les longueurs et les durées, elles ne varient pas d'un référentiel à un autre. La longueur du vaisseau Orion et le temps passé à bord restent les mêmes dans le référentiel géocentrique et dans le référentiel en rotation avec la Lune. On dit que **les durées et les longueurs ont un caractère absolu**.

Ce caractère absolu des durées et des longueurs est à la base de la mécanique classique ou mécanique newtonienne. Cependant, lorsqu'on atteint les...

#### 1.4.d Limites de la description classique

Le caractère absolu des durées et des longueurs n'est plus vrai. Dans le cadre de la théorie de la relativité restreinte introduite par Einstein, seule la vitesse de la lumière est absolue.

Prenons un exemple. La description classique de l'espace-temps suppose que les durées et les distances ne dépendent pas du référentiel d'étude : la longueur d'un vaisseau spatial ne varie pas, qu'il soit immobile ou mobile dans le référentiel géocentrique par exemple. De plus, la durée d'un film ne changera pas dans ce même vaisseau, qu'il soit immobile ou mobile.

La théorie de la relativité restreinte d'Einstein a prouvé le contraire : le caractère absolu des durées et des longueurs est faux. Les durées et les longueurs dépendent du référentiels d'étude, précisément, de leur vitesse vis-à-vis de la lumière.

Considérons que le vaisseau dont nous parlons se déplace à une vitesse  $v$  constante dans le référentiel géocentrique. Dans le référentiel  $\mathcal{R}_v$  du vaisseau, soit le référentiel dans lequel il est immobile, la longueur du vaisseau est  $L_v$ , et la durée d'un film est  $T_v$ .

Dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , la longueur du vaisseau en mouvement avec une vitesse  $v$  constante est contractée d'un facteur  $\gamma$  tel que

$$L_g = \frac{L_v}{\gamma}.$$

Le vaisseau a une longueur  $L_g$  plus courte dans le référentiel dans lequel il est en mouvement par rapport à sa longueur  $L_v$  dans son propre référentiel.

De plus, dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g$ , la durée du film projeté dans le vaisseau en mouvement avec une vitesse  $v$  constante est dilatée du facteur  $\gamma$  soit

$$T_g = \gamma T_v.$$

La durée du film  $T_g$  est plus importante dans le référentiel dans lequel le vaisseau est en mouvement, par rapport à la durée du film  $T_v$  dans le référentiel du vaisseau.

Ce facteur  $\gamma$  dépend de la vitesse du vaisseau dans le référentiel dans lequel il est en mouvement et de la vitesse  $c$  de la lumière, de telle manière que

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}.$$

 **Application 1**

- **Calculer** le facteur  $\gamma$  pour un vaisseau avec une vitesse  $v = 3,6 \cdot 10^8 \text{ km.h}^{-1}$ .
- **Déterminer** la différence entre la longueur du vaisseau dans son référentiel,  $L_v = 7 \text{ m}$ , et la longueur du vaisseau  $L_g$  dans le référentiel géocentrique, référentiel dans lequel il est en mouvement.
- **Déterminer** la différence entre la durée d'un film dans le référentiel du vaisseau,  $T_v = 2 \text{ h}$ , et la durée du film  $T_g$  dans le référentiel géocentrique, référentiel dans lequel il est en mouvement.
- **Reprendre** les trois derniers énoncés pour  $v = 532000 \text{ km.h}^{-1}$ , le record de vitesse atteint par un engin spatial (atteint par la sonde solaire Parker le 28 avril 2021 après son lancement en août 2018).
- **Conclure** quant aux limites de la description classique de l'espace-temps.

---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Espace et temps classiques.
- Notion de référentiel.
- Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques; vecteur position.
- Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.

### Savoir-faire

- **Citer** une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.

## Leçon II. Cinématique du point

Munis des outils présentés précédemment nous pouvons maintenant décrire le mouvement d'un point  $M$ . Les informations liées au mouvement de ce point sont portées en totalité par les vecteurs position, vitesse et accélération.

### II.1. Vecteurs position, déplacement, vitesse et accélération

#### II.1.a Vecteur position

Nous avons précédemment introduit le vecteur position dans les différents systèmes de coordonnées. Définissons le plus précisément.

#### ♥ Définition

**Le vecteur position** d'un point  $M$  est noté  $\overrightarrow{OM}$ , il permet de repérer un point par rapport à l'origine  $O$  d'un repère.

L'évolution temporelle du vecteur position  $\overrightarrow{OM}(t)$  est donnée par **les équations horaires du mouvement** : les équations qui décrivent la variation de la position du point  $M$  au cours du temps dues au mouvement.

Lors du mouvement, la courbe décrite par le point  $M$  est appelée la **trajectoire** du point  $M$ .

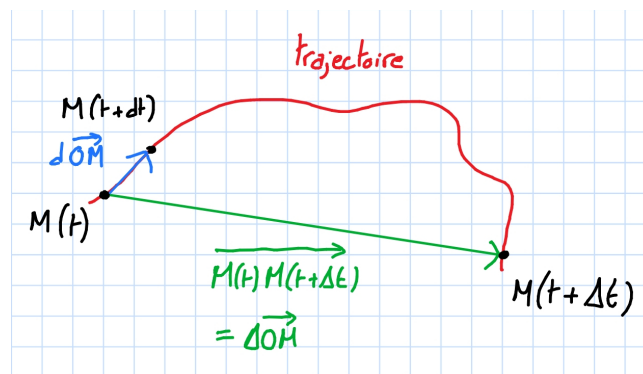
#### II.1.b Vecteurs déplacements

Étudions un point  $M$  en mouvement. À une date  $t$  il se trouve en  $M(t)$ , à une date  $t + \Delta t$ , il se trouve en  $M(t + \Delta t)$ .

On définit **le vecteur déplacement**  $\Delta\overrightarrow{OM}$  du point  $M$  entre la date  $t$  et la date  $t + \Delta t$  comme la différence entre les vecteurs positions  $\overrightarrow{OM}(t)$  et  $\overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$ , soit

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)O} + \overrightarrow{OM}(t + \Delta t)$$

$$\Delta\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t + \Delta t)}.$$



**Figure 5.10** – Vecteur déplacement  $\Delta\overrightarrow{OM}$  du point  $M$  entre la date  $t$  et  $\Delta t$ , et vecteur déplacement  $d\overrightarrow{OM}$  du point  $M$  entre les dates  $t$  et  $dt$ .

Lorsqu'on étudie la variation des vecteurs positions pour un petit intervalle de temps on ne note plus cette intervalle  $\Delta t$  mais  $dt$ . Cette durée infiniment petite est appelé **durée élémentaire**. On définit alors le **vecteur déplacement élémentaire** tel que

$$\Delta \overrightarrow{OM} \longrightarrow d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)}.$$

Comme la durée élémentaire est infiniment courte, on constate que le vecteur déplacement élémentaire est tangent à la trajectoire de  $M$ .

### II.1.c Vecteur vitesse

Le vecteur vitesse découle du vecteur déplacement élémentaire. En effet, la vitesse moyenne d'un point  $M$  entre deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  est définie comme le rapport du vecteur déplacement sur la durée de ce déplacement

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \overrightarrow{OM}}{\Delta t}.$$

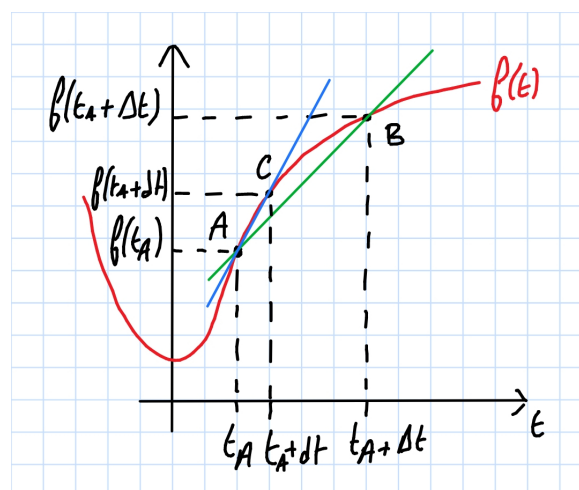
Lorsqu'on diminue la durée  $\Delta t$  sur laquelle on fait la moyenne de la vitesse jusqu'à la faire tendre vers une durée infinitésimale  $dt$ , on obtient alors la vitesse moyenne du point  $M$  pour une durée quasi nulle, on obtient ce qu'on peut appeler la vitesse instantanée du point  $M$  à l'instant  $t$  noté  $\vec{v}(t)$ .

#### ♥ Définitions

Le **vecteur vitesse instantanée** est défini tel que

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}.$$

On constate que le vecteur vitesse instantanée correspond à la dérivée par rapport au temps du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$ . La valeur de ce vecteur est exprimé en  $\text{m.s}^{-1}$ .



**Figure 5.11** – Taux de variation d'une fonction  $f(t)$  et lien avec la différentielle.

La dérivée temporelle d'une fonction correspond à la limite du taux de variation entre deux instants lorsque la durée entre ces instants tend vers zéro.

On dit que le vecteur déplacement élémentaire est **la différentielle du vecteur position** et il peut s'exprimer en fonction de la vitesse instantanée telle que

$$d\overrightarrow{OM} = \vec{v} dt.$$

On voit ainsi que la vitesse instantanée est colinéaire au déplacement élémentaire.

### II.1.d Vecteur accélération

On peut définir le vecteur accélération instantanée de la même manière qu'on a défini la vitesse instantanée.

#### ♥ Définition

Le vecteur accélération moyenne entre un instant  $t$  et  $t + \Delta t$  est défini par le rapport de la variation du vecteur vitesse à la durée  $\Delta t$ , soit

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

On peut faire tendre la durée  $\Delta t$  vers une durée infinitésimale afin d'introduire **le vecteur accélération instantanée** défini tel que

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}.$$

La valeur de ce vecteur est exprimé en  $\text{m.s}^{-2}$

## II.2. Utilisation des différents systèmes de coordonnées

### II.2.a Coordonnées cartésiennes

Considérons un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  lié au repère d'espace fixe  $(Oxy)$ . On utilise le système de coordonnées cartésiennes, soit la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ .

L'expression du vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  est, comme on l'a vu dans la leçon précédente, tel que

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Si le point  $M$  se déplace, le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  varie en fonction du temps, et donc les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  dépendent également du temps, soit

$$\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y + z(t)\vec{u}_z.$$

Considérons que le point  $M$  se déplace de telle manière que seule sa coordonnées  $x$  varie de  $x$  à  $x + dx$  : les coordonnées  $y$  et  $z$  sont fixées. On constate que le déplacement s'effectue selon le vecteur  $\vec{u}_x$ . Le vecteur déplacement élémentaire est donc

$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{u}_x.$$

Considérons maintenant un déplacement impliquant seulement une variation de la coordonnées  $y$ , avec  $x$  et  $z$  fixés. Le déplacement s'effectue selon le vecteur  $\vec{u}_y$ . Le vecteur déplacement élémentaire est donc

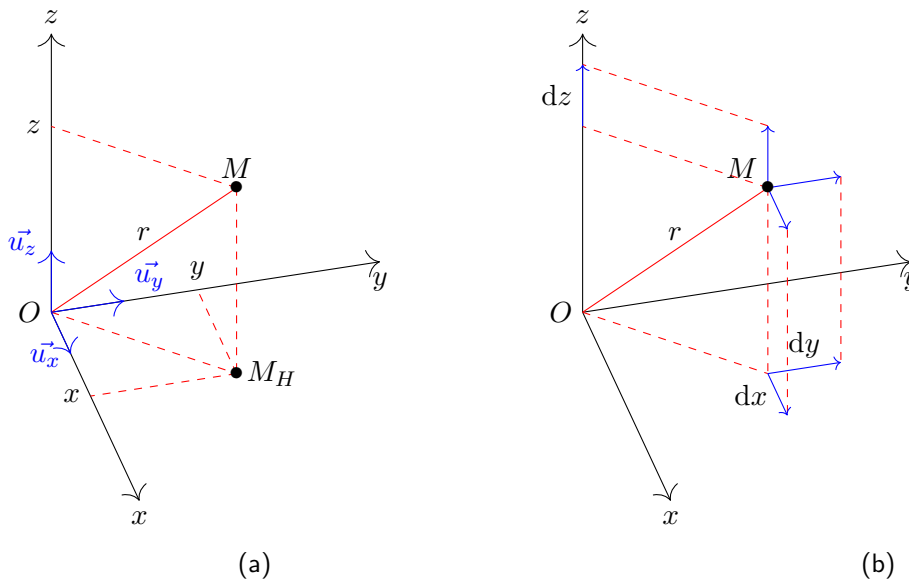
$$d\overrightarrow{OM} = dy\vec{u}_y.$$

Considérons enfin un déplacement impliquant seulement une variation de la coordonnées  $z$ , avec  $x$  et  $y$  fixés. Le déplacement s'effectue selon le vecteur  $\vec{u}_z$ . Le vecteur déplacement élémentaire est donc

$$d\overrightarrow{OM} = dz\vec{u}_z.$$

Comme les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$  sont indépendantes et la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est orthonormée, on trouve le déplacement élémentaire dans le cas général où  $x$ ,  $y$  et  $z$  varient simultanément en sommant les trois dernières expressions

$$d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z.$$



**Figure 5.12** – (a) Système de coordonnées cartésiennes avec sa base de projection  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  et (b) les déplacements élémentaires selon cette base.

À partir du vecteur déplacement, on peut obtenir le vecteur vitesse instantanée. Par définition

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x + \frac{dy}{dt}\vec{u}_y + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z.$$

On ne dérive pas les vecteurs unitaires  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$  ou  $\vec{u}_z$  car la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  du repère cartésien est une base fixe, elle ne varie pas dans le temps.

On peut également noter les dérivées temporelles telles que

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} \quad \frac{dy}{dt} \equiv \dot{y} \quad \frac{dz}{dt} \equiv \dot{z}.$$

Ainsi

$$\vec{v}(t) = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z.$$

Le vecteur accélération instantanée est donc

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{u}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{u}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{u}_x + \ddot{y}\vec{u}_y + \ddot{z}\vec{u}_z.$$



### ♥ Définition

Les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération instantanées en coordonnées cartésiennes sur la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  sont

$$\vec{OM} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad d\vec{OM} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

#### II.2.b Coordonnées cylindriques

Considérons un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  lié au repère d'espace fixe  $(Oxy)$ . On utilise le système de coordonnées cylindriques, soit la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ . **Cette base est mobile** dans  $\mathcal{R}$ .

On a vu auparavant que le vecteur position s'exprimait dans cette base

$$\vec{OM} = \rho(t)\vec{u}_\rho(t) + z(t)\vec{u}_z.$$

Comme le vecteur unitaire  $\vec{u}_\rho(t)$  suit le point  $M$  dans son déplacement, il varie bien au cours du temps!

Considérons que le point  $M$  se déplace de telle manière que seule sa coordonnée  $\rho$  varie de  $\rho$  à  $\rho + d\rho$  : les coordonnées  $\theta$  et  $z$  sont fixées. On constate que le déplacement s'effectue selon le vecteur  $\vec{u}_\rho$ . Le vecteur déplacement élémentaire est donc

$$d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho.$$

Considérons que le point  $M$  se déplace de telle manière que seule sa coordonnée  $\theta$  varie de  $\theta$  à  $\theta + d\theta$  : les coordonnées  $\rho$  et  $z$  sont fixées. On constate que le déplacement s'effectue selon le vecteur  $\vec{u}_\theta$ . En étudiant le triangle rectangle de côté  $\rho$  et d'angle  $d\theta$  il vient que la valeur du déplacement élémentaire  $dOM$  selon  $\vec{u}_\theta$  est tel

$$\tan(d\theta) = \frac{dOM}{\rho}$$

soit

$$dOM = \rho \tan(d\theta)$$

or pour les angles très petits devant 1, le développement limité de  $\tan x$  est  $\tan x \approx x$ , donc

$$dOM = \rho d\theta.$$

Le vecteur déplacement élémentaire est donc

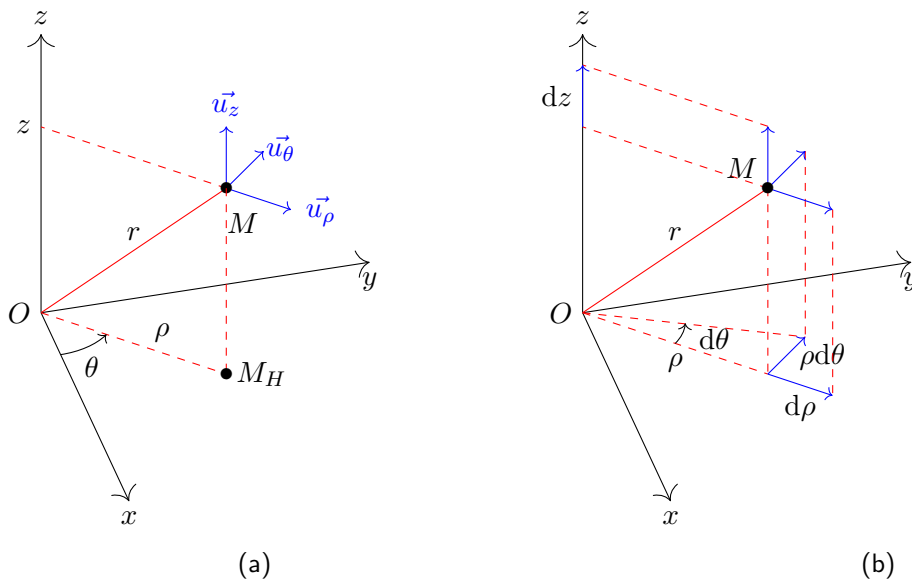
$$d\vec{OM} = \rho d\theta \vec{u}_\theta.$$

Dans le cas d'un déplacement uniquement selon  $\vec{u}_z$  le déplacement élémentaire est le même que celui dans la base cartésienne, soit

$$d\vec{OM} = dz\vec{u}_z.$$

Comme les coordonnées  $\rho$ ,  $\theta$  et  $z$  sont indépendantes et la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  est orthonormée, on trouve le déplacement élémentaire dans le cas général où  $\rho$ ,  $\theta$  et  $z$  varient simultanément en sommant les trois dernières expressions

$$d\vec{OM} = d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z.$$



**Figure 5.13** – (a) Système de coordonnées cartésiennes avec sa base de projection  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  et (b) les déplacements élémentaires selon cette base.

À partir du vecteur déplacement, on peut obtenir le vecteur vitesse instantanée. Par définition

$$\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\rho\vec{u}_\rho + \rho d\theta\vec{u}_\theta + dz\vec{u}_z}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z.$$

On peut aussi obtenir le vecteur vitesse instantanée dans cette base en dérivant le vecteur position  $\overrightarrow{OM}$  directement. Soit

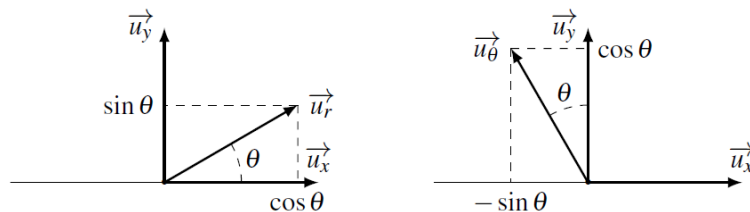
$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{u}_\rho + z\vec{u}_z)$$

$$\vec{v} = \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z.$$

Il faut également dériver le vecteur élémentaire  $\vec{u}_\rho$  car celui varie selon le mouvement, donc il varie dans le temps.

Afin de déterminer la dérivée temporel de  $\vec{u}_\rho$  étudions la variation de ce vecteur unitaire ainsi que celle de l'autre vecteur unitaire dépendant du temps  $\vec{u}_\theta$ . Pour ce faire exprimons ces vecteurs dans la base fixe  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ , soit

$$\vec{u}_\rho = \cos\theta\vec{u}_x + \sin\theta\vec{u}_y \quad \vec{u}_\theta = -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y.$$



**Figure 5.14** – Projection des vecteur unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  dans la base  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ .

Si on dérive ces deux expressions par rapport à  $\theta$ , il vient que

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} &= -\sin\theta\vec{u}_x + \cos\theta\vec{u}_y & \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= -\cos\theta\vec{u}_x - \sin\theta\vec{u}_y \\ \frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} &= \vec{u}_\theta & \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} &= -\vec{u}_\rho\end{aligned}$$

soit

$$d\vec{u}_\rho = d\theta\vec{u}_\theta \quad d\vec{u}_\theta = -d\theta\vec{u}_\rho.$$

On a obtenu les différentielles des vecteurs  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$ . En divisant ces différentiels par un élément infinitésimal de durée  $dt$ , on obtient les dérivées temporelles des vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$ .

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\rho = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho.$$

On peut alors exprimer le vecteur vitesse tel que

$$\begin{aligned}\vec{v} &= \frac{d\rho}{dt}\vec{u}_\rho + \rho\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{u}_z \\ \vec{v} &= \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z.\end{aligned}$$

On retrouve bien le résultat précédent.

On va se servir de l'étude précédente pour déterminer le vecteur accélération instantanée

$$\begin{aligned}\vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\dot{\rho}}{dt}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\frac{d\dot{\theta}}{dt}\vec{u}_\theta + \rho\dot{\theta}\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} + \frac{d\dot{z}}{dt}\vec{u}_z \\ \vec{a} &= \ddot{\rho}\vec{u}_\rho + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{\rho}\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \rho\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - \rho\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_\rho + \ddot{z}\vec{u}_z \\ \vec{a} &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2)\vec{u}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta})\vec{u}_\theta + \ddot{z}\vec{u}_z.\end{aligned}$$

#### ♥ Définition

Les vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération instantanées en coordonnées cylindriques sur la base  $(\vec{u}_\rho, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  sont

$$\overline{OM} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \quad d\overline{OM} = \begin{pmatrix} d\rho \\ \rho d\theta \\ dz \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{\rho} \\ \rho\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2 \\ 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}.$$

#### ♥ Définition

Les dérivées temporelles des vecteurs unitaires  $\vec{u}_\rho$  et  $\vec{u}_\theta$  sont

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_\rho.$$

### II.2.c Coordonnées sphériques

Considérons un point  $M$  dans un référentiel  $\mathcal{R}$  lié au repère d'espace fixe  $(Oxy)$ . On utilise le système de coordonnées sphériques, soit la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$ . **Cette base est mobile** dans  $\mathcal{R}$ .

On a vu auparavant que le vecteur position s'exprimait dans cette base

$$\overrightarrow{OM} = r(t)\vec{u}_r(t).$$

Comme le vecteur unitaire  $\vec{u}_r(t)$  suit le point  $M$  dans son déplacement, il varie bien au cours du temps !

Considérons que le point  $M$  se déplace de telle manière que seule sa coordonnée  $r$  varie de  $r$  à  $r + dr$  : les coordonnées  $\theta$  et  $\varphi$  sont fixées. On constate que le déplacement s'effectue selon le vecteur  $\vec{u}_r$ . Le vecteur déplacement élémentaire est donc

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r.$$

Considérons ensuite que le point  $M$  se déplace de telle manière que seule sa coordonnée  $\theta$  varie de  $\theta$  à  $\theta + d\theta$  : les coordonnées  $r$  et  $\varphi$  sont fixées. En étudiant le triangle rectangle de côté  $r$  et d'angle  $d\theta$  il vient que la valeur du déplacement élémentaire  $dOM$  selon  $\vec{u}_\theta$  est tel

$$\tan(d\theta) = \frac{dOM}{r}$$

soit

$$dOM = r \tan(d\theta)$$

or pour les angles très petits devant 1, le développement limité de  $\tan x$  est  $\tan x \approx x$ , donc

$$dOM = r d\theta.$$

Le vecteur déplacement élémentaire est donc

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta.$$

Considérons enfin que le point  $M$  se déplace de telle manière que seule sa coordonnée  $\varphi$  varie de  $\varphi$  à  $\varphi + d\varphi$  : les coordonnées  $r$  et  $\theta$  sont fixées. En étudiant le triangle rectangle de côté  $OM_H$  et d'angle  $d\varphi$  il vient que la valeur du déplacement élémentaire  $dOM$  selon  $\vec{u}_\varphi$  est tel

$$\tan(d\varphi) = \frac{dOM}{OM_H}$$

soit

$$dOM = OM_H \tan(d\varphi)$$

or pour les angles très petits devant 1, le développement limité de  $\tan x$  est  $\tan x \approx x$ , donc

$$dOM = OM_H d\varphi$$

or  $OM_H$  est le projeté de la longueur  $r$  sur le plan  $(Oxy)$  tel que dans le triangle rectangle  $OMM_H$

$$\sin \theta = \frac{OM_H}{r}$$

soit

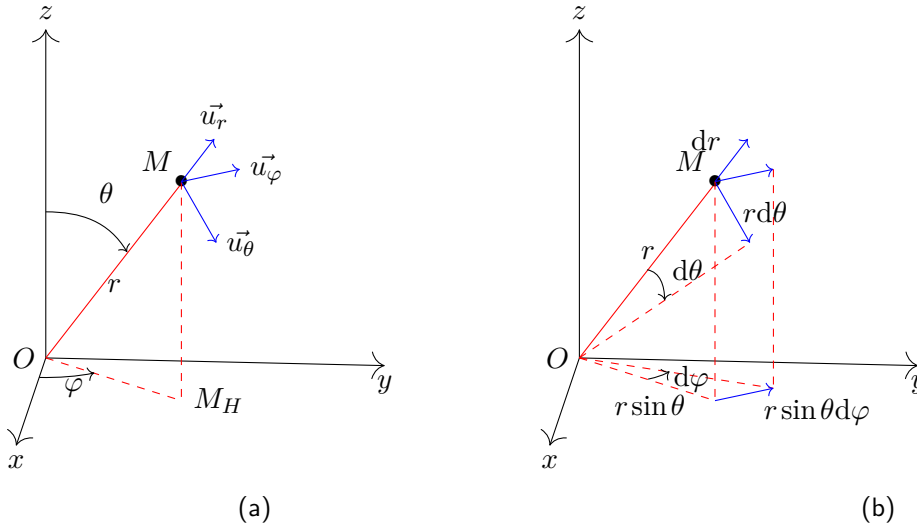
$$OM_H = r \sin \theta.$$

Le vecteur déplacement élémentaire est donc

$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{u}_r + r \sin \theta d\varphi \vec{u}_\varphi + r d\theta \vec{u}_\theta.$$

Comme les coordonnées  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  sont indépendantes et la base  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  est orthonormée, on trouve le déplacement élémentaire dans le cas général où  $r$ ,  $\theta$  et  $\varphi$  varient simultanément en sommant les trois dernières expressions

$$d\vec{OM} = dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi.$$



**Figure 5.15** – (a) Système de coordonnées sphériques avec sa base de projection  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$  et (b) les déplacements élémentaires selon cette base.

À partir du vecteur déplacement, on peut obtenir le vecteur vitesse instantanée. Par définition

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr\vec{u}_r + r d\theta\vec{u}_\theta + r \sin\theta d\varphi\vec{u}_\varphi}{dt} \\ \vec{v}(t) &= \frac{dr}{dt}\vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt}\vec{u}_\theta + r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}_\varphi = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r \sin\theta \dot{\varphi}\vec{u}_\varphi.\end{aligned}$$

### II.3. Étude de mouvements particuliers

Nous allons étudier des mouvements particuliers et obtenir l'expression de leurs vecteurs position, vitesse et accélération à partir d'un choix judicieux du repère.

#### II.3.a Mouvement rectiligne uniforme

Considérons un point  $M$  d'un train se déplaçant dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$ . Il suit un mouvement rectiligne uniforme de vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  constant dans  $\mathcal{R}$ .

**Quel repère choisir ?** La trajectoire du point  $M$  étant rectiligne uniforme, la vitesse du point ne variera ni en valeur, ni en direction, ni en sens. On peut se contenter d'une seule dimension pour décrire le mouvement. On choisit l'axe  $(Ox)$  et le vecteur  $\vec{u}_x$  aligné et dans le sens de  $\vec{v}_0$ . On projette tous les autres vecteurs du problèmes sur  $\vec{u}_x$ .

Le repère une fois choisi, on peut établir l'**équation horaire du mouvement du point**  $M$ . Pour l'établir nous utilisons les expressions générales des vecteurs position, vitesse et accélération d'un point dans un repère cartésien, soit

$$\vec{OM} = x\vec{u}_x \quad \vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x \quad \vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x.$$

Comme tous les vecteurs du point  $M$  ont une seule composante selon le vecteur  $\vec{u}_x$ , et que ce vecteur est fixe, on peut se limiter à étudier les composantes des vecteurs position, vitesse et accélération.

Comme le mouvement de  $M$  est uniforme, c'est-à-dire que la valeur de sa vitesse est constante dans le temps, soit  $\dot{x} = v_0 = \text{cst}$ , la dérivée temporelle de la vitesse, soit l'accélération, est nulle :

$$\ddot{x} = 0.$$

On peut alors obtenir l'expression de la composante  $x$  du vecteur position du point  $M$  en fonction du temps en intégrant la composante  $\dot{x}$  du vecteur vitesse du point  $M$  en fonction du temps entre l'instant initial  $t_0$  et l'instant qui nous intéresse  $t$ , soit

$$x(t) = \int \dot{x} dt = \int v_0 dt = v_0 t + \text{cst}.$$

La constante d'intégration, ici, correspond à la position initiale  $x_0$  du point  $M$  à l'instant  $t = 0$  origine des temps du référentiel tel que

$$\begin{aligned} x_0 &\equiv x(t=0) = v_0 \times 0 + \text{cst} \\ x_0 &= \text{cst}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

Cette dernière équation est l'équation horaire du mouvement

$$x(t) = v_0 t + x_0.$$

### 11.3.b Mouvement à vecteur accélération constant

Étudions à présent un mouvement à vecteur accélération constante. Par exemple, sur Terre, tout corps lancé dans le vide suit un mouvement à vecteur accélération constante, il s'agit de l'accélération de pesanteur de la Terre  $\vec{g}$  constante. Ainsi

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

Définissons l'objet d'étude et le référentiel dans lequel on l'étudie. Soit un point  $M$  dont le vecteur accélération est constant et égal à  $\vec{g}$  qu'on étudie dans un référentiel terrestre. Par intégration par rapport au temps du vecteur accélération on obtient le vecteur vitesse  $\vec{v}$  tel que

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \int \vec{g} dt \\ \vec{v} &= \vec{g} t + \text{cst}. \end{aligned}$$

De la même manière qu'on l'a fait pour la position, on peut identifier la constante d'intégration à la vitesse initiale  $\vec{v}_0$  du point  $M$  à l'instant  $t = 0$ . Ainsi

$$\vec{v} = \vec{g} t + \vec{v}_0.$$

On intègre une nouvelle fois pour obtenir le vecteur position  $\vec{OM}$  à partir de l'expression de la vitesse du point  $M$ , soit

$$\vec{OM} = \int \vec{g} t + \vec{v}_0 dt$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{v}_0 t + \text{cst.}$$

La constante d'intégration correspond ici au vecteur position initial  $\overrightarrow{OM}_0$  à l'instant  $t = 0$ . Ainsi

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \vec{g} t^2 - \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM}_0.$$

### Application

Une des première application de la mécanique de Newton au XVIII<sup>ème</sup> est la balistique, l'étude du mouvement des projectiles. Étudions le mouvement d'un boulet de canon assimilé à un point  $M$  dans le référentiel terrestre tiré avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  faisant un angle  $\alpha$  avec l'horizontal. On considère que la position initiale  $M_0$  du boulet est confondu avec l'origine du repère  $O$ , ainsi  $\overrightarrow{OM}_0 = \overrightarrow{OO} = \vec{0}$ .

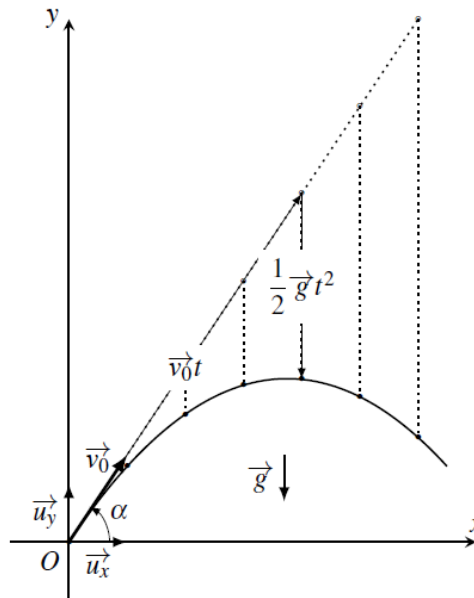


Figure 5.16 – Mouvement d'un boulet de canon.

Le mouvement est compris dans un plan. On peut projeter les différents vecteurs qui nous sont donnés sur la base cartésienne à deux dimensions  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  : l'accélération de pesanteur  $\vec{g}$  et la vitesse initiale du point  $M$   $\vec{v}_0$ . Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{g} &= -g \vec{u}_y \\ \vec{v}_0 &= v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y. \end{aligned}$$

On peut ainsi exprimer les différents vecteurs caractérisant le mouvement du point  $M$

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{pmatrix}.$$

Les équations horaires du mouvements sont donc

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin \alpha t. \end{cases}$$

On peut éliminer la variable temporelle  $t$  en exprimant cette dernière en fonction de la position en  $x$ , et l'utiliser dans l'expression de la position en  $y$ , soit

$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2}g \left( \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$y = -\frac{1}{2} \frac{g^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha.$$

L'équation obtenue est celle d'une **parabole** :  $y = ax^2 + bx + c$ , on dit que la trajectoire est parabolique.

En connaissant la valeur de l'accélération de pesanteur  $g$ , la vitesse initiale  $v_0$  du boulet de canon et l'inclinaison  $\alpha$  du canon, on peut savoir qu'elle est l'altitude  $y$  du boulet pour n'importe quelle position  $x$  : on peut enfin savoir si le boulet va atteindre la cible.

### II.3.c Mouvement circulaire uniforme et non uniforme

#### Mouvement circulaire uniforme

On considère maintenant un point  $M$  en mouvement circulaire et uniforme dans un référentiel. Par exemple, le centre de la Terre dans le référentiel héliocentrique. Le mouvement est réalisé sur un cercle  $\mathcal{C}$  de centre  $O$  et de rayon  $R$  parcouru avec une vitesse constante en valeur  $v_0$ .

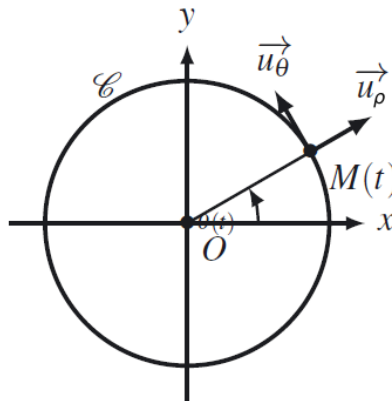


Figure 5.17 – Mouvement circulaire.

Comme le mouvement est plan et circulaire, on utilise le repérage polaire en choisissant comme origine le centre  $O$  du cercle  $\mathcal{C}$ . L'angle  $\theta$  est défini par rapport à un axe ( $Ox$ ) passant par un diamètre du cercle.

Comme le mouvement du point  $M$  se fait seulement le long du cercle  $\mathcal{C}$ , sa coordonnée  $\rho$  est toujours égale à  $R$  le rayon du cercle et sa composante selon le vecteur unitaire  $\vec{u}_\rho$  est tel que

$$\vec{OM} = R\vec{u}_\rho.$$

On obtient le vecteur vitesse  $\vec{v}$  en dérivant le vecteur position, soit

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt} (R\vec{u}_\rho)$$



comme  $R$  est constant

$$\vec{v} = R \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

$\dot{\theta}$  est appelé la vitesse angulaire du point  $M$ . Dans le cas d'un mouvement uniforme, la valeur de la vitesse est constante et est telle que

$$R\dot{\theta} = v_0 = \text{cst}$$

soit

$$\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} = \text{cst}$$

on voit que la vitesse angulaire est aussi constante. En intégrant la vitesse angulaire, on obtient **l'équation horaire du mouvement** à partir de la variation de l'angle  $\theta(t)$  en fonction du temps

$$\theta(t) = \int \dot{\theta} dt$$

comme  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$  il vient que

$$\theta(t) = \frac{v_0}{R}t + \text{cst}$$

avec cst une constante d'intégration qui correspond à la valeur initiale de l'angle  $\theta$  pour le point  $M$ , soit  $\theta(t=0) \equiv \theta_0$

$$\theta_0 = \frac{v_0}{R} \times 0 + \text{cst}$$

$$\theta_0 = \text{cst}.$$

Ainsi

$$\theta(t) = \frac{v_0}{R}t + \theta_0.$$

On note aussi la vitesse angulaire  $\dot{\theta} = \frac{v_0}{R} = \omega_0$ , ainsi

$$\theta(t) = \omega_0 t + \theta_0$$

$$\vec{v} = \omega_0 R \vec{u}_\theta.$$

On voit que la vitesse est orienté dans le sens du vecteur  $\vec{u}_\theta$ , on dit que la vitesse est **orthoradiale** : dirigée perpendiculairement au rayon. Le signe de  $\omega_0$  ou de  $v_0$  donne le sens de rotation du point  $M$  : direct si positif, et indirect si négatif.

On obtient le vecteur accélération en dérivant le vecteur vitesse, soit

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt} (\omega_0 R \vec{u}_\theta)$$

$$\vec{a} = \omega_0 R \frac{d\vec{u}_\theta}{dt}$$

$$\vec{a} = -\omega_0 R \dot{\theta} \vec{u}_\rho$$

$$\vec{a} = -\omega_0^2 R \vec{u}_\rho = -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_\rho.$$

On constate que l'accélération est aussi de valeur constante, colinéaire au rayon du cercle et toujours orienté vers le centre du cercle, il est orienté selon  $-\vec{u}_\rho$  : on qualifie ce vecteur de **centripète**, par opposition aux vecteurs **centrifuges** orientés selon  $+\vec{u}_\rho$ .

### Mouvement circulaire non uniforme

Dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme le vecteur position reste inchangé : le point  $M$  est toujours à une distance  $R$  du centre du repère

$$\overrightarrow{OM} = R \vec{u}_\rho$$

ainsi sa dérivée temporelle, et donc la vitesse du point  $M$  reste aussi inchangée

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

L'accélération s'obtient en dérivant cette dernière expression. Dans le cas d'un mouvement circulaire non uniforme la vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  n'est plus constante, ainsi

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d}{dt} (R \dot{\theta} \vec{u}_\theta) \\ \vec{a} &= R \frac{d\dot{\theta}}{dt} \vec{u}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} \\ \vec{a} &= R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho \end{aligned}$$

avec  $\ddot{\theta}$  l'accélération angulaire, qui est nulle dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme.

On peut identifier le terme  $R \dot{\theta}$  à la valeur du vecteur vitesse  $v$  soit

$$\begin{aligned} v &= R \dot{\theta} \\ v^2 &= R^2 \dot{\theta}^2 \\ R \dot{\theta}^2 &= \frac{v^2}{R} \end{aligned}$$

de plus

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= \frac{dR \dot{\theta}}{dt} = R \frac{d\dot{\theta}}{dt} \\ \frac{dv}{dt} &= R \ddot{\theta} \end{aligned}$$

ainsi on peut exprimer le vecteur accélération du mouvement circulaire non uniforme d'un point  $M$  tel que

$$\vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{u}_\rho + R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R} \vec{u}_\rho + \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta.$$

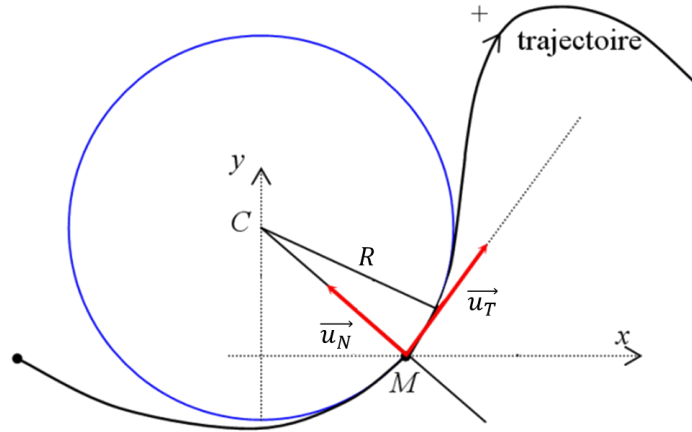
On voit qu'il y a deux composantes à l'accélération :

une composante radiale qui est centripète, qui vient de la forme courbe de la trajectoire

une composante orthoradiale, parallèle à la vitesse, qui vient de la variation de la valeur de la vitesse.

## II.4. Repère de Frenet

On peut généraliser l'étude que nous avons mener dans le cas d'un mouvement circulaire à tout mouvement dans un plan, par exemple un mouvement plan selon une courbe.



**Figure 5.18** – Point  $M$  d'une trajectoire plane repéré à l'aide d'un repère de Frenet et son cercle osculateur.

Dans ce cas, on utilise un nouveau repère. Pour l'obtenir on définit en point  $M$  quelconque de la trajectoire courbe, un vecteur unitaire  $\vec{u}_T$  orienté dans le sens de la trajectoire au point  $M$  ( $T$  pour tangent), et un vecteur unitaire normal à ce dernier noté  $\vec{u}_N$  dirigé vers l'intérieur de la courbure de la trajectoire au point  $M$ . On obtient alors un repère mobile du plan (il varie selon le point  $M$  considéré) appelé **repère de Frenet**, qui a pour base mobile le doublet de vecteurs  $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$ .

Ce repère nous permet, au point  $M$  étudié, d'assimiler le mouvement au voisinage de ce point comme un mouvement circulaire quelconque sur un cercle tangent à la trajectoire, de centre  $C$  et de rayon  $R$ , appelé **cercle osculateur**. Pour chaque point  $M$  on définit un cercle osculateur différent, de centre  $C$  et de rayon  $R$  différents pour chaque point  $M$ . Ainsi, on peut exploiter les conclusions obtenues lors de l'étude d'un mouvement circulaire non uniforme, en faisant l'analogie entre les vecteurs de la base de Frenet et les vecteurs de la base polaire. On admet ainsi les expressions de la vitesse et l'accélération d'un point  $M$  dans la base locale de Frenet

$$\begin{aligned}\vec{v} &= v\vec{u}_T \\ \vec{a} &= \frac{v^2}{R}\vec{u}_N + \frac{dv}{dt}\vec{u}_T\end{aligned}$$

avec  $v$  la valeur de la vitesse au point  $M$  tangent à la trajectoire et  $R$  le rayon du cercle osculateur au point  $M$ . On appelle ce rayon le **rayon de courbure**  $R$ , comme on l'a vu lors de l'étude des lentilles dans la leçon ??.

On peut introduire une nouvelle grandeur liée au rayon de courbure  $R$  d'un cercle osculateur, appelé **courbure** de ce cercle, notée  $\gamma$  et définie telle que

$$\gamma = \frac{1}{R}.$$

### Mouvement rectiligne

Pour une trajectoire rectiligne, le rayon  $R$  est infini, donc la courbure est nulle  $\gamma = 0$  : ce qui définit bien une trajectoire rectiligne.

Dans ce cas la composante normale de l'accélération, celle qui dépend du rayon de courbure ou de la courbure du cercle osculateur, est nulle, soit

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T$$

ainsi la vitesse et l'accélération sont colinéaire :

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = v \vec{u}_T \cdot \frac{dv}{dt} \vec{u}_T = v \frac{dv}{dt}.$$

Lorsque la valeur de la vitesse augmente avec le temps  $\frac{dv}{dt} > 0$ , l'accélération est dans le même sens que la vitesse, soit

$$\vec{v} \cdot \vec{a} > 0$$

le mouvement est **accélééré**.

Lorsque la valeur de la vitesse diminue avec le temps  $\frac{dv}{dt} < 0$ , l'accélération est dans le sens opposé à la vitesse, soit

$$\vec{v} \cdot \vec{a} < 0$$

le mouvement est **décélééré**.

### Mouvement uniforme

Si le mouvement est uniforme alors  $v = \text{cst}$  et  $\frac{dv}{dt} = 0$ . La composante tangentielle de l'accélération, celle qui dépend de la variation de la valeur de la vitesse s'annule, soit

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R} \vec{u}_N$$

ainsi la vitesse et l'accélération sont orthogonales

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0.$$

### Mouvement circulaire et uniforme

Pour une trajectoire circulaire, le rayon  $R$  est constant, la courbure également : on retrouve le cas d'un mouvement circulaire, soit

$$\begin{aligned} \vec{v} &= v \vec{u}_T \\ \vec{a} &= \frac{v^2}{R} \vec{u}_N + \frac{dv}{dt} \vec{u}_T \end{aligned}$$

avec  $\vec{u}_N \equiv -\vec{u}_\rho$ ,  $\vec{u}_T \equiv \vec{u}_\theta$ ,  $R$  et  $v$  constants.

---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Description du mouvement d'un point. Vecteurs position, vitesse et accélération.
- Mouvement rectiligne uniformément accéléré.
- Mouvement à vecteur accélération constant.
- Mouvement circulaire uniforme et non uniforme.
- Coordonnées des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour un mouvement circulaire.

### Savoir-faire

- **Exprimer** à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, **construire** le trièdre local associé et **en déduire** géométriquement les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- **Établir** les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération dans les seuls cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- **Caractériser** le vecteur accélération pour les mouvements suivants : rectiligne, rectiligne uniforme, rectiligne uniformément accéléré.
- **Exprimer** le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps.
- **Établir** l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- **Exprimer** les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- **Caractériser** le vecteur accélération pour les mouvements suivants : circulaire, circulaire uniforme. **Faire** le lien avec les composantes polaires de l'accélération.

## Leçon III. Dynamique du point

Dans la leçon précédente, nous avons décrit le mouvement d'un objet. Dans cette leçon, nous allons déterminer les causes du mouvement, ce qui va nous amener à introduire la notion de force.

Afin d'introduire la notion de force, il nous faut définir d'autres notions liées à **la cinétique d'un système : l'étude du mouvement d'un système sous l'influence de forces.**

### III.1. Éléments cinétiques

#### III.1.a La masse

Dans la leçon précédente nous avons étudié les mouvements d'un point. Nous avons obtenu les variations de son accélération, de sa vitesse, ce qui nous a permis d'obtenir sa trajectoire. Cependant, les mouvements d'un objet ne dépendent pas seulement de son accélération, de sa vitesse ou de sa position. Par exemple, si on étudie un point glissant sur une pente avec certaine position, vitesse et accélération initiale, la suite de son mouvement sera différent si on considère que ce point modélise une bille ou une boule de bowling.

Il est nécessaire d'introduire une nouvelle grandeur qui permet de traduire **la capacité d'un système à résister au mouvement**, ce qu'on appelle son **inertie**. Cette grandeur est appelée **masse inerte**. La boule de bowling a une plus grande masse inerte que la bille, elle résiste donc plus au mouvement.

#### ♥ Définition

**La masse inerte** d'un objet est la grandeur qui mesure la capacité d'un corps à résister à la mise en mouvement. On la note  $m$  et son unité est le kg dans le système international. La masse est un scalaire d'autant plus grand que le corps est inerte. C'est une grandeur extensive (additive) et intrinsèque (liée uniquement au corps considéré).

En mécanique du point, on attribuera une masse aux points considérés qu'on dénommera alors **points matériels**.

Considérons un système constitué de plusieurs points matériels, par exemple constitué de deux points matériels  $M_1$  et  $M_2$  de masses inertes respectives  $m_1$  et  $m_2$  et de vecteurs positions respectives  $\overrightarrow{OM_1}$  et  $\overrightarrow{OM_2}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

On définit **la position du centre de gravité**  $G$  du système composés de  $N$  points matériels de telle manière que

$$\overrightarrow{OG} \sum_i m_i = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}$$

ainsi dans le cas du système décrit précédemment

$$\overrightarrow{OG}(m_1 + m_2) = m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}$$

et on peut alors obtenir le vecteur position du centre de gravité

$$\overrightarrow{OG} = \frac{m_1 \overrightarrow{OM_1} + m_2 \overrightarrow{OM_2}}{m_1 + m_2}.$$

#### III.1.b Quantité de mouvement

La **quantité de mouvement** est une grandeur introduite par Newton pour formuler les lois de la mécanique que nous introduirons dans la deuxième partie.

La quantité de mouvement d'un point  $M$  de masse  $m$  et de vitesse  $\vec{v}$  est noté  $\vec{p}$  et est définie telle que

$$\vec{p} = m \vec{v}.$$

L'unité de cette grandeur vectorielle est le  $\text{kg.m.s}^{-1}$ . Contrairement à la masse inerte, elle n'est pas intrinsèque, elle dépend du référentiel dans lequel on étudie le point  $M$ .

On peut obtenir la quantité de mouvement d'un système de  $N$  points matériels à partir des relations précédentes. La quantité de mouvement du système est la somme des quantité de mouvement de chaque point, soit

$$\vec{p} = \sum_i^N \vec{p}_i = \sum_i^N m_i \vec{v}_i$$

avec  $\vec{v}_i$  la vitesse de chaque point  $i$  du système.

Il vient que

$$\vec{p} = \sum_i^N m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}$$

la masse  $m_i$  d'un point étant intrinsèque, elle ne dépend pas du temps, donc

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} \left( \sum_i^N m_i \vec{OM}_i \right)$$

soit

$$\vec{p} = \frac{d}{dt} \left( \vec{OG} \sum_i^N m_i \right)$$

$$\vec{p} = \frac{d\vec{OG}}{dt} \sum_i^N m_i$$

$$\vec{p} = \vec{v}_G \sum_i^N m_i$$

avec  $\vec{v}_G$  la vitesse du centre gravité  $G$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

On peut conclure de cette étude que la quantité de mouvement  $\vec{p}$  d'un système, ponctuel ou non, est égale à la quantité de mouvement de son centre de gravité  $G$  affecté de la masse totale  $m$ , soit

$$\vec{p} = m\vec{v}_G.$$

### III.2. Lois de Newton

Nous allons introduire les trois lois de Newton sur lesquelles se basent le modèle de la mécanique classique.

#### III.2.a Première loi de Newton : principe d'inertie

Avant d'introduire la première loi de Newton, il nous faut définir la notion de **point isolé**.

#### ♥ Définition

**Un point isolé** est un point matériel qui n'est soumis à aucune interaction avec l'extérieur.

Il s'agit d'un cas théorique dans lequel un point est seul dans l'Univers. En pratique cela est bien sûr impossible, mais on considèrera qu'un point matériel est isolé lorsque les interactions qu'il subit sont négligeables.

En se basant sur cette notion de point isolé, nous pouvons énoncer **la première loi de Newton**, appelé également **principe d'inertie**.

### ♥ Définition

**La première loi de Newton ou principe d'inertie** stipule qu'un référentiel dans lequel tout point matériel isolé est animé d'un mouvement rectiligne uniforme est appelé **référentiel galiléen**.

Newton (1643-1727) s'est basé sur les travaux de Galilée (1564-1642) pour formuler le principe d'inertie : "Si j'ai vu plus loin que les autres, c'est parce que j'ai été porté par des épaules de géants."

### 👉 Nota bene

Un principe ne se démontre pas.

Les référentiels galiléens sont des référentiels particuliers qu'on ne peut définir qu'à partir du mouvement de points matériels isolés.

Considérons un point isolé  $M$  étudié à l'origine  $O$  d'un référentiel  $\mathcal{R}$ . De plus, ce point est immobile. Sa vitesse dans ce référentiel est donc

$$\vec{v}_{M,\mathcal{R}} = \vec{0}.$$

Sa vitesse étant constamment nulle en valeur, direction et sens, il est bien **en mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}$** .

Imaginons maintenant une fusée qui se déplace avec une vitesse constante  $\vec{v}_{f,\mathcal{R}}$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , elle a donc **un mouvement rectiligne uniforme dans  $\mathcal{R}$** . On peut aussi dire que **le référentiel de la fusée  $\mathcal{R}_f$  est en mouvement rectiligne uniforme par rapport au premier référentiel  $\mathcal{R}$** .

Dans le référentiel de la fusée  $\mathcal{R}_f$ , la vitesse de la fusée est immobile  $\vec{v}_{f,\mathcal{R}_f} = \vec{0}$  : un observateur assis dans la fusée est immobile dans ce référentiel. Mais si l'observateur regarde par un hublot de la fusée le point  $M$  isolé, il lui semblera que ce point se déplace avec une vitesse opposé à celle de la fusée dans le référentiel  $\mathcal{R}$ , soit

$$\vec{v}_{M,\mathcal{R}_f} = -\vec{v}_{f,\mathcal{R}}$$

comme  $\vec{v}_{f,\mathcal{R}}$  est constante en valeur, direction et sens,  $-\vec{v}_{f,\mathcal{R}}$  l'est également, donc **le point  $M$  a aussi un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel de la fusée  $\mathcal{R}_f$** . Donc, le référentiel  $\mathcal{R}$  qui a pour origine le point  $M$  a aussi un mouvement rectiligne uniforme dans le référentiel de la fusée  $\mathcal{R}_f$ .

**On peut en conclure que les référentiels galiléens sont, par définition, en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.**

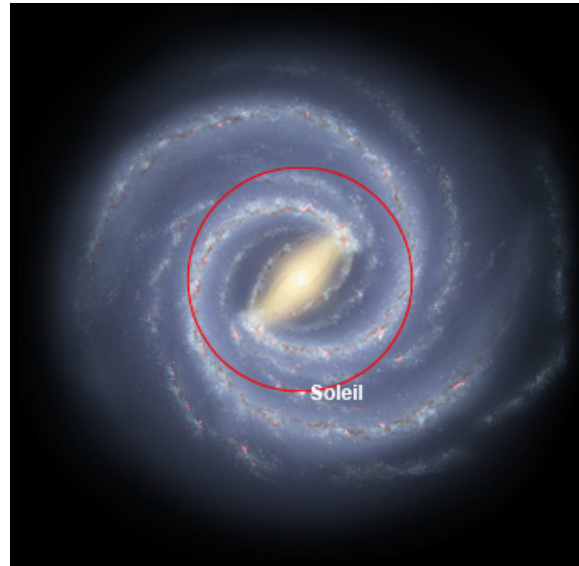
Cela implique que pour déterminer si un référentiel est un référentiel galiléen, par exemple le référentiel lié à un train avec un mouvement rectiligne uniforme, il faut savoir si le référentiel par rapport auquel il se déplace avec une vitesse constante, par exemple le référentiel terrestre, est aussi galiléen. Et pour savoir si ce dernier l'est, il faut pouvoir appliquer le principe d'inertie, soit trouver un point matériel isolé et déterminer si son mouvement est rectiligne uniforme pendant une certaine durée.

En pratique, on utilisera le plus souvent trois référentiels en fonction de la durée du phénomène étudié.

- **Le référentiel terrestre et les référentiels liés au référentiel terrestre comme le référentiel du laboratoire** sont considérés comme galiléens si on étudie des mouvement avec des durées courtes devant la durée d'un jour, car dans ce cas on peut négliger la rotation de la Terre autour de son axe qui affectera le mouvement du système.



- **Le référentiel géocentrique** est considéré comme galiléen si on étudie des mouvement avec des durées courtes devant la durée d'une année, car dans ce cas on peut négliger la rotation de la Terre autour du Soleil qui affecterai le mouvement du système.
- **Le référentiel héliocentrique** est considéré comme galiléen si on étudie des mouvement avec des durées courtes devant la période de rotation de notre galaxie (250 millions d'année), car dans ce cas on peut négliger la rotation du Soleil autour du centre de la voie lactée qui affecterai le mouvement du système.



**Figure 5.19** – Trajectoire du Soleil au cours d'une rotation de la voie lactée (rayon : 28 000 année lumières).

### III.2.b Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Faisons une expérience de pensée. Considérons un astéroïde dans l'espace. A un instant initial, il est très loin du Soleil et il se déplace dans le référentiel héliocentrique selon un mouvement rectiligne uniforme. Comment évolue sa trajectoire lorsqu'il se rapproche du Soleil ?

Nous savons que les objets s'attirent les uns les autres d'autant plus fortement que leur masse est importante : il existe **une interaction** entre objets massifs. Ainsi, on peut imaginer que l'astéroïde va être attiré par le Soleil, et sa trajectoire, à l'origine rectiligne, deviendra courbe. Or nous avons vu dans la leçon Cinématique du point qu'un objet avec une trajectoire courbe subit une accélération orienté vers le centre de la courbure de la trajectoire. Ainsi, l'interaction entre le Soleil et l'astéroïde a provoqué une variation de la vitesse de l'astéroïde : auparavant constante en valeur, sens et direction, elle a été modifiée ; on peut également dire que son accélération auparavant nulle, est devenue non nulle suite à cette interaction.

Avec cette expérience, nous avons mis en évidence que le mouvement d'un objet peut être modifié du fait d'une interaction entre le système et l'extérieure. Cette interaction, Newton l'a dénommée **force**.

#### ♥ Définition

**Une force** est une grandeur vectorielle décrivant l'interaction capable de modifier et ou de produire un mouvement ou une déformation d'un système.

Pour décrire une force, en plus de lui attribuer une valeur, un sens et une direction, il faut également définir le **point d'application** du système sur lequel elle s'exerce.

Notre expérience a mis en évidence qu'une force provoque une variation de la trajectoire de l'objet sur laquelle elle s'exerce, ce qui se traduit par une variation de sa vitesse et donc de sa quantité de mouvement.

Nous venons de mettre en évidence **la deuxième loi de Newton**.

### ♥ Définition

**La deuxième loi de Newton ou principe fondamental de la dynamique (PFD)** stipule que, dans un référentiel galiléen, la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur ce dernier, soit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i.$$

Le PFD permet :

- d'obtenir des informations cinématiques liées au système : la variation de sa quantité de mouvement, à partir de la connaissance d'informations dynamiques liées au système : la somme des forces qui s'exercent sur lui
- d'obtenir des informations dynamiques liées au système : la résultante des forces qui s'exercent sur lui, à partir de la connaissance d'informations cinématiques liées au système : la variation de sa quantité de mouvement.

Ce principe appliqué sur des cas particuliers a plusieurs conséquences.

#### ■ Systèmes à masse constante

Pour de tels système le PFD peut s'écrire

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \sum_i \vec{F}_i \\ m \vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i. \end{aligned}$$

Sauf indication contraire, nous étudierons seulement ce type de système. Une fusée dont le carburant diminue au cours du temps est un exemple de système dont la masse varie au cours du temps.

#### ■ Systèmes pour lesquels la résultante des forces est nulles

Pour de tels systèmes, il vient que

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{0} \\ m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{0} \\ m \vec{a} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Pour de tels systèmes, le PFD implique que leur quantité de mouvement, et donc leur vitesse sont constantes en valeur, en direction et en sens. Dans un référentiel galiléen, ces systèmes ont donc un mouvement rectiligne uniforme : par définition on peut les assimiler à des **systèmes pseudo-isolés**.

### ■ Systèmes à l'équilibre

La quantité de mouvement d'un système à l'équilibre est nulle à tout instant, soit

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Pour les systèmes à l'équilibre, le PFD implique que la somme des forces qui s'exercent sur eux est nulle.

#### III.2.c Troisième loi de Newton : principe des actions réciproques

##### ♥ Définition

La troisième loi de Newton ou principe des actions réciproques stipule que si le milieu extérieur d'un système  $M$  exerce sur ce dernier une force  $\vec{F}_{ext/M}$ , alors le système  $M$  exerce une force  $\vec{F}_{M/ext}$  sur le milieu extérieur telle que  $\vec{F}_{M/ext} = -\vec{F}_{ext/M}$ .  
Les actions de  $M$  sur l'extérieur et les actions de l'extérieur sur  $M$  sont opposés donc de même valeur et de même direction mais de sens opposés.

Newton a montré qu'il n'y avait pas d'action, mais seulement des **interactions**.

##### 👉 Nota bene

Lorsqu'on applique le PFD, on ne s'intéresse qu'aux forces qui s'exercent sur le système : **on ne considère pas les forces exercées par le système sur l'extérieur !**

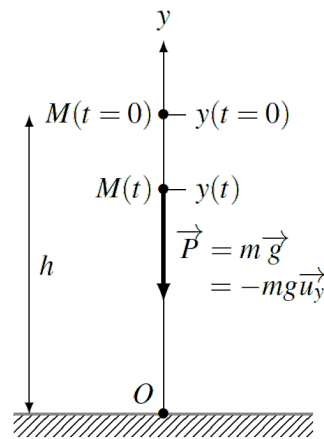
### III.3. Études dynamiques à connaître

#### III.3.a Chute libre dans un champ de pesanteur

On étudie le mouvement d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  qu'on lâche sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$  dans le **champ de pesanteur**  $\vec{g}$  de la Terre (on appelle aussi  $\vec{g}$  l'**accélération de pesanteur**). Ce champ de pesanteur est considéré comme uniforme : il est le même en tout point de l'espace considéré.

Lorsqu'on mène une étude dynamique afin d'obtenir les équations horaires du mouvement à partir des forces qui s'exercent sur lui (obtenir des informations cinématiques à partir d'information dynamiques) il faut toujours suivre les étapes présentées ci-dessous.

- **Définition du système** : le système est le point matériel  $M$ .
- **Choix du référentiel** : on choisit le référentiel terrestre que l'on suppose galiléen du fait de la courte durée du mouvement.
- **Bilans des forces** : les forces qui s'exercent sur le système sont
  - **son poids**  $\vec{P} = m\vec{g}$  qui est une **force à distance** et qui s'applique donc sur le barycentre de  $M$  et qui est dirigé vers le centre de la Terre
  - **les forces de frottements fluides**  $\vec{f}$  dues à l'air qui sont des forces de contact et qui s'appliquent donc sur le point de contact entre l'air et  $M$  et qui sont dirigé dans le sens opposé au mouvement.
- **Schéma du système et des forces**



**Figure 5.20** – Schéma d'un point matériel  $M$  en chute libre dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$ .

- **Application du PDF** : d'après le bilan des forces, le principe fondamental de la dynamique implique que

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{f}.$$

A partir de ces étapes nous allons mener deux études différentes : dans la première nous négligerons les forces de frottements fluides et dans la deuxième nous en tiendrons compte.

- **Chute libre dans un champ de pesanteur uniforme sans force de frottement fluide**

Si l'on néglige les forces de frottements fluides, le PFD devient

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

soit

$$m\vec{a} = m\vec{g}$$

$$\vec{a} = \vec{g}.$$

On constate que l'accélération  $\vec{a}$  d'un point matériel, ou d'un solide, dans le champ de pesanteur de la Terre, considéré uniforme, est égale au champ de pesanteur  $\vec{g}$ . On comprend pourquoi on appelle aussi  $\vec{g}$ , l'accélération de pesanteur terrestre.

On a déjà traité ce cas dans la leçon Cinématique du point.

Comme l'accélération ne possède qu'une composante selon l'axe  $(Oy)$  il vient que

$$a_y = -g$$

le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré : la valeur, la direction et le sens de l'accélération ne varient pas.

Il vient donc que

$$v_y = -gt + v_0$$

or la vitesse initiale du point  $M$  est nulle donc

$$v_y = -gt$$

et

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$$

avec  $y_0$  la position initiale du point  $M$  qui correspond à la hauteur  $h$  de laquelle on l'a lâché. L'équation horaire du mouvement de  $M$  est donc

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h.$$

Grâce à cette équation peut obtenir la durée de la chute  $\Delta t = t_f - t_0$  en connaissant les valeurs de  $\vec{g}$  et de  $h$ . La chute s'arrête à l'instant final  $t_f$  lorsque  $M$  atteint la hauteur  $y = 0$ , soit

$$0 = -\frac{1}{2}gt_f^2 + h$$

$$t_f = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

et

$$\Delta t = t_f - t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - 0$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2h}{g}}.$$

On peut également calculer la valeur de la vitesse du point  $M$  à l'instant  $t_f$  où il touche le sol, soit

$$v_y(t_f) = -gt_f = -g\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$v_y(t_f) = -\sqrt{\frac{2g^2h}{g}} = -\sqrt{2gh}.$$

Cela signifie que la vitesse finale d'un objet en chute libre à partir d'une hauteur de 1000 m est

$$v_y(t_f) = \sqrt{2 \cdot 9,81 \text{ m.s}^{-2} \cdot 1000 \text{ m}} = 140 \text{ m.s}^{-1} = 504 \text{ km.h}^{-1}.$$

Or, lorsqu'on mesure la vitesse finale d'un parachutiste chutant depuis une hauteur supérieure 1000 m (parachute fermé), elle ne dépasse jamais les 250 km.h<sup>-1</sup>. Cela montre qu'il existe un phénomène qui limite la vitesse afin qu'elle ne dépasse jamais une valeur maximale appelée **vitesse limite**. Ce phénomène ce sont **les forces de frottements fluides**.

#### ■ Chute libre dans un champ de pesanteur uniforme avec force de frottement fluide

Dans ce cas, nous ne négligeons plus les forces de frottements fluides. On les modélise sous la forme

$$\vec{f} = -k_1 \vec{v}$$

avec  $k$  un coefficient qui dépend de la nature du fluide, ici l'air, et des caractéristiques de l'objet sur lequel s'exercent les forces (géométrie et rugosité); et  $\vec{v}$  la vitesse de l'objet sur lequel s'exerce les forces de frottements fluides. On voit bien que ces forces s'opposent au mouvement car elles sont de sens contraire à la vitesse de l'objet.

D'après le PFD

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{f}$$

$$m \vec{a} = m \vec{g} - k \vec{v}.$$

La chute étant verticale, l'accélération a une seule composante selon l'axe  $(Oy)$ , soit

$$a_y \vec{u}_y = \frac{dv_y \vec{u}_y}{dt}$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt}.$$

Ainsi

$$ma_y = -mg - kv_y$$

$$\frac{m}{k} \frac{dv_y}{dt} = -\frac{mg}{k} - v_y$$

$$-\frac{mg}{k} = \frac{m}{k} \frac{dv_y}{dt} + v_y$$

on reconnaît une **équation différentielle du premier ordre**.

Pour la résoudre, on recherche la solution particulière pour laquelle l'inconnue  $v_y$  à la même forme que le second membre  $\frac{mg}{k}$ , soit une constante. Ainsi

$$-\frac{mg}{k} = \frac{m}{k} \frac{dv_{y,p}}{dt} + v_{y,p}$$

$$-\frac{mg}{k} = v_{y,p}.$$

On cherche ensuite la solution de l'équation homogène, qui, par définition, n'a pas de second membre, soit

$$0 = \frac{m}{k} \frac{dv_{y,h}}{dt} + v_{y,h}$$

$$\frac{dv_{y,h}}{dt} = -\frac{k}{m} v_{y,h}$$

les solutions pour cette équation sont

$$v_{y,h}(t) = Ae^{-kt/m}$$

avec  $A$  une constante d'intégration.

La solution générale est donc

$$v_y(t) = v_{y,p} + v_{y,h}(t)$$

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k} + Ae^{-kt/m}.$$

Pour obtenir la valeur de  $A$  il faut exploiter la condition initiale

$$v_y(t=0) = 0$$

donc

$$v_y(t=0) = -\frac{mg}{k} + Ae^0 = 0$$

$$A = \frac{mg}{k}$$

et donc

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k} + \frac{mg}{k} e^{-kt/m}$$

$$v_y(t) = -\frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}).$$

On remarque que lorsque  $t \rightarrow +\infty$  la composante de la vitesse selon l'axe ( $Oy$ ) est négative, la vitesse  $\vec{v} = v_y(t)\vec{u}_y$  est donc orientée vers le bas et est égale à une vitesse limite  $v_{lim} = -\frac{mg}{k}$ . On peut réécrire la composante de la vitesse selon l'axe ( $Oy$ ) telle que

$$v_y(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-kt/m}\right).$$

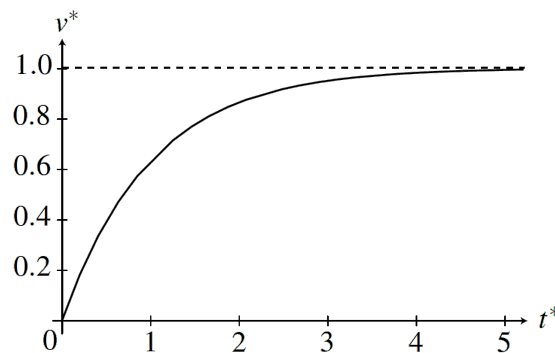
On constate que l'évolution de la composante de la vitesse du point matériel  $M$  en chute libre est similaire à l'évolution de la tension d'un condensateur dans un circuit RC. On peut introduire le temps caractéristique

$$\tau = \frac{m}{k} = -\frac{v_{lim}}{g}.$$

L'expression finale de la composante de la vitesse du point matériel  $M$  en chute libre est

$$v_y(t) = v_{lim} \left(1 - e^{-t/\tau}\right).$$

Au bout d'une durée  $\tau$ ,  $v_y$  à atteint 63% de sa vitesse finale, soit la vitesse limite. Au bout de  $4,6\tau$ ,  $v_y$  à atteint 99% de la valeur de la vitesse limite.



**Figure 5.21** – Évolution de la composante de la vitesse sans dimension  $v^* = \frac{v}{v_{lim}}$  du point  $M$  en chute libre en fonction du temps sans dimension  $t^* = \frac{t}{\tau}$ .

### Nota bene

Dans le cas de la chute libre sans frottements fluides nous avons obtenu à partir du PFD la relation suivante

$$m \vec{a} = \vec{P}$$

soit

$$m \vec{a} = m \vec{g}.$$

Cela n'est pas correct *a priori*. La masse  $m$  du terme de gauche de l'équation correspond à la **masse inerte** définie plus tôt : soit la masse qui témoigne de la résistance de l'objet à la mise en mouvement dû aux force qui s'exercent sur lui.

La masse  $m$  du terme de droite de l'équation correspond à une autre masse : la **masse pesante ou masse grave**.

L'égalité entre ces deux types de masses n'est pas évidente, elle n'est posée qu'en principe. On ne peut pas la démontrer, on peut seulement la constater expérimentalement (avec une précision de  $10^{-12}$  depuis les années 60).

## III.3.b Système masse-ressort

Considérons un ressort lié à ses extrémités à une masse  $m_N$  et une masse  $m_M$ . Au repos les masses ponctuelles sont positionnées à la position  $N_0$  et  $M_0$ . La longueur au repos du ressort est noté  $l_0$  (ce n'est pas la longueur du ressort à l'instant initial!).

Un opérateur allonge ou comprime le ressort de sorte que la position de ses extrémités varie au cours du temps, on note ces positions  $N(t)$  et  $M(t)$ .

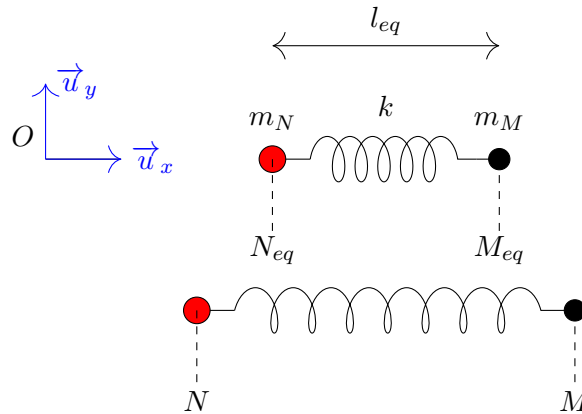


Figure 5.22 – Schéma du ressort et des points matériels  $N$  et  $M$ .

La loi Hooke, loi expérimentale introduite par Robert Hooke en 1676, décrit la force exercée par le ressort sur un point matériel attaché à ses extrémités, on nomme cette force **la force de tension du ressort ou force de rappel du ressort** notée  $\vec{T}$ .

On définit comme système d'étude la masselotte de masse  $m_M$  au point  $M(t)$ . La longueur du ressort au cours du temps est donnée par le vecteur  $\overrightarrow{N(t)M(t)} = l(t)\vec{u}_r$ , avec  $N(t)$  l'autre extrémité du ressort et  $\vec{u}_r$  le vecteur unitaire porté par la droite passant par  $N$  et  $M$ .

À l'équilibre la longueur du ressort est donnée par le vecteur  $\overrightarrow{N_{eq}M_{eq}} = l_{eq}\vec{u}_r$ . On considère que le vecteur unitaire ne varie pas au cours du temps.

Si on écarte la masselotte  $M$  de sa position d'équilibre, la longueur du ressort passe de  $\overrightarrow{N_{eq}M_{eq}}$  à  $\overrightarrow{N(t)M(t)}$ .

D'après la loi de Hooke, loi phénoménologique, **la force exercée sur la masselotte  $M$  par le ressort** du fait de cet écart de l'équilibre est telle que

$$\vec{T}_{r/M} = k \left( \overrightarrow{N_{eq}N(t)} - \overrightarrow{M_{eq}M(t)} \right)$$

avec  $k$  **la constante de raideur du ressort**, quantité scalaire caractéristique du ressort.

Si on modifie cette expression il vient que

$$\begin{aligned} \vec{T}_{r/M} &= k \left( \overrightarrow{N_{eq}N(t)} - \overrightarrow{M_{eq}M(t)} \right) \\ &= k \left( \overrightarrow{N_{eq}O} + \overrightarrow{ON(t)} - \overrightarrow{M_{eq}O} - \overrightarrow{OM(t)} \right) \\ &= k \left( \overrightarrow{N_{eq}M_{eq}} + \overrightarrow{M(t)N(t)} \right) \\ &= -k \left( \overrightarrow{N(t)M(t)} - \overrightarrow{N_{eq}M_{eq}} \right) \end{aligned}$$

soit

$$\vec{T}_{r/M} = -k(l(t) - l_{eq})\vec{u}_r.$$



Considérons que  $N$  est fixé et correspond à  $O$  l'origine du repère, de plus on fait correspondre le vecteur unitaire  $\vec{u}_r$  au vecteur unitaire de projection  $\vec{u}_x$  de la base cartésienne, de telle manière que  $\overrightarrow{OM} = x \vec{u}_x$ . Il vient que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{T_{r/M}} &= -k(\overrightarrow{OM(t)} - \overrightarrow{OM_{eq}}) \\ &= -k(x - l_{eq}) \vec{u}_x.\end{aligned}$$

On voit que si  $x > l_{eq}$ , le ressort est allongé et la force de tension est orientée selon les  $x < 0$  donc dans le sens opposé à l'allongement.

Si  $x < l_{eq}$ , le ressort est comprimé et la force de tension est orientée selon les  $x > 0$  donc dans le sens opposé à la compression.

Plus la déformation du ressort est importante et plus la norme de la force de rappel est importante.

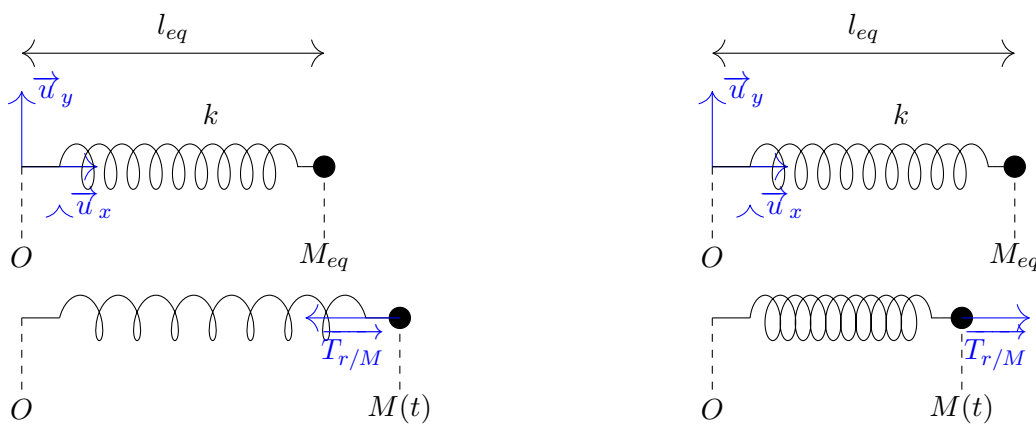


Figure 5.23 – Schéma du ressort avec une extrémité fixe.

Menons une étude dynamique sur ce point matériel  $M$  lié à ce ressort de constante de raideur  $k$  selon les étapes définies plus tôt.

- **Définition du système** : le système est le point matériel  $M$ .
- **Choix du référentiel** : on choisit le référentiel terrestre que l'on suppose galiléen du fait de la courte durée du mouvement.
- **Bilans des forces** : les forces qui s'exercent sur le système sont
  - **son poids**  $\vec{P} = m\vec{g}$  qui est une **force à distance** et qui s'applique donc sur le barycentre de  $M$  et qui est dirigé vers le centre de la Terre
  - **la force de rappel du ressort**  $\overrightarrow{T_{r/M}}$  due à la déformation du ressort qui est une force de contact dont le point d'application est le point de contact entre le ressort et le point  $M$
  - **la réaction du support** horizontal  $\vec{R}$  qui est une force de contact dont le point d'application est le point de contact entre le support et le point  $M$
  - **les forces de frottements** que l'on néglige.
- **Application du PDF** : d'après le bilan des forces, le principe fondamental de la dynamique implique que

$$m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{T_{r/M}} + \vec{R}.$$

Si l'on décompose l'équation précédente selon les composantes du vecteur accélération, il vient que

$$ma_y = -P + R$$

$$ma_x = -k(x - l_0).$$

On considère que le poids et la réaction du support se compensent car le point  $M$  est immobile selon l'axe  $(Oy)$ .

Selon l'axe  $(Ox)$  il vient que

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - l_0)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - l_0)$$

or comme  $l_0$  est indépendant du temps, on peut écrire

$$\frac{d^2(x - l_0)}{dt^2} = -\frac{k}{m}(x - l_0)$$

soit si on introduit la grandeur algébrique  $\Delta l = x - l_0$  définie comme **l'allongement algébrique du ressort**, il vient que

$$\frac{d^2\Delta l}{dt^2} = -\frac{k}{m}\Delta l$$

on reconnaît **l'équation du deuxième ordre caractéristique des oscillateurs harmoniques**. On peut introduire la pulsation propre du système  $\omega_0$  telle que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Ainsi

$$\frac{d^2\Delta l}{dt^2} = -\omega_0^2\Delta l.$$

Nous savons qu'une telle équation a pour solution

$$\Delta l(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes à déterminer à partir des conditions initiales de l'allongement du ressort.

On considère qu'à l'instant  $t = 0$ , l'allongement du ressort est égal à un allongement quelconque  $\Delta l(t = 0)$  définie telle que

$$\Delta l_0 = l(t = 0) - l_0$$

$l(t = 0)$  et  $l_0$  sont *a priori* différents !

La variation de l'allongement au cours du temps correspond à la valeur de la vitesse du point  $M$  car

$$\frac{d\Delta l}{dt} = \frac{d(x - l_0)}{dt} = \frac{dx}{dt}.$$

Ainsi, à l'instant  $t = 0$  on peut considérer une valeur quelconque de la vitesse du point  $M$  noté  $v_0$ . On peut alors obtenir les expressions de  $A$  et de  $B$ .

À  $t = 0$  il vient que

$$\Delta l(t = 0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

et donc

$$\frac{d\Delta l}{dt} = \frac{d}{dt} (\Delta l(t = 0) \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)) = -\omega_0 \Delta l(t = 0) \sin(\omega_0 t) + \omega_0 B \cos(\omega_0 t).$$

À  $t = 0$  il vient également que

$$\left( \frac{d\Delta l}{dt} \right)_{t_0} = v_0 = -\omega_0 \Delta l(t = 0) \sin(0) + \omega_0 B \cos(0) = \omega_0 B$$

soit

$$B = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Le ressort peut donc être vu comme un oscillateur harmonique dont l'équation de l'allongement est

$$\Delta l(t) = \Delta l(t=0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t).$$

### III.3.c Pendule simple

On considère un solide de masse  $m$  attaché à un fil de longueur  $L$ . L'autre extrémité du fil est attaché à un support fixe comme illustré sur la figure Figure 5.24.

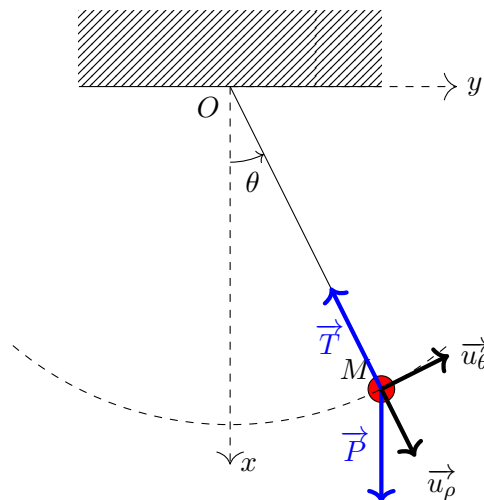


Figure 5.24 – Schéma du pendule simple.

À l'instant initial on lâche le solide sans vitesse initiale à un angle initial  $\theta_0$  par rapport à l'axe  $(Ox)$ .

On modélise le solide par un point  $M$  et le fil par un fil idéal : **inextensible** sans masse et sans rigidité (absence de flexion et de torsion).

- **Définition du système** : le système est le point matériel  $M$ .
- **Choix du référentiel** : on choisit le référentiel terrestre que l'on suppose galiléen du fait de la courte durée du mouvement.
- **Bilans des forces** : les forces qui s'exercent sur le système sont
  - **son poids**  $\vec{P} = m\vec{g}$  qui est une **force à distance** et qui s'applique donc sur le barycentre de  $M$  et qui est dirigé vers le centre de la Terre
  - **la tension du fil**  $\vec{T}_f$  qui retient le point  $M$
  - **les forces de frottements** que l'on néglige.
- **Application du PDF** : d'après le bilan des forces, le principe fondamental de la dynamique implique que

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}_f.$$

On étudie le mouvement du pendule dans le plan  $(Oxy)$  et l'on choisit un repère cylindro-polaire. D'après les conclusions obtenues dans la leçon Cinématique du point, les vecteurs position, vitesse et accélération du point  $M$  dans ce repère sont tels que

$$\overrightarrow{OM} = L\vec{u}_\rho \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \vec{a} = -L\dot{\theta}^2\vec{u}_\rho + L\ddot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

Afin d'obtenir l'équation du mouvement du pendule, on projette les forces sur les vecteurs de la base cylindro-polaire, soit

$$\begin{aligned}\vec{P} &= P \cos \theta \vec{u}_\rho - P \sin \theta \vec{u}_\theta \\ \vec{T}_f &= -T_f \vec{u}_\rho.\end{aligned}$$

En décomposant l'équation obtenue grâce au PFD il vient que

$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 &= P \cos \theta - T_f \\ mL\ddot{\theta} &= -P \sin \theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 &= mg \cos \theta - T_f \\ mL\ddot{\theta} &= -mg \sin \theta \end{cases}$$

La première équation permet d'établir l'expression de la tension du fil  $T_f$ ...si on connaît l'évolution temporelle de  $\theta$ .

La deuxième équation nous permet d'obtenir toutes les informations sur le mouvement du point  $M$ . Isolons l'accélération angulaire  $\ddot{\theta}$  dans cette équation

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \sin \theta.$$

Cette équation n'est pas linéaire (si on effectue un développement de Taylor sur la fonction  $\sin \theta$  on peut exprimer cette dernière comme une somme de différentes puissances de  $\theta$ ) et elle n'a donc pas de solution analytique simple.

Afin de simplifier cette équation, on peut positionner le problème dans **le cas particulier où la valeur angle  $\theta$  décrivant une des coordonnées du point  $M$  est petite devant 1** (en radians). Dans ce cas, le développement limité en 0 donne  $\sin x \approx x$ , soit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{L} \theta.$$

On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$ . La solution générale d'une telle équation est

$$\theta(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(\omega_0 t)$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes à déterminer à partir des conditions initiales.

On sait qu'à  $t = 0$ , l'angle initiale  $\theta(t = 0) = \theta_0$  et que la vitesse initiale  $v_0 = L\dot{\theta}_0 = 0$ , donc  $\dot{\theta}_0 = 0$ , ainsi

$$\begin{cases} \theta(t = 0) &= A \sin(0) + B \cos(0) = B = \theta_0 \\ \dot{\theta}_0 &= \omega_0 A \cos(0) - \omega_0 B \sin(0) = \omega_0 A = 0 \end{cases}$$

Ainsi l'équation du mouvement du pendule simple est

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t).$$

On constate que le pendule, pour de faibles valeurs de  $\theta_0$ , soit une équation avec une amplitude  $\theta_0$  faible, correspond à un oscillateur harmonique avec une pulsation propre  $\omega_0$  qui correspond à une période propre

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

**La période d'un pendule de faible amplitude est indépendant de l'amplitude initiale  $\theta_0$  : on dit qu'il y a isochronisme des oscillations**, ou que le pendule de faible amplitude est isochrone.

On remarque également que la période propre  $T_0$  d'un pendule de faible amplitude ne dépend pas non plus de sa masse  $m$ , mais uniquement de sa longueur  $L$  et de l'accélération de pesanteur  $g$ .

## Synthèse

---

### Connaissances

- Masse d'un système. Centre de masse d'un système. Quantité de mouvement d'un point matériel et d'un système de points.
- Première loi de Newton : principe d'inertie. Référentiels galiléens.
- Deuxième loi de Newton. Notion de force.
- Troisième loi de Newton.
- Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.
- Modèle linéaire d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. Vitesse limite.
- Système modèle masse-ressort sans frottement.
- Tension d'un fil. Pendule simple.

### Savoir-faire

- **Justifier** qualitativement la position du centre de masse d'un système, cette position étant donnée.
- **Utiliser** la relation entre la quantité de mouvement d'un système et la vitesse de son centre de masse.
- **Décrire** le mouvement relatif de deux référentiels galiléens. **Discuter** qualitativement du caractère galiléen d'un référentiel donné pour le mouvement étudié.
- **Établir** un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
- **Utiliser** la deuxième loi de Newton dans des situations variées.
- **Établir et exploiter** les équations horaires du mouvement. **Établir** l'équation de la trajectoire.
- **Déterminer et résoudre** l'équation différentielle du mouvement.
- **Établir** l'équation du mouvement du pendule simple. **Justifier** le caractère harmonique des oscillations de faible amplitude.

## Leçon IV. Énergétique du point

Afin d'étudier le mouvement d'un objet, nous allons adopter le point de vue énergétique. Pour ce faire, nous allons définir plus précisément la notion de puissance déjà rencontrée. Cela nous permettra d'introduire les concepts de travail et d'énergie, puis de présenter les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique, outils indispensables à l'étude énergétique.

### IV.1. Puissance et travail d'une force

#### IV.1.a Puissance d'une force

##### ♥ Définition

La **puissance**  $\mathcal{P}(t)$  d'une force  $\vec{F}$  appliqué sur un point matériel  $M$  se déplaçant avec une vitesse  $\vec{v}(t)$  est définie par le produit scalaire

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(t) &= \vec{F} \cdot \vec{v}(t) \\ \mathcal{P}(t) &= Fv(t) \cos \theta\end{aligned}$$

avec  $\theta$  l'angle entre les vecteurs  $\vec{F}$  et  $\vec{v}(t)$ .

L'unité de la puissance est le Watt noté W. On constate que  $1 \text{ W} = 1 \text{ N.m.s}^{-1}$ , soit  $1 \text{ W} = 1 \text{ kg.m.s}^{-2} \cdot \text{m.s}^{-1} = 1 \text{ kg.m}^2 \cdot \text{s}^{-3}$ .

##### 👉 Nota bene

On constate que la puissance peut être négative si  $\theta \in ]\pi/2; 3\pi/2[$ .

De plus, comme la puissance dépend de la vitesse du point  $M$ , **elle dépend du référentiel d'étude** choisi.

Soit une force  $\vec{F}$  somme des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ . La puissance de la force  $\vec{F}$  est donc

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = \vec{F}_1 \cdot \vec{v}(t) + \vec{F}_2 \cdot \vec{v}(t) = \mathcal{P}_1(t) + \mathcal{P}_2(t)$$

avec  $\mathcal{P}_1(t)$  et  $\mathcal{P}_2(t)$  les puissances des forces  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$ . On constate donc que la puissance est additive.

On peut qualifier une force à partir de sa puissance.

- Si  $\mathcal{P}(t) > 0$ , **la force est motrice**. Dans ce cas  $\vec{F} \cdot \vec{v}(t) > 0$ , la projection de la force sur la trajectoire est dans le même sens que le mouvement.
- Si  $\mathcal{P}(t) < 0$ , **la force est résistance**. Dans ce cas  $\vec{F} \cdot \vec{v}(t) < 0$ , la projection de la force sur la trajectoire est dans le sens opposé au mouvement.
- Si  $\mathcal{P}(t) = 0$ , dans ce cas  $\vec{F} \cdot \vec{v}(t) = 0$ , la force est perpendiculaire au mouvement ou le point  $M$  est immobile.

## IV.1.b Travail d'une force

## ♥ Définition

**Le travail  $W(\vec{F})$  d'une force  $\vec{F}$  appliquée sur un point matériel  $M$  se déplaçant est la quantité algébrique d'énergie fournie par la force  $\vec{F}$  au cours du déplacement de son point d'application.**

Afin d'obtenir l'expression du travail élémentaire, on peut se rappeler du lien entre puissance et énergie vue dans la leçon ??

$$\mathcal{P}(t) = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

soit

$$d\mathcal{E} = \mathcal{P}(t)dt.$$

Ainsi le travail élémentaire de la force  $\delta W(\vec{F})$  est défini tel que

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(t)dt.$$

En utilisant l'expression de la puissance de la force

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} dt$$

or, nous identifions l'expression du déplacement infinitésimal  $d\vec{OM} = \vec{v} dt$  soit

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}.$$

## 👉 Nota bene

Comme on ne sait pas *a priori* si le travail élémentaire est une différentielle d'une certaine fonction, on utilise la notation  $\delta W(\vec{F})$ .

La lettre  $W$  fait référence au mot anglais *work*.

## ♥ Définition

On peut ainsi définir **le travail de la force  $\vec{F}$**  au cours d'un déplacement du point matériel  $M$  le long d'une trajectoire allant d'un point  $A$  à  $B$

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F})$$

soit

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(t)dt \quad \text{ou} \quad W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{OM}.$$

L'unité du travail est le joule noté J. On constate que  $1 \text{ J} = 1 \text{ W.s}$ , soit  $1 \text{ J} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-3}.\text{s} = 1 \text{ kg.m}^2.\text{s}^{-2}$ .



 **Nota bene**

Le travail d'une force le long d'une trajectoire peut donc s'exprimer à l'aide de deux intégrales : une dont la variable d'intégration est un variable de temps et l'autre d'espace. Il faudra donc faire attention aux bornes de l'intégrale.

En raison de la relation entre la puissance et le travail, le travail dépend également du référentiel et est également additif.

IV.1.c Exemples de calculs de puissances et de travaux

Étudions quelques cas particuliers de forces.

■ **Force constamment perpendiculaire au mouvement**

Soit une force  $\vec{F}$  perpendiculaire au mouvement à tout instant, comme c'est le cas de forces de contact normales au support lorsque le support est fixe dans le référentiel d'étude.

Dans ce cas on voit que

$$\mathcal{P}(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = Fv(t) \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

**la puissance de la force est nulle à tout instant.**

Il en résulte que **le travail élémentaire de cette force est également nul**

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(t)dt = 0$$

et donc, **le travail de cette force, quelque le soit le chemin parcouru  $\mathcal{L}$ , est également nul**

$$W_{\mathcal{L}}(\vec{F}) = \int_{\mathcal{L}} \delta W(\vec{F}) = 0.$$

■ **Force constante**

Soit une force  $\vec{F}$  constante en valeur, direction et sens, comme c'est le cas du poids  $\vec{P} = m\vec{g}$ . On considère que cette force est orientée selon l'axe  $(Oy)$  telle que  $\vec{F} = F\vec{u}_y$ . La puissance de la force est alors

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(t) &= \vec{F} \cdot \vec{v}(t) = F\vec{u}_y \cdot (v_x\vec{u}_x + v_y\vec{u}_y + v_z\vec{u}_z) \\ \mathcal{P}(t) &= Fv_y = F\frac{dz}{dt}. \end{aligned}$$

Il en résulte que le travail élémentaire est

$$\delta W(\vec{F}) = \mathcal{P}(t)dt = F\frac{dz}{dt}dt = Fdz$$

dans ce cas, le travail élémentaire est une différentielle d'une fonction  $\delta W(\vec{F}) = d(Fz)$ .

On peut alors calculer le travail de la force le long d'une trajectoire allant d'un point  $A$  en  $z_A$  et un point  $B$  en  $z_B$

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_{z_A}^{z_B} Fdz = F \int_{z_A}^{z_B} dz = F(z_A - z_B).$$

On remarque que le travail de cette force ne dépend pas du chemin parcouru mais seulement des points d'arrivée et de départ de la trajectoire : on dit que **la force est conservative**. Le travail d'une telle force sur les chemins illustrés sur la Figure 5.25 sont les mêmes :  $W_{\mathcal{L}_1}(\vec{F}) = W_{\mathcal{L}_2}(\vec{F}) = W_{\mathcal{L}_3}(\vec{F}) = W_{\mathcal{L}_4}(\vec{F})$ .

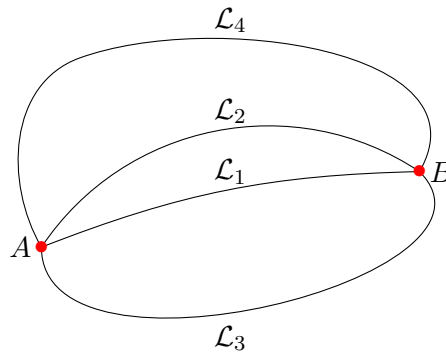


Figure 5.25 – Schéma de différents chemins entre les points  $A$  et  $B$ .

Une caractéristique de ce type de force est que lorsqu'on calcule leur travail le long d'une trajectoire fermée, une boucle, ce dernier est nul :

$$W_{AA}(\vec{F}) = \int_A^A \delta W(\vec{F}) = F(z_A - z_A) = 0.$$

- **Force de frottement fluide** Considérons une force de frottements  $\vec{f}$  de norme constante  $\|f\|$ . Comme les forces de frottements sont toujours opposées au mouvement la puissance développée par la force  $\vec{f}$  est

$$\mathcal{P}(t) = \vec{f} \cdot \vec{v}(t) = -\|f\|\vec{v}(t)$$

avec  $\|\vec{v}(t)\|$  la norme de la vitesse du point  $M$  à l'instant  $t$ . Les puissance des forces de frottements sont donc toujours négatives, **leur puissance sont donc toujours résistantes, on qualifie de telles forces de dissipatives.**

Le travail élémentaire de la force  $\vec{f}$  est

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(t)dt = -\|f\|\vec{v}(t)dt = -\|f\|\vec{v}(t)dt = -\|f\|d\vec{OM} = -\|f\|dl$$

avec  $dl$  la longueur du vecteur déplacement infinitésimal  $d\vec{OM}$ . On constate que le travail élémentaire n'est pas la différentielle d'une fonction.

Le travail de la force  $\vec{f}$  le long d'un chemin entre les points  $A$  et  $B$  est donc

$$W_{AB}(\vec{f}) = \int_A^B \delta W(\vec{f}) = \int_A^B -\|f\|dl = -\|f\| \int_A^B dl = -\|f\|\mathcal{L}_{AB}$$

avec  $\mathcal{L}_{AB}$  la longueur du chemin entre les points  $A$  et  $B$ . On constate donc que les travaux d'une telle force sur les chemins illustrés Figure 5.25 sont différents :  $W_{\mathcal{L}_1}(\vec{F}) > W_{\mathcal{L}_2}(\vec{F}) > W_{\mathcal{L}_3}(\vec{F}) > W_{\mathcal{L}_4}(\vec{F})$ .

## IV.2. Théorème de l'énergie cinétique

Le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence du principe fondamental de la dynamique.

### IV.2.a Démonstration

Considérons un point  $M$  de masse  $m$  constante animé du vitesse  $\vec{v}$  sur lequel s'exerce différentes forces. D'après le PFD

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

avec  $i$  l'indice des différentes force. Ainsi

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i.$$

En multipliant scalairement par  $\vec{v}$  cette dernière équation il vient que

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v}$$

$$m \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = \sum_i \left( \vec{F}_i \cdot \vec{v} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i).$$

On constate que la somme des puissances des forces qui s'exercent sur le point  $M$  est égale à la dérivée temporelle de la grandeur  $\frac{1}{2} m v^2$ . Cette grandeur est donc homogène à une énergie, par définition, **il s'agit de l'énergie cinétique du point  $M$  notée  $\mathcal{E}_c$**  telle que

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i).$$

Si on intègre cette dernière relation par rapport au temps entre les instants  $t_A$  et  $t_B$  où le point  $M$  est respectivement aux points  $A$  et  $B$  avec une vitesse de valeur  $v_A$  et  $v_B$  il vient que

$$\begin{aligned} \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} dt &= \int_{t_A}^{t_B} \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt \\ \mathcal{E}_c(t_B) - \mathcal{E}_c(t_A) &= \sum_i \left( \int_{t_A}^{t_B} \mathcal{P}(\vec{F}_i) dt \right) \\ \Delta\mathcal{E}_c &= \sum_i \left( \int_{t_A}^{t_B} \delta W(\vec{F}_i) \right) \\ \Delta\mathcal{E}_c &= \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i) \end{aligned}$$

on obtient une relation entre l'énergie cinétique du point  $M$  et la puissance de toutes les forces qui s'exercent sur lui.

#### IV.2.b Énoncé et discussions

À partir des démonstrations précédentes, nous pouvons énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

## ♥ Définitions

Le théorème de l'énergie cinétique peut se formuler de deux manières.

- **Théorème de l'énergie cinétique**

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  entre deux points  $A$  et  $B$  dans un référentiel galiléen est égal à la somme des travaux de toutes les forces le long de la trajectoire  $AB$

$$\Delta \mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i).$$

- **Théorème de la puissance cinétique**

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  dans un référentiel galiléen est égale à la somme des puissances de toutes les forces

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i).$$

On utilise le théorème de l'énergie cinétique dans deux cas.

- À partir de la variation d'énergie cinétique  $\Delta \mathcal{E}_c$  on déduit le travail de la somme des travaux des forces le long de la trajectoire  $\mathcal{L}$  étudiée  $\sum_i W_{\mathcal{L}}(\vec{F}_i)$ .
- À partir des travaux des forces  $\sum_i W_{\mathcal{L}}(\vec{F}_i)$  on déduit la variation de l'énergie cinétique  $\Delta \mathcal{E}_c$ .

C'est la première utilisation qui est la plus courante car il est plus facile d'exprimer la variation d'énergie cinétique.

Comme le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence du PFD, en utilisant le théorème, on utilise implicitement le PFD. Néanmoins comme le PFD repose sur une expression vectorielle, donc trois expressions scalaires, et le théorème de l'énergie cinétique repose sur une seule expression scalaire, **il y a perte d'information lors de l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique.**

Afin de ne pas perdre d'information, il faut utiliser le théorème de l'énergie cinétique lorsque la situation étudiée n'implique qu'un **seul paramètre de position** comme c'est le cas dans l'application suivante.

#### IV.2.c Application au cas du pendule simple

Nous allons utiliser le théorème de la puissance cinétique dans le cas du pendule simple. Comme nous l'avons vu, un seul paramètre nous permet de décrire le mouvement du pendule, il s'agit de l'angle que fait ce dernier avec l'axe ( $Ox$ ) vertical orienté vers le bas, nous évitons donc une perte d'information.

Les expressions de la variation de l'énergie cinétique et de la puissances des forces exercés sur le pendule nous permettront d'obtenir l'équation de son mouvement.

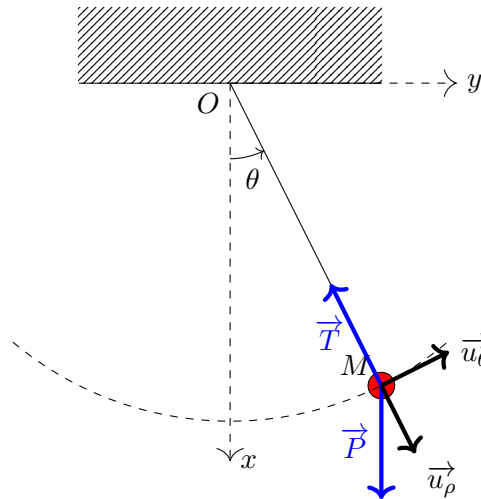


Figure 5.26 – Schéma du pendule simple.

Nous avons vu que dans le repère cylindro-polaire la vitesse du pendule était orthoradiale

$$\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

et qu'il était soumis à deux forces, la tension du fil  $\vec{T}_f$  et son poids  $\vec{P}$  telles que

$$\vec{T}_f = -T\vec{u}_\rho \quad \vec{P} = mg \cos\theta\vec{u}_\rho - mg \sin\theta\vec{u}_\theta.$$

En utilisant le théorème de la puissance cinétique il vient que

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}mv^2 \right) &= \mathcal{P}(\vec{T}_f) + \mathcal{P}(\vec{P}) \\ \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} (L^2\dot{\theta}^2) &= \vec{T}_f \cdot \vec{v} + \vec{P} \cdot \vec{v} \\ \frac{1}{2}mL^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} &= -T\vec{u}_\rho \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta + mg \cos\theta\vec{u}_\rho \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta - mg \sin\theta\vec{u}_\theta \cdot L\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} &= -mgL\dot{\theta}\sin\theta \\ \ddot{\theta} &= -\frac{g}{L}\sin\theta. \end{aligned}$$

On retrouve l'équation du mouvement du pendule simple. En considérant des amplitudes angulaires faibles, on peut retrouver l'expression d'un oscillateur harmonique.

### IV.3. Énergie potentielle et forces conservatives

En calculant le travail d'une force constante nous avons montré que cette dernière entrait dans la catégorie des forces conservatives. On peut donner une définition générale de ce type de forces.

## IV.3.a Définitions

## ♥ Définitions

- Une force  $\vec{F}$  est conservative si son travail élémentaire  $\delta W(\vec{F})$  correspond à la différentielle d'une fonction de la variable de position  $g(\vec{OM})$  tel que  $\delta W(\vec{F}) = dg(\vec{OM})$ .
- L'opposé de cette fonction est appelée l'énergie potentielle de la force noté  $\mathcal{E}_p$  telle que

$$\vec{F} \cdot d\vec{OM} = \delta W(\vec{F}) = dg = -d\mathcal{E}_p.$$

On dit que la force  $\vec{F}$  conservative dérive d'un potentiel. Le travail d'une telle force le long d'une trajectoire  $AB$  est égale à la différence d'énergies potentielles entre les point  $A$  et  $B$

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = - \int_A^B d\mathcal{E}_p = \int_B^A d\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B).$$

On constate que le travail d'une force conservative le long d'une trajectoire fermée, soit d'une boucle, est nulle

$$W_{AA}(\vec{F}) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(A) = 0$$

## 👉 Nota bene

L'énergie potentielle est une fonction de la variable de position  $\vec{OM}$ .

Les forces conservatives sont les seules forces pour lesquelles le travail élémentaire correspond à une différentielle. Le travail de ces forces ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des points d'arrivée et de départ de la trajectoire étudiée.

## IV.3.b Exemples de forces

Considérons différentes forces et déterminons si elles sont conservatives ou non conservatives.

## ■ Poids d'un corps

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  dans un champ de pesanteur  $\vec{g}$ . On considère que le vecteur champ de pesanteur est orienté dans le sens opposé à l'axe  $(Oz)$ . Le travail élémentaire du poids  $\vec{P}$  de ce corps est

$$\delta W = \vec{P} \cdot d\vec{OM}$$

soit dans le repère cartésien

$$\delta W = -mg\vec{u}_z \cdot (dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z)$$

$$\delta W = -mgdz.$$

On constate l'on peut écrire le travail élémentaire sous la forme de la différentielle d'une fonction de la variable de position telle que

$$\delta W = d(-mgz)$$

ce qui nous permet la différentielle de l'énergie potentielle de pesanteur

$$\mathcal{E}_p = d(mgz)$$

le poids est donc une force conservative.

On peut intégrer cette dernière relation pour obtenir l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur

$$\mathcal{E}_p = \int d(mgz) = mgz + \text{cst.}$$

L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près. Dans le cas étudié, on peut fixer arbitrairement comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur l'énergie potentielle de pesanteur de l'altitude  $z = 0$  : on la prend égale à 0, soit  $\mathcal{E}_p(z = 0) = 0$ . Il vient que

$$\mathcal{E}_p(z = 0) = mg \times 0 + \text{cst} = 0$$

donc  $\text{cst} = 0$ , soit

$$\mathcal{E}_p(z) = mgz.$$

#### ■ Force gravitationnelle exercée par un corps

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à la force gravitationnelle exercée par un corps de masse  $m_p$  dont le centre  $P$  est à l'origine d'un repère sphérique. La force gravitationnelle est telle que

$$\vec{F}_{P/M} = -\mathcal{G} \frac{mm_p}{r^2} \vec{u}_r$$

avec  $\mathcal{G}$  la constante de gravitation universelle,  $r = \|\vec{PM}\|$  la distance entre le centre  $P$  du corps et le point  $M$  et  $\vec{u}_r = \frac{\vec{PM}}{r}$ , le vecteur unitaire porté par la droite passant par les points  $P$  et  $M$  et orienté de  $P$  vers  $M$ .

Le travail élémentaire de cette force est

$$\delta W = \vec{F}_{P/M} \cdot d\vec{PM}$$

soit dans le repère sphérique

$$\delta W = -\mathcal{G} \frac{mm_p}{r^2} \vec{u}_r \cdot dr \vec{u}_r$$

$$\delta W = -\mathcal{G} \frac{mm_p}{r^2} dr.$$

On constate l'on peut écrire le travail élémentaire sous la forme de la différentielle d'une fonction de la variable de position telle que

$$\delta W = -\mathcal{G} mm_p \frac{dr}{r^2} = -\mathcal{G} mm_p d\left(-\frac{1}{r}\right) = d\left(\frac{\mathcal{G} mm_p}{r}\right)$$

ce qui nous permet la différentielle de **l'énergie potentielle associée à la force gravitationnelle**

$$\mathcal{E}_p = d\left(-\mathcal{G} \frac{mm_p}{r}\right)$$

**la force gravitationnelle est donc une force conservative.**

En intégrant cette dernière relation

$$\mathcal{E}_p = \int dd\left(-\mathcal{G} \frac{mm_p}{r}\right) = -\mathcal{G} \frac{mm_p}{r} + \text{cst.}$$

Dans le cas étudié, on peut fixer arbitrairement comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur l'énergie potentielle pour  $r \rightarrow \infty$  : on la prend égale à 0, soit  $\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = 0$ . Il vient que

$$\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = m - \mathcal{G} \frac{mm_p}{r} + \text{cst} = 0$$

donc  $cst = 0$ , soit

$$\mathcal{E}_p(r) = -\mathcal{G} \frac{mm_p}{r}.$$

■ **Force de rappel d'un ressort**

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  attaché à une extrémité d'un ressort de constante de raideur  $k$  et longueur à vite  $l_0$  attaché à son autre extrémité à un support positionné à l'origine  $O$  d'un repère. On considère que le ressort est aligné selon l'axe  $(Ox)$ . La force de rappel du ressort exercé sur  $M$  est

$$\vec{T}_{r/M} = -k(x - l_0)\vec{u}_x.$$

Le travail élémentaire de cette force est

$$\delta W = \vec{T}_{r/M} \cdot d\vec{OM}$$

soit dans le repère cartésien

$$\delta W = -k(x - l_0)\vec{u}_x \cdot (dx \cdot \vec{u}_x + dy \cdot \vec{u}_y + dz \cdot \vec{u}_z)$$

$$\delta W = -k(x - l_0) dx.$$

On constate l'on peut écrire le travail élémentaire sous la forme de la différentielle d'une fonction de la variable de position telle que

$$\delta W = -k(x - l_0) dx = -k d\left(\frac{1}{2}(x - l_0)^2\right) = d\left(-\frac{1}{2}k(x - l_0)^2\right)$$

ce qui nous permet la différentielle de **l'énergie potentielle associée à la force de rappel du ressort**

$$\mathcal{E}_p = d\left(\frac{1}{2}k(x - l_0)^2\right)$$

**la force de rappel du ressort est donc une force conservative.**

En intégrant cette dernière relation

$$\mathcal{E}_p = \int d\left(\frac{1}{2}k(x - l_0)^2\right) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2 + cst.$$

Dans le cas étudié, on peut fixer arbitrairement comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur l'énergie potentielle du ressort lorsqu'il atteint sa longueur au repos  $x = l_0$  : on la prend égale à 0, soit  $\mathcal{E}_p(x = l_0) = 0$ . Il vient que

$$\mathcal{E}_p(r \rightarrow \infty) = \frac{1}{2}k(l_0 - l_0)^2 + cst = 0$$

donc  $cst = 0$ , soit

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2.$$



■ **Force de frottement fluide**

Considérons un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis à une force de frottements fluides telle que

$$\vec{f} = -k_1 \vec{v}.$$

Le travail élémentaire de cette force est

$$\delta W = \vec{f} \cdot d\vec{OM}$$

soit

$$\delta W = -k_1 \vec{v} \cdot d\vec{OM} = -k_1 \vec{v} \cdot \vec{v} dt = -k_1 v^2 dt.$$

On constate que le travail élémentaire de la force de frottements fluides ne peut pas se mettre sous la forme d'une différentielle d'une fonction de la variable de position, **la force de frottements fluides n'est donc pas une force conservative.**

On voit au contraire que le travail élémentaire de cette force est toujours négatif : **la force de frottements fluides sont dissipatives**, elles dissipent de l'énergie.

#### IV.4. Théorème de l'énergie mécanique

À partir du théorème de l'énergie cinétique nous pouvons faire émerger une nouvelle grandeur.

##### IV.4.a Démonstration

Le théorème de l'énergie cinétique stipule que la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel  $M$  entre deux points  $A$  et  $B$  dans un référentiel galiléen est

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i).$$

Nous pouvons séparer la somme des travaux en somme des travaux des forces conservatives et non conservatives

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^C) + \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^{NC})$$

or nous pouvons exprimer le travail d'une force conservative entre les points  $A$  et  $B$  en fonction de la différence d'énergie potentielle de cette force entre ces points de telle manière que

$$W_{AB}(\vec{F}_i^C) = \mathcal{E}_p(A) - \mathcal{E}_p(B)$$

donc

$$\mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) = \sum_i (\mathcal{E}_{p,i}(A) - \mathcal{E}_{p,i}(B)) + \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^{NC})$$

soit

$$\mathcal{E}_c(B) + \sum_i \mathcal{E}_{p,i}(B) - \left( \mathcal{E}_c(A) + \sum_i \mathcal{E}_{p,i}(A) \right) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^{NC})$$

ou

$$\Delta(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^{NC})$$

avec  $\mathcal{E}_p$  la somme des énergies potentielles du système, et  $\Delta(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p)$  la variation de la somme des énergies cinétique et potentielles. La somme de ces énergies correspond à une nouvelle grandeur appelée **énergie mécanique**.

## ♥ Définition

**L'énergie mécanique**  $\mathcal{E}_m$  d'un point matériel est la somme de son énergie cinétique et de ses énergies potentielles

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p.$$

On peut alors énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

## IV.4.b Énoncé

## ♥ Définitions

Le théorème de l'énergie mécanique peut se formuler de deux manières.

- **Théorème de l'énergie mécanique**

La variation de l'énergie mécanique d'un point matériel  $M$  entre deux points  $A$  et  $B$  dans un référentiel galiléen est égale à la somme des travaux de toutes les forces non conservatives le long de la trajectoire  $AB$

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^{NC}).$$

- **Théorème de la puissance mécanique**

La dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique d'un point matériel  $M$  dans un référentiel galiléen est égale à la somme des puissances de toutes les forces non conservatives

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i^{NC}).$$

 **Nota bene**

À partir du théorème de l'énergie mécanique, on constate que dans le cas d'un mouvement conservatif, c'est-à-dire dans le cas où il n'y a pas de forces non conservatives, la différence d'énergie mécanique est toujours nulle tout au long du mouvement : **l'énergie mécanique est alors une quantité qui se conserve au cours du mouvement, c'est une constante du mouvement**

$$\Delta \mathcal{E}_m = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i^{NC}) = 0$$

soit

$$\mathcal{E}_m = \text{cst} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \sum_i g_i(\vec{OM})$$

avec  $g_i(\vec{OM})$  des fonctions de la variable de position.

L'énergie mécanique n'est alors fonction que de la position et de la vitesse, soit de la dérivée première de la position par rapport au temps : **on dit que l'énergie mécanique est une intégrale première du mouvement.**

L'énergie mécanique peut aussi être une constante du mouvement si les seules forces non conservatives sont perpendiculaires au mouvement à tout instant.

#### IV.5. Étude qualitative des mouvements conservatifs à une dimension

Dans cette section, nous allons nous limiter aux systèmes qui se déplacent le long d'un axe sous l'action de forces conservatives.

##### IV.5.a Position du problème

Soit un point matériel  $M$  de masse  $m$  soumis uniquement à une force conservative  $\vec{F}$ , qui dérive donc de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$ . Si le mouvement de  $M$  est décrit dans un repère cartésien, l'énergie potentielle, étant une fonction de la position, dépend des variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  :  $\mathcal{E}_p(x, y, z)$ .

On peut obtenir l'expression de la force conservative  $\vec{F}$  qui dérive de  $\mathcal{E}_p(x, y, z)$

$$\begin{aligned} -d\mathcal{E}_p(x, y, z) &= \vec{F} \cdot d\vec{OM} = \vec{F} \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ -d\mathcal{E}_p(x, y, z) &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

or on peut exprimer la différentielle du fonction  $f$  dépendant de plusieurs variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  telle que

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

avec  $\frac{\partial f}{\partial x}$  la **dérivée partielle de  $f$**  par rapport à  $x$ , soit la dérivée de  $f$  par rapport à  $x$  en considérant que  $y$  et  $z$  sont des constantes pour  $f$ .

On peut alors exprimer la différentielle de l'énergie potentielle à partir de ses dérivées partielles

$$d\mathcal{E}_p(x, y, z) = \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} dz.$$

ce qui nous permet d'identifier les composantes de la force  $\vec{F}$

$$F_x = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \quad F_y = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \quad F_z = -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z}.$$

On peut introduire un nouvel opérateur mathématique : **le gradient**.

### ♥ Définition

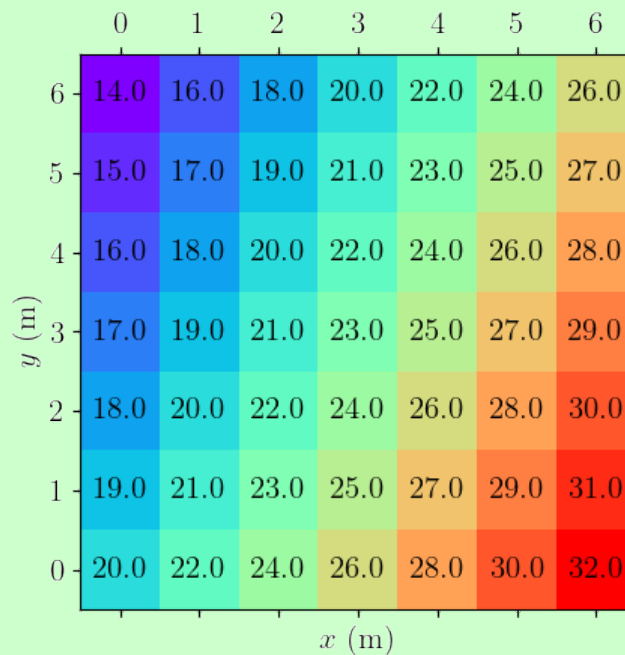
**Le gradient** d'un champ scalaire  $U$  noté  $\overrightarrow{\text{grad}}U$  ou  $\overrightarrow{\nabla}U$  est un vecteur qui indique comment varie  $U$  dans l'espace et est défini tel que

$$\overrightarrow{\nabla}U = \frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

dans le cas d'un repère cartésien.

Par exemple si on considère le champ de température  $T(x, y)$  à deux dimensions présenté Figure 5.27, on voit que la température augmente de 2 degrés Celcius par mètre le long de l'axe ( $Ox$ ) et diminue de 1 degré Celcius par mètre le long de l'axe ( $Oy$ ). Le gradient de température est donc

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\nabla}T(x, y) &= \frac{\partial T}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{u}_y \\ \overrightarrow{\nabla}T(x, y) &= 2 \text{ }^\circ\text{C.m}^{-1} \vec{u}_x - 1 \text{ }^\circ\text{C.m}^{-1} \vec{u}_y. \end{aligned}$$



**Figure 5.27** – Carte du champ de température  $T(x, y)$  en degré Celcius.

On peut alors réexprimer la force conservatrice  $\vec{F}$

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z \\ \vec{F} &= -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \vec{u}_x + -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \vec{u}_y + -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \vec{u}_z\end{aligned}$$

on reconnaît l'expression du gradient de l'énergie potentielle

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p.$$

Nous nous limitons ici au cas où  $M$  se déplace seulement le long de l'axe ( $Ox$ ) sous l'action d'une seule force conservatrice  $\vec{F}$ . L'énergie potentielle est donc seulement fonction de  $x$  et l'on peut exprimer la force  $\vec{F}$  telle que

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \vec{u}_x = F_x \vec{u}_x.$$

On remarque que l'on a affaire à une dérivée et pas une dérivée partielle car, **dans ce cas précis, l'énergie potentielle ne dépend que de la position selon  $x$ .**

D'après le théorème de l'énergie mécanique, dans le cas d'un mouvement sous l'action de forces conservatives, l'énergie mécanique se conserve, soit

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(x) = \text{cst}$$

or comme l'énergie cinétique est toujours positive il vient que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \\ \mathcal{E}_c &= \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(x) \geq 0\end{aligned}$$

l'énergie mécanique est supérieure ou égale à l'énergie potentielle

$$\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p(x).$$

Cette condition et la relation entre les différentes énergies du système va nous permettre d'obtenir des informations qualitatives concernant son mouvement.

#### IV.5.b Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe énergétique

On considère que nous connaissons la variation de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$  en fonction de la position  $x$ . On considère également que nous connaissons la valeur de l'énergie mécanique du système  $\mathcal{E}_m$ . Étudions un profil d'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$  particulier et différentes valeurs d'énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m1}$ ,  $\mathcal{E}_{m2}$  et  $\mathcal{E}_{m3}$ .

Dans chaque cas, l'énergie mécanique du système étant constante, on représente ces différentes valeurs par des droites en pointillés sur la Figure 5.28.

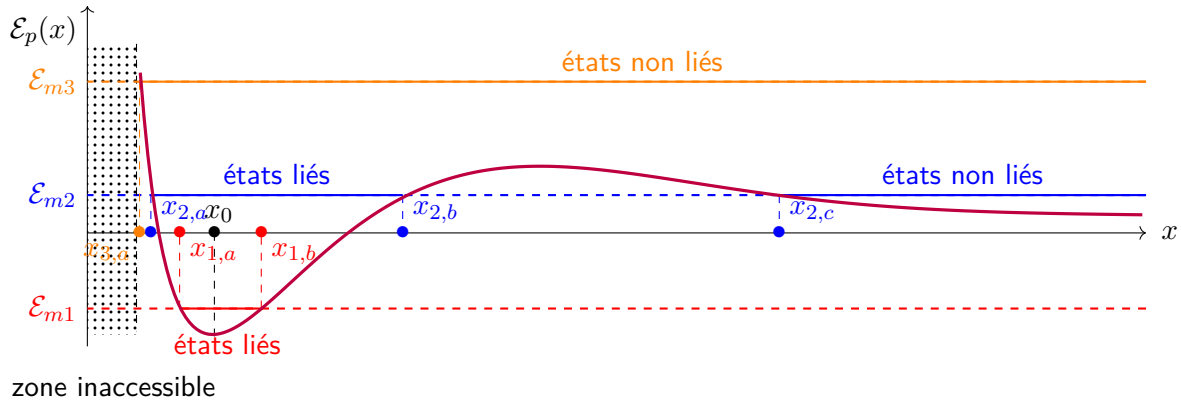


Figure 5.28 – Énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$  du point matériel  $M$  avec une énergie mécanique  $\mathcal{E}_{m1}$ ,  $\mathcal{E}_{m2}$  et  $\mathcal{E}_{m3}$ .

#### ■ Énergie mécanique $\mathcal{E}_{m1}$

Graphiquement, pour que l'inégalité  $\mathcal{E}_{m1} \geq \mathcal{E}_p(x)$  soit respecté, le point matériel  $M$  ne doit accéder qu'aux positions en  $x$  pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle violette  $\mathcal{E}_p(x)$  est sous la droite en pointillées rouge d'ordonnée  $\mathcal{E}_{m1}$ . Dans ce cas la position de  $M$  est compris entre les positions  $x_{1,a}$  et  $x_{1,b}$ .

Pour cette valeur de  $\mathcal{E}_{m1}$ , **l'énergie potentielle est maximale pour les positions  $x_{1,a}$  et  $x_{1,b}$**  :

$$\mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_p(x_{1,a}) = \mathcal{E}_p(x_{1,b}).$$

Comme  $\mathcal{E}_{m1} = \mathcal{E}_c(x) + \mathcal{E}_p(x)$ , **on peut obtenir la valeur de l'énergie cinétique en un point  $x$  en mesurant l'écart entre la droite d'ordonnée  $\mathcal{E}_{m1}$  et la courbe  $\mathcal{E}_p(x)$** . On peut ainsi obtenir la vitesse  $v(x)$  en ce point  $x$

$$\mathcal{E}_c(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 = \mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_p(x)$$

$$\mathcal{E}_c(x) = \frac{1}{2}mv(x)^2 = \sqrt{\frac{2(\mathcal{E}_{m1} - \mathcal{E}_p(x))}{m}}.$$

On constate que **l'énergie cinétique de  $M$  est nulle pour  $x_{1,a}$  et  $x_{1,b}$ , la vitesse du point  $M$  est nulle pour ces positions.**

En  $x_0$ , on constate que l'énergie potentielle de  $M$  est minimale, donc **en  $x_0$  l'énergie cinétique est maximale, la vitesse du point  $M$  est maximale pour cette position.**

Le point  $M$  est donc confiné entre les positions  $x_{1,a}$  et  $x_{1,b}$ , aux voisinage du **minimum local** d'énergie potentielle en  $x_0$ . On dit que pour cette valeur de  $\mathcal{E}_{m1}$ , **l'énergie potentielle constitue un puits de potentiel**. Pour cette valeur de  $\mathcal{E}_{m1}$ , le point  $M$  ne peut s'échapper de ces positions, on dit qu'il est dans **un état confiné ou état lié**, il n'a pas assez d'énergie cinétique pour franchir **les barrières de potentiels** au delà des points  $x_{1,a}$  et  $x_{1,b}$ . Lorsque le point  $M$  s'approche des bords du puits sa vitesse diminue jusqu'à s'annuler, et quand il s'approche du fond du puits, sa vitesse augmente jusqu'à atteindre un maximum au niveau du minimum local d'énergie potentielle. Le système va osciller périodiquement entre les points  $x_{1,a}$  et  $x_{1,b}$ .

#### ■ Énergie mécanique $\mathcal{E}_{m2}$

Graphiquement, pour que l'inégalité  $\mathcal{E}_{m2} \geq \mathcal{E}_p(x)$  soit respecté, le point matériel  $M$  ne doit accéder qu'aux positions en  $x$  pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle violette  $\mathcal{E}_p(x)$  est sous la droite en pointillées bleus d'ordonnée  $\mathcal{E}_{m2}$ . Dans ce cas la position de  $M$  est compris entre les positions  $x_{2,a}$  et  $x_{2,b}$ , ou entre les positions  $x_{2,c}$  et  $x \rightarrow \infty$ .

Entre les positions  $x_{2,a}$  et  $x_{2,b}$  l'énergie potentielle forme de nouveau un puits de potentielle et le point  $M$  est dans un état lié pour n'importe quelle position  $x$  entre  $x_{2,a}$  et  $x_{2,b}$ .

Pour  $x \geq x_{2,c}$ , il n'y a pas de puits de potentiel, mais une seule borne, une seule barrière de potentielle en  $x_{2,c}$  qui empêche le point  $M$  de se déplacer en deçà. Comme le point  $M$  n'est pas borné, son déplacement est illimité d'un côté de l'axe ( $Ox$ ), on dit qu'il est dans **un état non liés, état de diffusion ou état libre**.

On constate que l'énergie potentielle est maximale et l'énergie cinétique nulle pour les positions  $x_{2,a}$ ,  $x_{2,b}$  et  $x_{2,c}$ . En  $x_0$  l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle est minimale.

#### ■ Énergie mécanique $\mathcal{E}_{m3}$

Graphiquement, pour que l'inégalité  $\mathcal{E}_{m3} \geq \mathcal{E}_p(x)$  soit respecté, le point matériel  $M$  ne doit accéder qu'aux positions en  $x$  pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle violette  $\mathcal{E}_p(x)$  est sous la droite en pointillées orange d'ordonnée  $\mathcal{E}_{m3}$ . Dans ce cas la position de  $M$  est compris entre les positions  $x_{3,a}$  et  $x \rightarrow \infty$ .

Pour  $x \geq x_{3,a}$ , il n'y a pas de puits de potentiel, mais une seule borne, une seule barrière de potentielle en  $x_{3,a}$  qui empêche le point  $M$  de se déplacer en deçà. Comme le point  $M$  n'est pas borné, son déplacement est illimité d'un côté de l'axe ( $Ox$ ), on dit qu'il est dans **un état non liés, état de diffusion ou état libre**.

On constate que l'énergie potentielle est maximale et l'énergie cinétique nulle pour la positions  $x_{3,a}$ . En  $x_0$  l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle est minimale.

#### IV.5.c Analyse des équilibres l'aide d'un graphe énergétique

##### ♥ Définition

**Un système est en équilibre** lorsque sa vitesse est nulle à toute instant. Si la vitesse est constamment nulle alors l'accélération est aussi nulle, et donc d'après le PFD, pour un système à l'équilibre la somme des forces qui s'exercent sur lui est nulle

$$\sum \vec{F}_i = \vec{0}.$$

Si on considère un point matériel  $M$  où seule la force  $\vec{F} = F_x \vec{u}_x$  s'exerce, le système est en équilibre lorsque  $F_x = 0$  donc lorsque  $\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0$ , soit quand **l'énergie potentielle atteint un extremum**.

Sur la Figure 5.29 les positions d'équilibre pour le profil d'énergie potentielle considéré  $\mathcal{E}_p(x)$  sont  $x_{eq,1}$  et  $x_{eq,2}$ .

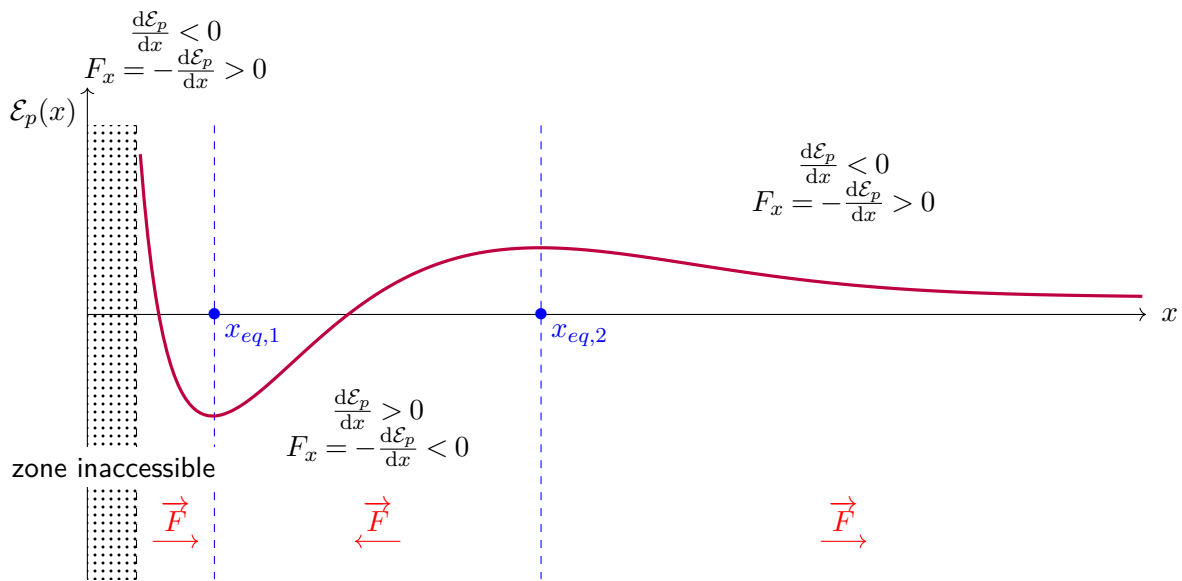


Figure 5.29 – Étude des équilibres pour le profil d'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(x)$ .

La lecture du graphique nous permet également d'obtenir le sens de la force  $\vec{F}$ . Comme la force  $\vec{F}$  dérive de l'énergie potentielle  $\mathcal{E}_p$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \vec{u}_x$$

en déterminant le signe de  $-\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$ , on peut obtenir le sens de  $\vec{F}$ .

Si l'énergie potentielle décroît avec  $x$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} < 0 \quad \text{donc} \quad F_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} > 0$$

la force est orientée vers les  $x > 0$ .

Si l'énergie potentielle croît avec  $x$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} > 0 \quad \text{donc} \quad F_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} < 0$$

la force est orienté vers les  $x < 0$ .

Finalement, en étudiant la figure, on peut généraliser notre étude.

#### Nota bene

La résultante des force  $\sum_i \vec{F}_i$  d'un système est toujours orientée vers les minima d'énergie potentielle.

La connaissance de l'orientation de la force nous permet de définir si une position d'équilibre est stable ou instable.



### ♥ Définitions

- **Un système est en équilibre stable** si lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre initiale, il revient à sa position d'équilibre.  
Cela signifie que les forces qui s'exercent sur le système sont orienté vers la position d'équilibre. **Les minima de l'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre stables.**
- **Un système est en équilibre instable** si lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre initiale, il ne revient pas à sa position d'équilibre.  
Cela signifie que les forces qui s'exercent sur le système sont orientées dans le sens opposé à celle allant vers la position d'équilibre. **Les maxima de l'énergie potentielle correspondent à des positions d'équilibre instables.**

L'énergie potentielle est extrémale pour les points  $x$  tels que

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0$$

ces points sont donc des points d'équilibres qu'on peut noter  $x_{eq}$ .

Un extremum d'énergie potentielle en un point  $x_{eq}$  correspond à un minimum d'énergie potentielle lorsque

$$\left( \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x=x_{eq}} > 0$$

ce point correspond à un point d'équilibre stable.

Un extremum d'énergie potentielle en un point  $x_{eq}$  correspond à un maximum d'énergie potentielle lorsque

$$\left( \frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x=x_{eq}} < 0$$

ce point correspond à un point d'équilibre instable.

## IV.6. Mouvement conservatif dans un puits de potentiel

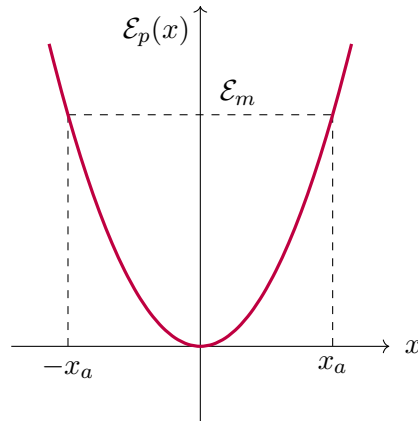
### IV.6.a Puits de potentiel harmonique

Nous nous plaçons toujours dans le cas d'un point matériel  $M$  soumis uniquement à une force conservative  $\vec{F}$ , donc ayant un mouvement conservatif.

Nous allons considérer que ce système a un profil d'énergie potentielle particulier appelé **potentiel harmonique** tel que

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}kx^2.$$

Cela correspond au profil illustré sur la Figure 5.30.



**Figure 5.30** – Étude d'un potentiel harmonique  $\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}kx^2$ .

Le mouvement étant conservatif, l'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  du système est constante, elle est représentée par une droite en pointillé sur la figure. Comme nous l'avons vu, cela limite le domaine accessible au système aux positions  $x$  comprises entre  $-x_a$  et  $x_a$ . Le point matériel  $M$  oscille entre ces deux positions.

Pour un système à mouvement conservatif l'énergie mécanique peut être exprimée telle que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(x) = \text{cst} \\ \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mv(x)^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{cst}\end{aligned}$$

comme on considère un mouvement selon l'axe  $(Ox)$  la vitesse est  $\vec{v} = v(x)\vec{u}_x$ .

On considère que nous connaissons la position initiale  $x_0$  et la vitesse initiale  $v_0$  du point matériel  $M$  (qui ne sont pas forcément nulles). On peut alors déterminer l'expression de l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m = \text{cst} = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2.$$

L'étude du profil de l'énergie potentielle nous permet alors d'exprimer la position  $x_a$  en fonction de la position et de la vitesse initiales. On sait qu'en  $-x_a$  et  $x_a$ , l'énergie potentielle est maximale égale à l'énergie mécanique donc

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p(-x_a) = \mathcal{E}_p(x_a) = \frac{1}{2}kx_a^2$$

donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}kx_a^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \\ x_a &= \sqrt{\frac{m}{k}v_0^2 + x_0^2}.\end{aligned}$$

On peut obtenir l'équation du mouvement du point  $M$  en dérivant l'équation énergétique par rapport au temps

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mv(x)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &= \frac{1}{2}m\frac{d\dot{x}^2}{dt} + \frac{1}{2}k\frac{dx^2}{dt} \\ \frac{d\text{cst}}{dt} &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \\ 0 &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x}.\end{aligned}$$

Si on considère une autre solution que  $\dot{x} = 0$ , on peut diviser l'équation précédente par  $\dot{x}$ , il vient que

$$0 = m\ddot{x} + kx$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x.$$

On reconnaît **l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique** de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ , ce qui explique pourquoi on qualifie l'énergie potentielle de ce système de potentiel harmonique.

La solution générale de cette équation est

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t).$$

On peut introduire une nouvelle expression de la solution générale du paramètre d'un oscillateur harmonique en considérant que  $A = C \cos \varphi$  et  $B = C \sin \varphi$  (il existe toujours un angle  $\varphi$  pour lequel  $\frac{B}{A} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi$ ) ainsi

$$x(t) = C \cos \varphi \cos(\omega_0 t) + C \sin \varphi \sin(\omega_0 t)$$

en utilisant la relation trigonométrique  $\cos a \cos b + \sin a \sin b = \cos(a - b)$  il vient que

$$x(t) = C \cos(\varphi - \omega_0 t)$$

soit

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \varphi).$$

La valeur de la vitesse du point matériel  $M$  est donc

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 C \sin(\omega_0 t - \varphi).$$

On peut déterminer l'amplitude  $C$  et le retard de phase à l'origine  $\varphi$  du mouvement à partir des conditions initiales  $x_0$  et  $v_0$ . À  $t = 0$

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = C \cos(-\varphi) = C \cos \varphi \\ \dot{x}(t=0) = v_0 = -\omega_0 C \sin(-\varphi) = \omega_0 C \sin \varphi \end{cases}$$

On voit que

$$(C \cos \varphi)^2 + (C \sin \varphi)^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

$$C^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$$

$$C = \sqrt{\frac{m}{k} v_0^2 + x_0^2} = x_a$$

l'amplitude du mouvement  $C$  correspond bien à la position maximale  $x_a$  dans le puits de potentiel soit

$$x(t) = x_a \cos(\omega_0 t - \varphi).$$

On peut également déterminer  $\varphi$

$$x_0 = C \cos \varphi \quad \text{soit} \quad \cos \varphi = \frac{x_0}{x_a}$$

$$v_0 = \omega_0 C \sin \varphi \quad \text{soit} \quad \sin \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_a}$$

donc

$$\tan \varphi = \frac{v_0}{\omega_0 x_0}.$$

Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement, on pouvait également utiliser le PFD en explicitant la force agissant sur le point matériel  $M$ . Cette dernière s'obtient à partir du gradient de l'énergie potentielle

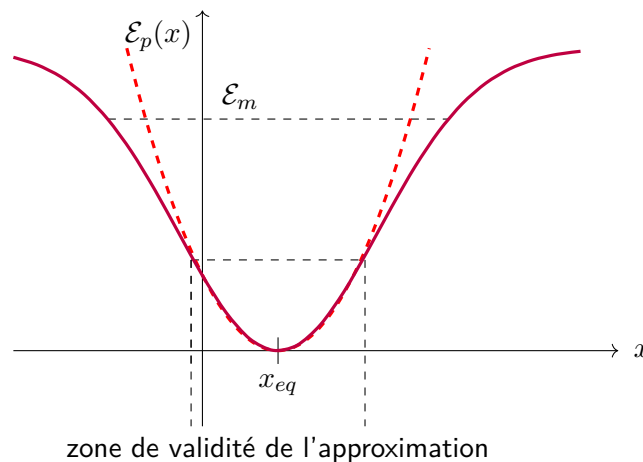
$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p(x) = -\frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} \vec{u}_x$$

$$\vec{F} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} k x^2 \right) \vec{u}_x = -k x \vec{u}_x$$

on reconnaît **une force de rappel élastique** similaire à la force de rappel d'un ressort de constante de raideur  $k$ .

#### IV.6.b Puits de potentiel quelconque

On ne considère plus un puits de potentiel harmonique mais un profil quelconque. On considère que ce profil présente un puits de potentiel, donc qu'il possède un minimum pour une position d'équilibre stable à la position  $x_{eq}$  comme illustré Figure 5.31.



**Figure 5.31** – Étude d'un potentiel quelconque approximé par un potentiel harmonique.

Approximons ce profil d'énergie potentiel  $\mathcal{E}_p(x)$  par son développement limité à l'ordre 2 au niveau de la position d'équilibre stable  $x_{eq}$

$$\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \left( \frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} \right)_{x=x_{eq}} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left( \frac{d^2\mathcal{E}_p(x)}{dx^2} \right)_{x=x_{eq}}.$$

Or on sait que pour une position d'équilibre l'énergie potentielle correspond à un extremum donc

$$\left( \frac{d\mathcal{E}_p(x)}{dx} \right)_{x=x_{eq}} = 0$$

donc

$$\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \left( \frac{d^2\mathcal{E}_p(x)}{dx^2} \right)_{x=x_{eq}}$$

de plus si on introduit la grandeur  $k = \left( \frac{d^2 \mathcal{E}_p(x)}{dx^2} \right)_{x=x_{eq}} > 0$  (car l'équilibre est stable) il vient que

$$\mathcal{E}_p(x) \approx \mathcal{E}_p(x_{eq}) + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2.$$

Comme on peut toujours choisir n'importe quelle référence pour l'énergie potentielle, on peut choisir  $\mathcal{E}_p(x_{eq}) = 0$ , il vient finalement que l'énergie potentielle quelconque au voisinage du point d'équilibre stable peut être approximé de telle manière que

$$\mathcal{E}_p(x) \approx \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2$$

ou

$$\mathcal{E}_p(X) \approx \frac{1}{2}kX^2$$

en effectuant le changement de variable  $X = x - x_{eq}$ . **On reconnaît l'expression d'un potentiel harmonique.**

#### ♥ Définition

Dans le cas de mouvements de faibles amplitudes au voisinage d'une position d'équilibre stable, **on peut approximer leur profil d'énergie potentiel par un potentiel harmonique**. Le mouvement correspond alors à des oscillations harmoniques centrée sur la position d'équilibre  $x_{eq}$  et de pulsation propre  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  avec  $k$  une constante de raideur élastique telle que

$$k = \left( \frac{d^2 \mathcal{E}_p(x)}{dx^2} \right)_{x=x_{eq}}.$$

## Synthèse

---

### Connaissances

- Puissance et travail d'une force dans un référentiel.
- Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen, dans le cas d'un système modélisé par un point matériel.
- Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle.
- Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.
- Mouvement conservatif à une dimension. Cas d'une situation modélisable par un système masse-ressort et d'un système soumis à un champ de force uniforme.
- Positions d'équilibre. Stabilité.
- Petits mouvements au voisinage d'une position d'équilibre stable, approximation locale par un puits de potentiel harmonique.

### Savoir-faire

- **Reconnaître** le caractère moteur ou résistant d'une force.
- **Exploiter** le théorème de l'énergie cinétique.
- **Établir et citer** les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle, de l'énergie potentielle élastique.
- **Exploiter** la conservation de l'énergie mécanique pour analyser un mouvement.
- **Déduire** qualitativement du graphe d'une fonction énergie potentielle le sens et l'intensité de la force associée pour une situation à un degré de liberté.
- **Identifier** sur un graphe d'énergie potentielle une barrière et un puits de potentiel. **Déduire** d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- **Déduire** d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. **Analyser** qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
- **Établir** l'équation différentielle linéarisée du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.

## Leçon V. Mouvement d'une particule chargée dans un champ

A l'instar d'une particule dotée d'une masse soumise à une force exercée par un champ de pesanteur, une particule dotée d'une charge est soumise à des forces exercées par un champ électrique et/ou un champ magnétique.

Le mouvement des particules chargées est un sujet important car il implique de nombreuses applications : mouvement des électrons dans un fil électrique, affichage électronique, accélérateur de particules, spectromètre de masse, cyclotron.

On considère ici que les particules ont des vitesses faibles devant celle de la lumière, ce qui n'est pas le cas le plus général. On étudie également des champs électriques et magnétiques uniformes.

### V.1. Force de Lorentz

#### V.1.a Définition

Une particule de charge  $q$  et de vitesse  $\vec{v}$  dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  est soumise à une force appelée **force de Lorentz** telle que

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

avec  $\wedge$  le signe du produit vectoriel entre deux vecteurs.

On peut scinder la force Lorentz en deux forces.

La part électrique de la force de Lorentz ou **force électrique**

$$\vec{F}_{elec} = q\vec{E}.$$

Le mouvement de la particule est dans le sens du champ si sa charge est positive, et le mouvement est opposé si sa charge est négative.

et la part magnétique de la force de Lorentz ou **force magnétique**

$$\vec{F}_{mag} = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Pour obtenir la direction et le sens de cette force, il nous faut étudier le produit vectoriel. On peut néanmoins comparer en ordre de grandeur les normes de ces forces par rapport au poids d'une particule quantique.

#### V.1.b Comparaison avec le poids

Prenons, par exemple, un proton. La masse d'un proton est  $m_p = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg et sa charge est  $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  C.

Si un proton est plongé dans un champ électrique de norme  $E$ , la force électrique est comparable au poids lorsque

$$\|\vec{P}\| = \|\vec{F}_{elec}\|$$

$$mg = eE$$

soit quand la norme du champ électrique est telle que

$$E = \frac{mg}{e}$$

soit en ordre de grandeur

$$E \approx \frac{2 \cdot 10^{-27} \times 10}{2 \cdot 10^{-19}} = 10^{-7} \text{ V.m}^{-1}.$$

On voit qu'il suffit d'un champ électrique extrêmement faible que le poids d'une particule chargée soit compensée.

Considérons que ce même proton est plongé dans le champ magnétique terrestre de norme  $B$  proche de  $5.10^{-5}$  T (tesla). La force magnétique est comparable au poids lorsque

$$\|\vec{P}\| = \|\vec{F}_{mag}\|$$

$$mg = evB$$

soit quand la norme de la vitesse du proton est telle que

$$v = \frac{mg}{eB}$$

soit en ordre de grandeur

$$E \approx \frac{2.10^{-27} \times 10}{2.10^{-19} \times 5.10^{-5}} = 2.10^{-3} \text{ m.s}^{-1}.$$

Or, les protons peuvent atteindre très facilement des vitesses relativistes, donc on voit qu'il suffit d'un champ magnétique extrêmement faible que le poids d'une particule chargée soit compensée.

**On retiendra qu'on peut toujours négliger le poids d'une particule chargée dans un champ électromagnétique.**

Etudions maintenant seulement la partie magnétique de la force de Lorentz.

## V.2. Particule chargée dans un champ magnétique

### V.2.a Produit vectoriel

Soit une particule de charge  $q$  avec une vitesse  $\vec{v}$  placée dans un champ magnétique  $\vec{B}$ , la force magnétique exercée sur la particule est dans le repère cartésien

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} v_y B_z - B_y v_z \\ v_z B_x - B_z v_x \\ v_x B_y - B_x v_y \end{pmatrix}.$$

Une astuce pour effectuer le produit vectoriel est de rajouter deux lignes en dessous des vecteurs colonnes et d'appliquer la règle du  $\gamma$

$$\begin{pmatrix} v_x & B_x \\ v_y & B_y \\ v_z & B_z \\ v_x & B_x \\ v_y & B_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B_z - B_y v_z \\ v_z B_x - B_z v_x \\ v_x B_y - B_x v_y \end{pmatrix}$$

avec en bleu les termes comptés positivement et en rouge les termes comptés négativement.

Dans le cas où la vitesse n'a qu'une composante selon l'axe ( $Ox$ ) et le champ magnétique lui est perpendiculaire en étant aligné avec l'axe ( $Oz$ ), on remarque que la force est telle que

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = q \begin{pmatrix} v_y B_z - B_y v_z \\ v_z B_x - B_z v_x \\ v_x B_y - B_x v_y \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 0 \\ -B_z v_x \\ 0 \end{pmatrix} = -q B_z v_x \vec{u}_y$$



la force est dans la direction de l'axe ( $Oy$ ).

Dans le cas où les vecteurs dont on calcule le produit vectoriel sont perpendiculaires entre eux, on peut utiliser **la règle de la main droite** pour obtenir la direction et le sens du vecteur résultant du produit vectoriel : le pouce indique la direction et le sens du premier vecteur, l'index indique la direction et le sens du deuxième vecteur, le majeur indique la direction et le sens du vecteur résultant du produit.

### **Nota bene**

Le produit vectoriel est antisymétrique

$$\vec{v} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{v}.$$

### **Application 1**

- **Calculer** le produit vectoriel de  $v_x \vec{u}_x \wedge B_y \vec{u}_y$ .
- **Calculer** le produit vectoriel de  $v_y \vec{u}_y \wedge B_z \vec{u}_z$ .
- **Calculer** le produit vectoriel de  $v_z \vec{u}_z \wedge B_x \vec{u}_x$ .
- **Calculer** le produit vectoriel de  $v_y \vec{u}_y \wedge B_y \vec{u}_y$ .

#### V.2.b Trajectoire d'une particule dans un champ magnétique

Considérons une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique  $\vec{B}$ .

Le système est la particule modélisée par un point matériel  $M$ . Le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre. La seule force qui s'applique sur le système est la force magnétique  $\vec{F}_{mag}$  car on néglige le poids.

Si on étudie le travail de la force magnétique il vient que le travail élémentaire

$$\delta W(\vec{F}_{mag}) = \vec{F}_{mag} \cdot d\vec{OM}$$

or, par définition la vitesse de la particule à un instant  $t$  est colinéaire au vecteur déplacement élémentaire  $d\vec{OM}$

$$d\vec{OM} = \vec{v} dt$$

et par définition du produit vectoriel, la force magnétique est perpendiculaire à  $\vec{v}$  et à  $\vec{B}$

$$\vec{F}_{mag} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

ainsi le travail de la force est toujours nul car la force magnétique est toujours perpendiculaire au mouvement

$$\vec{F}_{mag} \cdot d\vec{OM} = 0$$

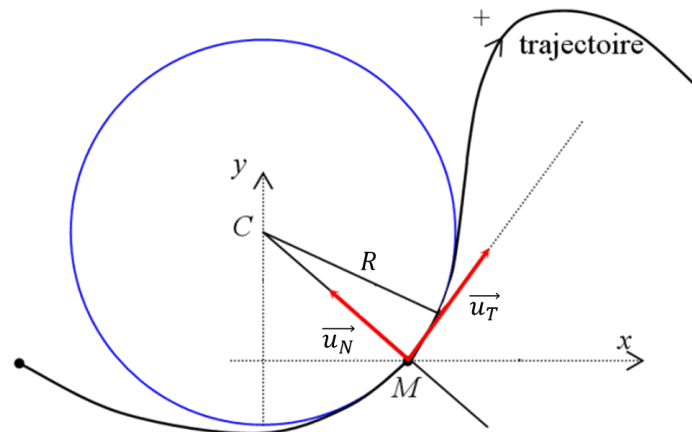
donc **la force magnétique ne travaille jamais**, elle ne fournit pas d'énergie au système.

On peut exploiter cette propriété de la force magnétique afin d'exprimer le module de la vitesse de la particule. D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta \mathcal{E}_c = \sum_i V(\vec{F}_i) = W(\vec{F}_{mag}) = 0.$$

Un champ magnétique uniforme n'influence pas la valeur de la vitesse d'une particule : **l'énergie cinétique de la particule est constante et sa vitesse est uniforme dans un champ magnétique uniforme.**

Étudions le mouvement de la particule à l'aide du repère de Fresnet



**Figure 5.32** – Particule  $M$  d'une trajectoire plane repéré à l'aide d'un repère de Frenet et son cercle osculateur.

Nous faisons pas d'hypothèse sur la forme de la trajectoire, nous considérons qu'elle est quelconque. D'après l'étude du repère de Fresnet les expressions générales de la vitesse et de l'accélération sont

$$\vec{v} = v\vec{u}_T$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{u}_T + \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

avec  $R$  le rayon du cercle osculateur,  $\vec{u}_N$  et  $\vec{u}_T$  les vecteurs unitaires dépendant de la position de  $M$ .

Nous avons vu que le module de la vitesse de la particule dans un champ magnétique uniforme est constant donc

$$\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{u}_N$$

l'accélération est purement radiale.

On peut alors appliquer le PFD

$$m\vec{a} = \vec{F}_{mag}$$

$$m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N = q\vec{v} \wedge \vec{B}.$$

Considérons que le champ magnétique est toujours perpendiculaire au plan dans lequel se déplace la particule telle que  $\vec{B} = B\vec{u}_z$  avec le vecteur  $\vec{u}_z$  formant une base directe avec les vecteurs tangent et normal du repère de Fresnet tel que  $(\vec{u}_T, \vec{u}_N, \vec{u}_z)$ .

Il vient que

$$m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N = qv\vec{u}_T \wedge B\vec{u}_z$$

soit

$$m\frac{v^2}{R}\vec{u}_N = -qvB\vec{u}_N$$

$$R = -\frac{mv}{qB}.$$

On constate que le rayon de courbure du cercle osculateur est le même pour tous les points de la trajectoire : la trajectoire est donc circulaire. **Dans un champ magnétique, la trajectoire d'une particule est circulaire uniforme.**

### ♥ Définitions

Une particule de charge  $q$  et de vitesse initiale  $\vec{v}_0$  perpendiculaire à un champ magnétique uniforme  $\vec{B}$  subit un **mouvement circulaire et uniforme** de rayon

$$R = \frac{mv_0}{|q|B}$$

à la vitesse angulaire appelée **pulsation cyclotron**

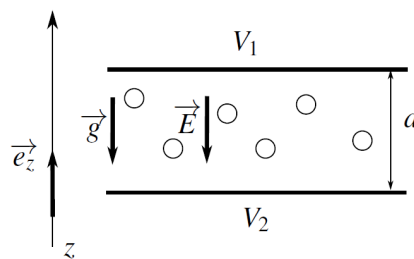
$$\omega_c = \frac{2\pi R}{v_0} = \frac{|q|B}{m}.$$

### 👉 Nota bene

Lorsque la vitesse initiale de la particule n'est pas perpendiculaire au champ magnétique, le mouvement est hélicoïdale, composé d'un mouvement rectiligne uniforme dans la direction de  $\vec{B}$  et d'un mouvement circulaire et uniforme dans le plan perpendiculaire à  $\vec{B}$ .

## V.3. Expérience de Millikan

Au début du XXème siècle Robert Andrews Millikan met au point une expérience basée sur des gouttes d'huile initialement électrisées projetées entre les deux plaques d'un condensateur. Étudions cette expérience.



**Figure 5.33** – Schéma de l'expérience de Millikan.

### V.3.a Mise en équation

Le système est une des gouttes du brouillard projeté considérée comme une masse ponctuelle chargée négativement. Les gouttes ont toutes le même rayon  $R$ , la masse volumique  $\rho_h$  mais une charge  $q$  négative qui peut être différente d'une goutte à l'autre.

Les plaques du condensateur sont séparées par la distance  $d$  et sont portées à un potentiel de  $V_1$  et  $V_2$ , la tension aux bornes du condensateur est donc  $U = V_1 - V_2$ .

## ♥ Définition

L'application d'une différence de potentiel électrique  $U$  entre deux électrodes planes parallèles et distantes de  $h$  permet de générer un champ électrique perpendiculaire aux électrodes dirigé vers les potentiels décroissants.

Pour une tension positive  $U = V(z_1) - V(z_2) > 0$ , avec  $z_1 - z_2 = h > 0$ , le champ est orienté vers les  $z < 0$

$$\vec{E} = -\frac{U}{h}\vec{u}_z.$$

Pour une tension négative  $U = V(z_1) - V(z_2) < 0$ , avec  $z_1 - z_2 = h > 0$ , le champ est orienté vers les  $z > 0$  :

$$\vec{E} = -\frac{U}{h}\vec{u}_z.$$

On considère dans notre cas que  $V_1 > V_2$  ainsi le champ  $E$  est dirigé dans le sens  $z < 0$  selon le repère choisi.

On se place dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre supposé galiléen car le mouvement des gouttes est très court par rapport à la rotation terrestre, et s'effectue sur une distance très petite devant l'échelle de rotation de la Terre.

Si on fait le bilan des forces exercées sur une goutte, on dénombre

- le poids  $\vec{P}$  tel que

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho_h V\vec{g} = \rho_h \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}$$

- la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}$  qui est l'opposée du poids du fluide déplacé par la goutte, soit le poids de l'air déplacé par la goutte qu'on peut exprimer telle que

$$\vec{\Pi} = -m_a \vec{g} = -\rho_a V\vec{g} = -\rho_a \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g}$$

- la force de frottement fluide due à l'air exprimée telle que

$$\vec{f} = -k\vec{v}.$$

Dans le cas d'un objet sphérique on peut exprimer la constante  $k$  telle que  $k = \alpha R$ , avec  $\alpha$  un coefficient positif

- La partie électrique de la force de Lorentz telle que

$$\vec{F} = q\vec{E} = -q\frac{U}{h}\vec{u}_z.$$

### V.3.b Étude du mouvement des gouttes sans champ électrique

Étudions le mouvement des gouttes quand la tension et le champ électrique sont nuls.

En appliquant le PFD il vient que

$$m\vec{a} = \rho_h \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3 \vec{g} - \alpha R \vec{v}$$

soit dans le cas du repère choisi

$$\frac{4}{3}\rho_h \pi R^3 \ddot{z} = -\rho_h \frac{4}{3}\pi R^3 g + \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3 g - \alpha R \dot{z}$$

$$\frac{4}{3}\rho_h \pi R^2 \frac{1}{\alpha} \ddot{z} + \dot{z} = \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{g}{\alpha} (\rho_a - \rho_h).$$

Lorsque l'accélération s'annule la goutte atteint la vitesse limite de chute  $v_{lim}$  qui a pour valeur

$$v_{lim} = \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{g}{\alpha} (\rho_a - \rho_h)$$

comme la masse volumique de l'air est inférieure à la masse volumique de l'huile la valeur de la vitesse est négative, le vecteur vitesse limite est dirigé vers le bas.

On peut réécrire l'équation différentielle décrivant le mouvement d'une goutte telle que

$$\begin{aligned} \frac{4}{3}\rho_h\pi R^3 \ddot{z} &= v_{lim} - \alpha R \dot{z} \\ \ddot{z} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\rho_h\pi R^2} \dot{z} &= \frac{3}{4} \frac{1}{\rho_h\pi R^3} v_{lim} \end{aligned}$$

pour résoudre cette équation, il nous faut trouver la solution de l'équation homogène

$$\begin{aligned} \ddot{z} + \frac{3}{4} \frac{\alpha}{\rho_h\pi R^2} \dot{z} &= 0 \\ \ddot{z} &= -\frac{3}{4} \frac{\alpha}{\rho_h\pi R^2} \dot{z}. \end{aligned}$$

La solution générale est

$$\dot{z}(t) = Ae^{-t/\tau}$$

avec  $\tau$  la constante de temps du mouvement définie telle que  $\tau = \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{\rho_h}{\alpha}$ .

La solution générale de l'équation est donc

$$\dot{z}(t) = v_{lim} + Ae^{-t/\tau}$$

On considère que les gouttes n'ont pas de vitesse verticale à l'instant  $t = 0$  initial, ainsi

$$\dot{z}(t = 0) = 0 = v_{lim} + A$$

soit

$$A = -v_{lim}.$$

L'équation du mouvement de la vitesse d'une goutte est donc

$$\dot{z}(t) = v_{lim} (1 - e^{-t/\tau}).$$

Millikan a mesuré la vitesse d'une goutte à l'aide d'une lunette. Considérons qu'il ait trouvé pour une goutte une valeur de  $v_{lim}$  de  $-2,0 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour  $\rho_h = 1,3 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_a = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\alpha = 3,4 \cdot 10^{-4} \text{ SI}$ . On peut alors calculer la valeur du rayon  $R$  de la goutte. Comme

$$\begin{aligned} v_{lim} &= \frac{4}{3}\pi R^2 \frac{g}{\alpha} (\rho_a - \rho_h) \\ R &= \sqrt{\frac{3\alpha v_{lim}}{4\pi g (\rho_a - \rho_h)}} \end{aligned}$$

**A.N.**

$$R = \sqrt{\frac{-3 \times 3,4 \cdot 10^{-4} \times 2,0 \cdot 10^{-4}}{4\pi \times 9,8 \times (1,3 - 1,3 \cdot 10^3)}} = 1,1 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

### V.3.c Étude du mouvement des gouttes avec champ électrique

Après avoir observé plusieurs gouttes et mesuré leur vitesse limite en l'absence de champ électrique, Millikan a imposé une tension  $U = V_1 - V_2 > 0$  entre les plaques du condensateur. Il a augmenté cette tension jusqu'à ce que les gouttes s'immobilisent entre les plaques. On peut réécrire le PFD dans ce cas

$$m \vec{a} = \rho_h \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} - \rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 \vec{g} + q \vec{E}$$

On ne tient pas compte de la force de frottement car la vitesse de la goutte est nulle puisqu'immobile.

Il vient que

$$0 = -\rho_h \frac{4}{3} \pi R^3 g + \rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 g - qE$$

$$qE = \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_a - \rho_h)$$

$$q \frac{U}{h} = \frac{4}{3} \pi R^3 g (\rho_a - \rho_h)$$

$$q = \frac{4}{3} \pi R^3 g \frac{h}{U} (\rho_a - \rho_h).$$

On obtient la valeur de la charge de la goutte d'huile, par exemple pour une tension  $U = 3,2 \text{ kV}$  entre deux plaques espacées d'une distance  $h = 2,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

**A.N.**

$$q = \frac{4}{3} \pi \times (1,1 \cdot 10^{-6})^3 \times 9,8 \times \frac{2,0 \cdot 10^{-2}}{3,2 \cdot 10^3} (1,3 - 1,3 \cdot 10^3) = -4,8 \cdot 10^{-19} \text{ C.}$$

En répétant les mesures pour différentes gouttes, Millikan a trouvé des valeurs de charge  $q$  qui étaient toujours des multiples entiers d'une charge proche de  $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ , soit **la valeur de la charge électrique élémentaire**  $e$ . Cette expérience et la mise en évidence de la quantification de la charge électrique ont permis à Millikan d'obtenir le prix Nobel de Physique en 1923.

### V.4. Expérience de Thomson

Remontons un peu plus dans le temps. À la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle Joseph John Thomson mène une série d'expériences sur ce qu'on appelle à l'époque les rayons cathodiques. On ne connaît pas la nature exacte de ces rayons : sont-ils des ondes ou des particules ? Thomson fait l'hypothèse que ce sont des particules. Il considère également, qu'au cours de la production de ces particules, elles obtiennent une vitesse constante. Il les fait alors passer dans un champ électrique uniforme orienté perpendiculairement à la direction de propagation des particules. Le champ électrique est généré à l'aide d'un condensateur auquel on impose une différence de potentiel  $U = V_1 - V_2$ . Étudions le mouvement d'une particule dans le vide subissant l'influence du champ  $\vec{E}$  sur une distance  $l$ , puis qui y n'est plus soumise sur une distance  $L$ .

#### V.4.a Mise en équation

Le système étudié est la particule de masse  $m$  et de charge  $q$  inconnues. On sait néanmoins que la particule est chargée car elle subit l'influence du champ électrique.

On l'étudie dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre.

Le bilan des forces s'exerçant sur la particules est

- son poids

$$\vec{P} = m \vec{g}.$$

- la partie électrique de la force de Lorentz

$$\vec{F} = q \vec{E}.$$

On ne considère pas la poussée d'Archimède de l'air et les forces de frottements fluides dues à l'air car l'expérience se fait dans le vide.

Thomson remarque que les rayons cathodiques, non soumis à un champ électrique dans le vide, conservent leur vitesse dans le champ de pesanteur de la Terre. Ce qui n'est plus le cas, lorsqu'on les soumet à un champ électrique. Cela signifie que leur poids a très peu d'influence sur leur mouvement, on peut le minimiser devant la partie électrique de la force de Lorentz. Ainsi si on applique le PFD il vient que

$$m \vec{a} = qE\vec{u}_z$$

$$\vec{a} = -\frac{qU}{mh}\vec{u}_z.$$

avec  $U$  la tension entre deux électrodes située en  $z_1$  et  $z_2$  telle que  $U = z_1 - z_2$  et  $z_1 > z_2$ , et  $h = z_1 - z_2$ .

En intégrant par rapport au temps il vient que

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = 0 \\ a_z = -\frac{qU}{mh} \end{cases} \quad \begin{cases} v_x = v_{0,x} \\ v_y = v_{0,y} \\ v_z = -\frac{qU}{mh}t + v_{0,z} \end{cases} \quad \begin{cases} x = v_{0,x}t + x_0 \\ y = v_{0,y}t + y_0 \\ z = -\frac{1}{2}\frac{qU}{mh}t^2 + v_{0,z}t + z_0 \end{cases}$$

On prend comme origine du repère  $O$ , la position initiale de la particule  $(x_0, y_0, z_0)$  et on considère que la vitesse initiale est dans le plan  $(Oxz)$  et fait un angle  $\alpha$  avec l'axe  $(Ox)$  telle que

$$\vec{v}_0 = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_z$$

avec  $v_0$  la valeur de la vitesse initiale. Il vient que

$$\begin{cases} x = v_0 \cos \alpha t \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}\frac{qU}{mh}t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

On peut alors obtenir la trajectoire de la particule en éliminant la variable  $t$ . On doit distinguer deux cas : celui où  $\cos \alpha = 0$ , le vecteur vitesse est aligné avec le champ électrique ; et le cas où  $\cos \alpha \neq 0$ , le vecteur vitesse n'est pas aligné avec le champ.

### Vitesse initiale parallèle au champ électrique

Dans ce cas  $\cos \alpha = 0$ , donc  $\alpha = \pm \frac{\pi}{2}$  donc il vient que

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2}\frac{qU}{mh}t^2 \pm v_0 t \end{cases}$$

Le mouvement de la particule est un mouvement rectiligne uniformément varié (d'accélération constante) d'axe  $(Oz)$ .

**Vitesse initiale parallèle au champ électrique** Dans ce cas on peut éliminer la variable  $t$  en l'exprimant à partir de la coordonnée  $x$ , soit

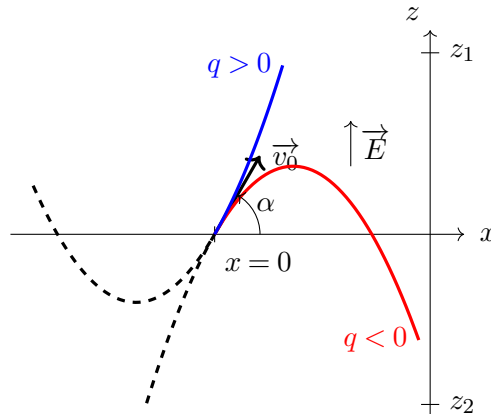
$$t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

et l'introduire dans l'expression de la coordonnées  $z$ , soit

$$z = -\frac{1}{2}\frac{qU}{mh} \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$$

$$z = -\frac{1}{2} \frac{qU}{mhv_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha x.$$

La trajectoire de la particule correspond à une parabole passant par l'origine du repère



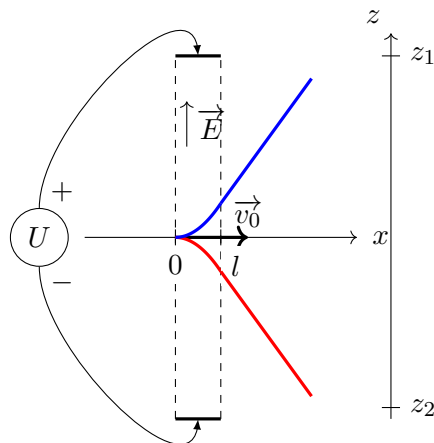
**Figure 5.34** – Trajectoire d'une particule de chargée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  selon le signe de sa charge.

### Application 2

**Déterminer** la position de l'extremum de la fonction  $z(x)$  selon le signe de la charge  $q$ .

#### V.4.b Mesure de la trajectoire

Pour ses expériences, Thomson a choisi un angle  $\alpha = 0$  et une distance d'influence du champ  $l$  très petite devant la distance  $L$  de non influence du champ. En plaçant un écran sur le parcours des particules, il a été capable de déterminer leur trajectoire en mesurant leur position d'arrivée en  $x_f$  et  $z_f$ .



**Figure 5.35** – Trajectoire d'une particule de chargée dans un champ électrique uniforme  $\vec{E}$  selon le signe de sa charge.

Tentons d'exprimer l'angle  $\theta$  correspondant à la déviation des rayons cathodiques en fonction des



paramètres du système.

Déterminons la vitesse de la particule en  $x = l$  c'est-à-dire à la sortie de la zone d'influence du champ électrique. Il vient que

$$\begin{cases} \dot{x}(l) = v_0 \\ \dot{y}(l) = 0 \\ \dot{z}(l) = -\frac{qU}{mh}t = -\frac{qU}{mhv_0}x = -\frac{qUl}{mhv_0} = -\frac{qUl}{mhv_0} \end{cases}$$

Ainsi l'angle  $\theta$  est tel que

$$\tan \theta = \frac{\dot{z}(l)}{\dot{x}(l)} = -\frac{qUl}{mhv_0^2}.$$

La mesure de  $\theta$  nous permet d'abord d'obtenir le signe de la charge de la particule. la tension  $U = V(z_1) - V(z_2)$  étant choisie négative pour obtenir un champ orienté vers les  $z > 0$ , le signe de l'angle de déviation  $\theta$  est le même que le signe de la charge de la particule.

#### V.4.c Lien entre potentiel électrique et énergie potentielle

Considérons une particule de charge  $q$  sans vitesse initiale soumise à un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$ . La partie électrique de la force de Lorentz est

$$\vec{F} = q\vec{E}_0.$$

On considère que le champ est orienté selon les  $x > 0$ , soit

$$\vec{F} = qE_0\vec{u}_x.$$

Le travail élémentaire de cette force est

$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{OM}$$

comme la charge est constante et le champ uniforme, il vient que

$$\delta W(\vec{F}) = qE_0 dx = d(qE_0x)$$

on voit que l'on peut mettre ce travail sous forme d'une différentielle d'une fonction de la position, **la partie électrique de la force de Lorentz est une force conservative.**

Donc, la partie électrique de la force de Lorentz dérive d'une énergie potentielle telle que

$$\vec{F} = q\vec{E}_0 = -\vec{\nabla} \mathcal{E}_p.$$

Dans le cas où  $\vec{E} = E_0\vec{u}_x$  il vient que

$$qE_0\vec{u}_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}\vec{u}_x$$

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = -qE_0$$

$$\mathcal{E}_p(x) = -qE_0x + C$$

Si on exprime la valeur du champ en fonction de la différence de potentiel électrique entre deux plaques en 0 et  $x$  telle que  $U = V(0) - V(x)$ , il vient que

$$\mathcal{E}_p(x) = -q\frac{V(0) - V(x)}{x}x + C = qV(x) - qV(0) + C.$$

En imposant arbitrairement que la constante  $C = qV(0)$  il vient que

$$\mathcal{E}_p(x) = qV(x).$$

### ♥ Définition

**Le potentiel électrique**  $V$  est lié à l'énergie potentielle de la partie électrique de la force de Lorentz de telle manière que

$$\mathcal{E}_p(x) = qV(x).$$

Ce qui explique pourquoi on appelle cette grandeur "potentiel" : elle est égale à une énergie potentielle à un facteur  $q$  près.

La seule force s'exerçant sur la particule étant une force conservative, d'après le théorème de l'énergie mécanique, l'énergie mécanique de la particule est constante.

Si on considère que le champ  $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_x$  est généré entre les abscisses  $x = -d$  et  $x = 0$ , on peut faire le bilan de l'énergie mécanique de la particule en ces deux positions.

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2(-d) + qV(-d) = \text{cst}$$

or en  $x = -d$  la vitesse de la particule est nulle, donc

$$\mathcal{E}_m = qV(-d)\text{cst.}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0) = \text{cst.}$$

Ainsi

$$\frac{1}{2}mv^2(-d) + qV(-d) = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0)$$

$$\frac{1}{2}mv^2(-d) - \frac{1}{2}mv_0^2 = qV(0) - qV(-d)$$

$$\Delta\mathcal{E}_c = -q(V(-d) - V(0)) = qU_0$$

avec  $U_0 = V(0) - V(-d)$  la tension entre les positions  $x = -d$  et  $x = 0$ .

### ♥ Définition

Pour faire varier l'énergie cinétique, et donc la norme de la vitesse d'une particule chargée soumise uniquement à une force électromagnétique, il faut lui faire franchir une différence de potentielle  $\Delta V = -U$ . La variation d'énergie cinétique est dans ce cas

$$\Delta\mathcal{E}_c = -q\Delta V = qU.$$

Si  $q > 0$ , la particule est accéléré par une différence de potentiel  $\Delta V < 0$ , soit une tension  $U > 0$ , et freinée par une différence de potentiel  $\Delta V > 0$ , soit une tension  $U < 0$ .

Si  $q < 0$ , la particule est accéléré par une différence de potentiel  $\Delta V > 0$ , soit une tension  $U < 0$ , et freinée par une différence de potentiel  $\Delta V < 0$ , soit une tension  $U > 0$ .

Dans le cas de l'expérience de Thomson, la vitesse de la particule est nulle  $x = -d$ . Pour que la particule obtienne une vitesse  $v_0$  non nul il faut imposer une tension  $U_0$  telle que

$$U_0 = \frac{1}{q}\Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\frac{m}{q}v_0^2.$$

La valeur de la vitesse de la particule  $v_0$  est donc

$$v_0 = \sqrt{2 \frac{q}{m} U_0}.$$

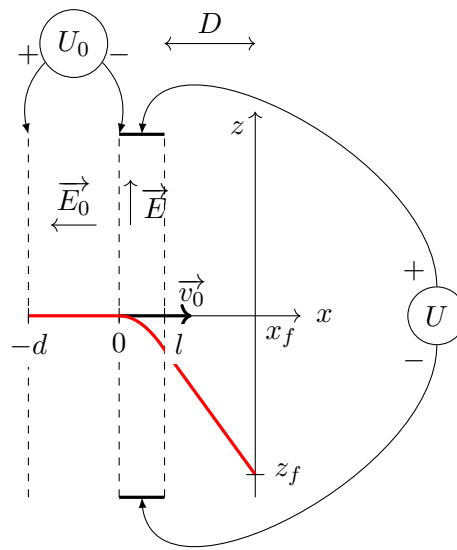
En introduisons l'expression de la valeur de la vitesse  $v_0$  en  $x = 0$ , on obtient une nouvelle expression de  $\tan \theta$

$$\tan \theta = -\frac{qUl}{mhv_0^2} = -\frac{qUl}{mh} \frac{m}{2qU_0} = -\frac{Ul}{2U_0h}.$$

On peut exprimer  $\theta$  en fonction des deux tensions utilisées dans l'expérience.

#### V.4.d Premier résultat

Voici le schéma de l'expérience de Thomson et la trajectoire qu'il a mesurée.



**Figure 5.36** – Trajectoire de la particule chargée observée par J.J.Thomson.  $U_0 < 0$  et  $U < 0$ .

On constate que dans la zone d'influence du champ électrique entre  $x = -d$  et  $x = 0$ , pour un champ  $\vec{E}_0$  orienté vers les  $x < 0$ , donc une tension  $U_0 = V(-d) - V(0) < 0$ , donc une différence de potentielle  $\Delta V = V(0) - V(-d) > 0$  la particule a accéléré d'une vitesse nulle en  $x = -d$  à une vitesse non nulle en  $x = 0$ . On peut en conclure que la particule a une charge  $q < 0$ .

Cette conclusion est corroborée par la trajectoire de la particule dans la zone d'influence du champ électrique entre  $x = 0$  et  $x = l$ , pour un champ  $\vec{E}$  orienté vers les  $z > 0$ , la particule a un angle de déviation  $\theta < 0$ , donc, d'après notre définition de  $\theta$ , la charge de la particule est aussi négative.

Il nous faut maintenant déduire le rapport  $q/m$  à partir de  $\theta$ , grandeur que l'on mesure à partir de la position finale  $z_f$  de la particule sur l'écran positionné à une distance  $D$  de la zone d'influence du champ  $\vec{E}$ .

On peut également exprimer l'angle  $\theta$  en fonction de la position finale de la particule. Il vient que

$$\tan \theta = \frac{z_f - z(l)}{x_f - l} = \frac{1}{2} \frac{qU}{mhv_0^2} (x_f^2 - l^2) \frac{1}{D}$$

pour  $x_f \gg l$  on peut faire l'approximation

$$\frac{1}{2} \frac{qU}{mhv_0^2} (x_f^2 - l^2) \approx \frac{1}{2} \frac{qU}{mhv_0^2} x_f^2 = z_f$$

donc

$$\tan \theta \approx \frac{z_f}{D}.$$

On a ainsi deux moyen de mesuré l'angle  $\theta$  qui est lié au rapport charge sur masse de la particule  $q/m$

$$\tan \theta \approx \frac{z_f}{D} \quad ; \quad \tan \theta = -\frac{Ul}{2U_0h} \quad ; \quad \tan \theta = -\frac{qUl}{mhv_0^2}.$$

Thomson est allé plus loin dans l'exploitation de son expérience en ajoutant un champ magnétique  $\vec{B}$  dans la zone d'influence du champ électrique  $\vec{E}$ .

#### V.4.e Deuxième résultat

Thomson a superposé un champ magnétique  $\vec{B}$  au champ électrique  $\vec{E}$  afin que la partie magnétique de la force de Lorentz compense sa partie électrique. Le PFD donne alors

$$m \vec{a} = q\vec{E} + qv_0\vec{u} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

Ainsi la particule maintient une vitesse constante et n'est plus déviée.

Calculons la valeur, la direction et le sens de  $\vec{B}$  afin de respecter cette égalité. D'après le repère choisi

$$qE\vec{u}_z + qv_0\vec{u}_x \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

il vient que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ qE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} qv_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ qE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -qB_zv_0 \\ qv_0B_y \end{pmatrix}$$

soit

$$B_z = 0 \quad \text{et} \quad B_y = \frac{E}{v_0} = -\frac{U}{hv_0}$$

ainsi

$$\vec{B} = -\frac{U}{hv_0}\vec{u}_y.$$

Le champ magnétique est orienté selon l'axe  $(Oy)$ , de plus, comme la charge de la particule est négative et que la tension  $U$  est également négative, le champ magnétique est selon les  $y < 0$ .

Thomson a pu mesurer le rapport  $q/m$  de la particule à partir de la mesure de la tension  $U$ , de  $z_f$ , de  $D$  et du module du champ magnétique  $B$ .

On a vu que

$$\tan \theta \approx \frac{z_f}{D} \quad ; \quad \tan \theta = -\frac{Ul}{2U_0h} \quad ; \quad \tan \theta = -\frac{qUl}{mhv_0^2}.$$

La vitesse initiale de la particule est, d'après l'expression du module du champ magnétique

$$B = -\frac{U}{hv_0}$$

$$v_0 = -\frac{U}{Bh}.$$

On peut introduire cette expression dans celle de l'angle  $\theta$ , soit

$$\tan \theta = -\frac{qUl}{mhv_0^2} = -\frac{q}{m} \frac{UlB^2h^2}{hU^2} = -\frac{q}{m} \frac{B^2hl}{U}$$

ainsi en égalisant avec une des autres expressions de  $\theta$ , il vient que

$$\tan \theta = \frac{z_f}{D} = -\frac{q}{m} \frac{B^2hl}{U} \quad \text{et} \quad \tan \theta = -\frac{U}{2U_0} = -\frac{q}{m} \frac{B^2hl}{U}$$

soit

$$\frac{q}{m} = -\frac{z_f U}{DhlB^2} \quad \text{et} \quad \frac{q}{m} = \frac{U^2}{2hlB^2U_0}.$$

Lorsque Thomson mesure ce rapport pour les particules composant les rayons cathodiques, il trouve une valeur négative dont la norme est près de mille fois plus importante que le rapport  $q/m$  de la cation de l'hydrogène. D'autres expériences lui permettent d'obtenir la masse de ces corpuscules, il en déduit qu'elles ont une charge opposée à la cation de l'hydrogène mais une masse 1000 fois plus petite. On nommera plus tard ce corpuscule électron et J. J. Thomson recevra le prix Nobel de Physique en 1906 grande partie pour sa découverte.

#### *Nota bene*

Dans l'expérience de Thomson le rapport entre les modules du champ électrique et du champ magnétique est

$$v_0 = \frac{E}{B}$$

avec  $v_0$  la vitesse de l'électron non dévié sous l'action des deux champs. Or, les électrons atteignent des vitesses relativistes très facilement. Le module du champ électrique est donc beaucoup plus important que celui du champ magnétique. Ainsi, un faible champ magnétique permet de compenser un fort champ électrique. C'est pourquoi on préfère utiliser un champ magnétique qu'un champ électrique pour dévier des particules.

### Devoir maison n° 3 : expérience de Thomson

Afin d'étudier les particules qui composent ce qu'on appelle encore les rayons cathodiques à la fin du XIX<sup>ème</sup> siècle, J. J. Thomson met au point une expérience au cours de laquelle il cherche à déterminer le rapport charge/masse, noté  $q/m$ , de ces particules.

Pour cela il impose d'abord un champ électrique uniforme  $\vec{E}_0$  puis un autre champ  $\vec{E}$  aux particules du rayon cathodique comme cela est illustré Figure 5.37. Il observe alors la trajectoire des particules soumises à ces champs.

Puis il répète l'expérience en imposant un champ magnétique  $\vec{B}$  dans la même zone que le champ électrique  $\vec{E}$ . La valeur, l'orientation et le sens du champ  $\vec{B}$  sont réglés par Thomson afin que les particules aient une trajectoire rectiligne.

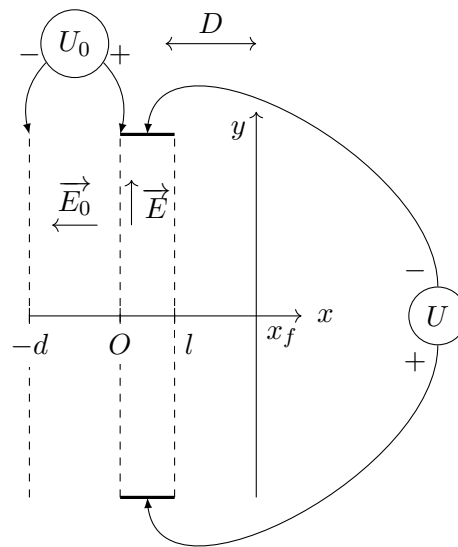


Figure 5.37 – Schéma de l'expérience J.J.Thomson.

#### Accélération par le champ électrique $\vec{E}_0$

- On considère que les particules de rayons cathodiques n'ont aucune vitesse initiale et sont situées initialement sur l'axe  $Ox$  de la Figure 5.37 à la position  $x = -d$ . Elles sont soumises à un potentiel électrique  $V(x = -d)$ . On choisit un potentiel électrique en  $x = 0$ ,  $V(0) = 0$ .  
**Exprimer** la tension  $U_0$  en fonction des potentiels électriques  $V(x)$  et  $V(0)$  affichée par le voltmètre représenté sur la Figure 5.37.
- **Exprimer** les énergies potentielles électriques d'une particule en  $x = -d$  et en  $x = 0$  en fonction, entre autres, de la charge  $q$  d'une particule et de la tension  $U_0$ .
- **Exprimer** les énergies cinétiques d'une particule en  $x = -d$  et  $x = 0$ . **Exprimer** la valeur de la vitesse  $v_0$  d'une particule en  $x = 0$  et **donner** la direction et le sens de cette vitesse.
- **Déterminer** les conditions sur la tension et la charge de la particule pour que les particules aient une vitesse.

#### Déviations par le champ électrique $\vec{E}$

- On étudie maintenant l'interaction entre les particules et un champ électrique  $\vec{E}$  dans la zone comprise entre  $x = 0$  et  $x = l$ . On considère que les électrodes générant le champ  $\vec{E}$  sont soumises à une tension  $U$ , selon la convention présentée Figure 5.37, et sont séparées par une distance  $h$ .

**Mener** une étude dynamique sur une particule dans la zone comprise entre  $x = 0$  et  $x = l$ , et **exprimer** sa coordonnées  $y(l)$  en fonction de  $U$ ,  $U_0$ ,  $l$  et  $h$ .

- On fait l'approximation que la trajectoire des particules entre la position en  $(x = 0, y = 0)$  et la position en  $(x = l, y(l))$  est rectiligne. En utilisant l'approximation des petits angles, **déterminer** l'angle  $\theta$  entre l'axe  $(Ox)$  et la trajectoire des particules.
- **Déterminer** la coordonnées  $y(x_f)$  des particules sur l'écran positionné en  $x_f$ .
- Thomson des impacts sur l'écran pour une position  $y_f < 0$ . **Conclure** sur le signe des particules des rayons cathodiques.

### Superposition du champ magnétique $\vec{B}$

- Un champ magnétique est maintenant imposé dans la zone entre  $x = 0$  et  $x = l$ . **Exprimer** le champ  $\vec{B}$  pour lequel la trajectoire de la particule est colinéaire à l'axe  $Ox$  en fonction de  $U$ ,  $h$ ,  $m$ ,  $q$  et  $U_0$ .
- L'expérience de Thomson peut être réalisée à l'aide d'un appareil nommé **tube de Thomson**. Avec ce dernier, on observe une trajectoire rectiligne des particules pour un champ  $\vec{B}$  avec une valeur de 1,11 mT, une tension  $U_0$  de 2 kV, une tension  $U$  de 240 V et une disance  $h = 8$  mm. **Calculer** le rapport  $q/m$  des particules composant les rayons cathodiques.
- **Comparer** ce rapport à celui du cation  $H^+$  pour lequel  $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$  C et  $m = 1,673 \cdot 10^{-27}$  kg. **Conclure**.

---

## Correction du devoir maison n° 3

---



---

## Synthèse

---

### Connaissances

- Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique.
- Puissance de la force de Lorentz.
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ électrostatique uniforme.
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétostatique uniforme dans le cas où le vecteur vitesse initial est perpendiculaire au champ magnétostatique.

### Savoir-faire

- **Évaluer** les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les **comparer** à ceux des forces gravitationnelles.
- **Justifier** qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
- **Mettre en équation** le mouvement et le **caractériser** comme un mouvement à vecteur accélération constant.  
**Effectuer** un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- **Déterminer** le rayon de la trajectoire sans calcul en admettant que celle-ci est circulaire.