TD III. Énergétique du point

Exercice III.1. Travail d'une force de frottements fluides ★

Un point matériel M est animé d'un mouvement sinusoïdal le long d'un axe (Ox), d'amplitude x_0 et de fréquence ν. Il subit l'action d'une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -k_1\overrightarrow{v}$.

1. **Donner** l'équation horaire du mouvement de M.
   D'après l'énonce l'équation du mouvement de M est
$$x(t) = x_0 \sin(2\pi\nu t + \varphi).$$

2. **Déduire** l'expression de sa vitesse $\overrightarrow{v}$ en fonction du temps.
   Il vient que
$$v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2\pi\nu x_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi).$$

3. À partir de la valeur de la vitesse, **exprimer** la différentielle $\mathrm{d}x$ en fonction de la différentielle $\mathrm{d}t$
   Il vient que
$$\mathrm{d}x = v(t)\mathrm{d}t = 2\pi\nu x_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi)\,\mathrm{d}t.$$

4. **Déterminer** le travail de $\overrightarrow{f}$ au cours d'une période du mouvement (on pourra utiliser une relation trigonométrique pour transformer $\sin^2$ en une somme de deux $\cos$).
   Le travail élémentaire de f est
$$\begin{aligned}
\delta W(f) &= \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} \\
&= -k_1\overrightarrow{v} \cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{u}_x \\
&= -k_1 2\pi\nu x_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi)\overrightarrow{u}_x \cdot 2\pi\nu x_0 \cos(2\pi\nu t + \varphi)\,\mathrm{d}t\overrightarrow{u}_x \\
&= -k_1 (2\pi\nu x_0)^2 \cos^2(2\pi\nu t + \varphi)\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 (1 + \cos(4\pi\nu t + 2\varphi))\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$
   Le travail de f au cours d'une période du mouvement est
$$\begin{aligned}
W(f) &= \int_{\text{période}} \delta W(f) \\
&= \int_{t=0}^{t=T} -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 (1 + \cos(4\pi\nu t + 2\varphi))\,\mathrm{d}t \\
&= -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 \left(\int_0^T \mathrm{d}t + \int_0^T \cos(4\pi\nu t + 2\varphi)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 \left(T + \left[\frac{1}{4\pi\nu}\sin(4\pi\nu t + 2\varphi)\right]_0^T\right) \\
&= -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 \left(T + \frac{1}{4\pi\nu}\sin(4\pi\nu T + 2\varphi) - \frac{1}{4\pi\nu}\sin(2\varphi)\right) \\
&= -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 \left(T + \frac{1}{4\pi\nu}\sin(4\pi + 2\varphi) - \frac{1}{4\pi\nu}\sin(2\varphi)\right)
\end{aligned}$$
   comme $\sin(4\pi + 2\varphi) = \sin(2\varphi)$ il vient que
$$W(f) = -\frac{k_1}{2}(2\pi\nu x_0)^2 T = -2\pi^2 x_0^2 k_1 \nu.$$

Exercice III.2. Distance de freinage ★

Une voiture de masse $m = 1,5.10^3$ kg roule à la vitesse de 50 km.h^{-1} sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur freine brusquement et s'arrête après avoir parcouru une distance $d = 15$ m. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. **Calculer** le travail de la force de freinage.
   Le travail élémentaire de la force de freinage $\overrightarrow{f} = -f\overrightarrow{u}_x$ est

$$\begin{aligned}\delta W(\overrightarrow{f}) &= \overrightarrow{f}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\\ &= -f\overrightarrow{u}_x\cdot \mathrm{d}x\overrightarrow{u}_x\\ &= -f\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

   Le travail de la force de freinage sur le trajet parcouru par la voiture est

$$\begin{aligned}W(\overrightarrow{f}) &= \int_{\text{trajet}}\delta W(\overrightarrow{f})\\ &= \int_{x=0}^{x=d} -f\mathrm{d}x\\ &= -fd.\end{aligned}$$

2. **En déduire** la norme de cette force.
   Afin d'obtenir la norme f de la force on utilise le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_i W\left(\overrightarrow{F}_i\right)$$

   comme la force de frottement est la seule force qui travaille (le poids et la réaction du support sont perpendiculaires au mouvement), il vient que

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_c(x=d) - \mathcal{E}_c(x=0) &= -fd\\ \frac{1}{2}mv_{x=d}^2 - \frac{1}{2}mv_{x=0}^2 &= -fd\\ 0 - \frac{1}{2}mv_{x=0}^2 &= -fd\end{aligned}$$

   ainsi

$$f = \frac{mv_{x=0}^2}{2d}.$$

   A.N.

$$f = \frac{1{,}5\times 10^3\,\mathrm{kg}\times\left(50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}\right)^2}{2\times 15\,\mathrm{m}} = \frac{1{,}5\times 10^3\,\mathrm{kg}\times\left(1000\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{km}^{-1}\times\frac{1}{3600}\mathrm{h}\cdot\mathrm{s}^{-1}\times 50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}\right)^2}{2\times 15\,\mathrm{m}} = 9{,}6\times 10^3\,\mathrm{N}.$$

3. **Déterminer** la distance de freinage si la vitesse initiale est de 70 km.h^{-1}.
   On utilise l'expression obtenue plus tôt

$$f = \frac{mv_{x=0}^2}{2d}.$$

   Il vient que

$$d = \frac{mv_{x=0}^2}{2f}.$$

En faisant le rapport de la distance $d = 15\,\mathrm{m}$ connue et la distance d' à trouver, il vient que

$$\frac{d}{d'} = \frac{mv_{x=0}^2}{2f}\frac{2f}{mv'^2_{x=0}} = \left(\frac{v_{x=0}}{v'_{x=0}}\right)^2$$

avec $v'_{x=0} = 70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ la nouvelle vitesse initiale. Ainsi

$$d' = d\left(\frac{v'_{x=0}}{v_{x=0}}\right)^2.$$

A.N.

$$d' = 15\,\mathrm{m} \times \left(\frac{70\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}{50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}\right)^2 = 29\,\mathrm{m}.$$

4. **Commenter** cette phrase relevée dans livret d'apprentissage de la conduite : "La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile".
Comme on peut le voir avec l'expression de la distance d'

$$d' = d\left(\frac{v'_{x=0}}{v_{x=0}}\right)^2$$

on constate que la phrase relevée traduit bien cette dernière : la distance de freinage augmente en fonction du carré de la vitesse initiale de freinage.

Exercice III.3. Le Marsupilami ★ ★

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée crée par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui peut se comporter comme un ressort et qui permet au Marsupilami de se propulser vers le haut.

On considère le marsupilami comme un point matériel $m = 50$ kg et sa queue comme un ressort. On note $l_0 = 2,0$ m la longueur à vide ce ressort et k sa constante de raideur. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

On étudie un saut du Marsupilami. À l'instant initial t_0 le ressort est comprimé et a une longueur $l_m = 50$ cm. À un instant ultérieur t_1 la longueur du ressort est l_0, à cet instant le Marsupilami quitte le sol. À un autre instant ultérieur t_2, le Marsupilami atteint une hauteur maximal de h.

1. **Faire** le bilan des forces qui s'exerce sur le Marsupilami. **Déterminer** si ces forces sont conservatives.
Les forces qui s'exercent sur le Marsupilami sont son poids, la réaction du support et la force de rappel du ressort. Seule la réaction du support n'est pas une force conservative.
2. **Utiliser** le théorème adapté aux instant t_0, t_1 et t_2.
On peut utiliser le théorème de l'énergie mécanique car toutes les forces sont soit conservatives, soit ne travaillent pas (réaction du support). Dans ce cas

$$\Delta\mathcal{E}_m = \sum_i W\left(\vec{F}_i^{\,\mathsf{NC}}\right) = 0.$$

Ainsi l'énergie mécanique du Marsupilami se conserve. On peut alors déterminer la valeur de son énergie cinétique et des énergies potentielles :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c(t) + \sum_i \mathcal{E}_{p,i}(t) = \mathsf{cst}\\ &= \frac{1}{2}mv^2(t) + mgz(t) + \frac{1}{2}k\left(z(t) - l\right)^2\end{aligned}$$

avec $z(t)$ l'altitude du Marsupilami par rapport au sol, k la constante de raideur de sa queue et l sa longueur à vide ou à l'équilibre.

Comme à t_0 la vitesse de l'animal est nulle et on considère qu'il a une altitude nulle, ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= mgz(t_0) + \frac{1}{2}k\left(z(t_0) - l\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(l_m - l\right)^2\end{aligned}$$

A t_1 la vitesse de l'animal est nulle et on considère qu'il a une altitude nulle, ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= mgz(t_0) + \frac{1}{2}k\left(z(t_0) - l\right)^2 \\ &= \frac{1}{2}k\left(l_m - l\right)^2\end{aligned}$$

Comme à t_2 sa hauteur est maximale, il n'a plus de vitesse. On considère également que le ressort n'est plus comprimé et qu'il a atteint sa longueur à vide, ainsi

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= mgz(t_2) + \frac{1}{2}k\left(z(t_0) - l\right)^2 \\ &= mgh + \frac{1}{2}k\left(l - l\right)^2 & &= mgh.\end{aligned}$$

3. La hauteur maximale atteinte par le Marsupilami est $h = 10$ m. **Déterminer** la valeur de k et la valeur de la vitesse au décollage du Marsupilami.

Exercice III.4. Oscillation d'un pendule ★ ★

Un point matériel A de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil idéal de longueur L dont l'autre extrémité O est fixe. On ne considère pas les mouvements en dehors d'un plan vertical Oxy. On repère A par l'angle θ entre le fil et la verticale. On désigne par $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ l'accélération de pesanteur. On tient compte d'une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -k_1\overrightarrow{v}$.

1. **Déterminer** l'équation différentielle du mouvement de A en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
Le système est le point matériel. On se place dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre. Le mouvement étant circulaire dans un plan, le système de coordonnées le mieux adapté est le système cylindro-polaire.
Bilan des forces : le poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$, la tension du fil $\overrightarrow{T}$ et une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -k_1\overrightarrow{v}$.
Dans le repère cylindro-polaire la vitesse est définie telle que

$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

avec R le rayon de la trajectoire circulaire de l'objet qui correspond ici à L, soit

$$\overrightarrow{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

D'après le théorème de la puissance cinétique il vient que

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_i\right)$$

soit ici

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{T}\cdot\overrightarrow{v} + \overrightarrow{f}\cdot\overrightarrow{v}.$$

La tension du fil est radiale et l'énergie cinétique est telle que

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2$$

donc

$$\frac{1}{2}mL^2\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t} = m\overrightarrow{g}\cdot L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - T\overrightarrow{u_\rho}\cdot L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - k_1 L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\cdot L\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = mgL\dot{\theta}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) - k_1L^2\dot{\theta}^2$$

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -mgL\dot{\theta}\sin(\theta) - k_1L^2\dot{\theta}^2$$

$$mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + k_1L^2\dot{\theta}^2 + mgL\dot{\theta}\sin(\theta) = 0$$

$$\frac{L}{g}\dot{\theta}\ddot{\theta} + \frac{k_1}{m}\frac{L}{g}\dot{\theta}^2 + \dot{\theta}\sin(\theta) = 0.$$

soit, en considérant les solutions pour lesquelles $\dot{\theta} \neq 0$

$$\boxed{\frac{L}{g}\ddot{\theta} + \frac{k_1}{m}\frac{L}{g}\dot{\theta} + \sin(\theta) = 0.}$$

2. Les frottements sont suffisamment faibles pour que le régime soit pseudo-périodique. **Donner** la condition sur k_1 pour qu'il en soit ainsi. On utilisera une des formes canoniques de l'équation différentielle du deuxième ordre obtenue plus tôt.
On remarque que l'équation différentielle précédente correspond à l'équation d'un oscillateur amorti. On utilise une équation canonique pour identifier la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du système, soit

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\theta} + \frac{1}{Q\omega_0}\dot{\theta} + \theta = 0.$$

Il vient que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

et

$$\frac{1}{Q\omega_0} = \frac{k_1}{m}\frac{L}{g}$$

soit

$$Q = \frac{1}{\omega_0}\frac{g}{L}\frac{m}{k_1} = \sqrt{\frac{L}{g}}\frac{g}{L}\frac{m}{k_1} = \sqrt{\frac{g}{L}}\frac{m}{k_1}.$$

Le système est en régime pseudo-périodique lorsque $Q > \frac{1}{2}$ soit

$$\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{m}{k_1} > \frac{1}{2}$$

$$\boxed{k_1 < 2m\sqrt{\frac{g}{L}}.}$$

3. On lâche le pendule sans vitesse initiale d'un position faisant un angle θ_0 faible. **Linéariser** l'équation différentielle du mouvement puis **déterminer** l'expression de θ en fonction du temps t.
Pour des amplitudes faibles du pendule on peut faire le développement limité à l'ordre 0 de $\sin\theta$ en θ, $\sin\theta \approx \theta$. Il vient que

$$\frac{L}{g}\ddot{\theta} + \frac{k_1}{m}\frac{L}{g}\dot{\theta} + mgL\theta = 0.$$

L'équation est ainsi linéariser : il n'y a plus que des termes impliquant θ à la puissance un (on peut développer le sinus d'une variable en somme de puissances de cette variable).
Le mouvement étant pseudo-périodique, la solution de l'équation différentielle homogène du deuxième ordre est

$$\theta(t) = e^{-t/\tau}\left(K_1 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)\right)$$

avec τ la constante de temps du circuit telle que

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = 2\sqrt{\frac{g}{L}}\frac{m}{k_1}\sqrt{\frac{L}{g}} = 2\frac{m}{k_1}$$

et ω la pseudo-période telle que

$$\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

On peut déterminer les constantes K_1 et K_2 à partir des conditions initiales du mouvement. Initialement le pendule est en θ_0 et sa vitesse est nulle, ainsi

$$\theta(0) = K_1 = \theta_0$$

donc

$$\theta(t) = e^{-t/\tau}\left(\theta_0 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)\right).$$

La vitesse angulaire est donc

$$\dot{\theta}(t) = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}\left(\theta_0 \cos(\omega t) + K_2 \sin(\omega t)\right) + e^{-t/\tau}\left(-\omega\theta_0 \sin(\omega t) + \omega K_2 \cos(\omega t)\right)$$

soit à $t = 0$

$$\dot{\theta}(0) = -\frac{1}{\tau}\theta_0 + \omega K_2 = 0$$

$$K_2 = \frac{1}{\omega\tau}\theta_0.$$

Ainsi l'équation du mouvement du pendule amorti est

$$\theta(t) = e^{-t/\tau}\left(\theta_0 \cos(\omega t) + \frac{\theta_0}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right)$$

4. **Donner** l'allure de la courbe représentant θ en fonction du temps.
   L'évolution de la coordonnée θ du pendule est donnée ci-dessous.

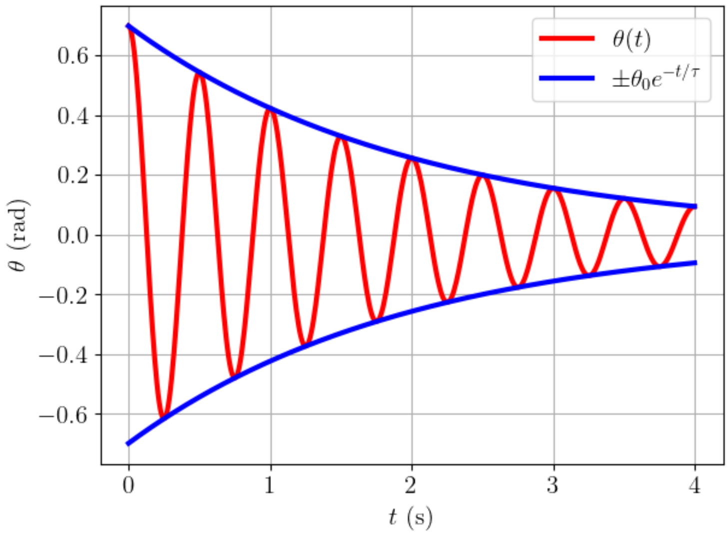


Figure 1 – Évolution de la coordonnée θ en fonction du temps.

Exercice III.5. Cycliste au Tour de France ★ ★ ★

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante $\mathcal{P}$, les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste telles $\overrightarrow{F}_f = -kv\overrightarrow{v}$ avec k une constante positive. On néglige le travail des forces de frottements du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

1. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, **établir** une équation différentielle en v et montrer qu'on peut la mettre sous la forme
$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\left(v_l^3 - v^3\right)$$
avec v_l une constante homogène à une vitesse dont on cherchera la signification physique.
Le sol est lié au référentiel galiléen terrestre. Le système constitué du cycliste et de son vélo est assimilé à son centre de gravité et soumis à deux forces verticales : son poids et la réaction du sol ; et à deux forces horizontales : la force de frottement de l'air et la force motrice.
On applique le théorème de la puissance cinétique
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}\left(\overrightarrow{P}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{R}\right) + \mathcal{P}\left(\overrightarrow{F}_f\right) + \mathcal{P}.$$
Comme le poids et la réaction du support sont orthogonales au mouvement, ces forces ne travaillent pas donc leur puissance est nulle. Il vient que
$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_f\cdot\overrightarrow{v} + \mathcal{P}$$
$$\frac{1}{2}m\frac{\mathrm{d}v^2}{\mathrm{d}t} = -kv\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} + \mathcal{P}$$
$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} - kv^3.$$
Si on considère que la dérivée temporelle de la vitesse est un rapport de deux différentielles on peut écrire que
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

ainsi

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathcal{P} - kv^3$$

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\left(\frac{\mathcal{P}}{k} - v^3\right).$$

On peut identifier le terme $\frac{\mathcal{P}}{k}$ à v_l^3, le cube de la vitesse limite : la vitesse pour laquelle la puissance motrice est compensée par la puissance des forces de freinage.

2. On pose $f(x) = k\left(v_l^3 - v^3\right)$. **Dériver** $f(x)$ par rapport à x. **Exprimer** $mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ en fonction de $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(v_l^3 - v^3\right)\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(k\left(v_l^3 - v^3\right)\right)$$

or comme k et v_{lim} sont des constantes, il vient que

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = -k\frac{\mathrm{d}v^3}{\mathrm{d}x} = -3v^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

En multipliant par $-\frac{m}{3k}$ l'expression précédente, il vient que

$$\boxed{mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{m}{3k}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}.}$$

3. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$ et **donner** la solution générale de cette équation.

L'équation différentielle initiale stipule que

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\left(v_{lim}^3 - v^3\right)$$

or, on a montré que

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{m}{3k}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

et il a été posé que

$$f(x) = k\left(v_{lim}^3 - v^3\right)$$

donc, il vient que

$$-\frac{m}{3k}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$$

soit

$$f(x) + \frac{m}{3k}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = 0.$$

La solution générale de cette équation est

$$\boxed{f(x) = Ae^{-x/L}}$$

avec A une constante à déterminer à partir de la condition initiale et L la distance caractéristique d'évolution de $f(x)$ telle que

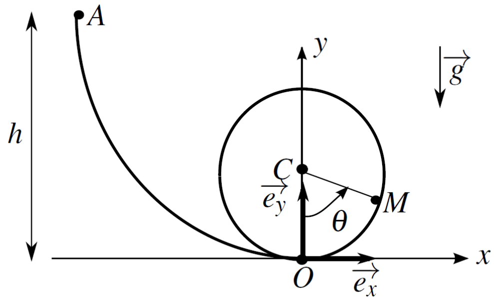
$$L = \frac{m}{3k}.$$

4. On étudie le cycliste au moment où il aborde la ligne droite à la position $x = 0$ et avec une vitesse v_0. **Déterminer** l'expression de $f(x)$ puis de $v(x)$ à partir de ces conditions initiales.
   A $t = 0$, le cycliste se trouve en $x = 0$ et il a une vitesse initiale v_0, il vient que
$$f(x=0) = A = k\left(v_{lim}^3 - v_0^3\right)$$
   donc
$$f(x) = k\left(v_{lim}^3 - v_0^3\right)e^{-x/L}.$$
   Or par définition
$$f(x) = k\left(v_{lim}^3 - v^3\right)$$
   donc
$$v(x) = \left(v_{lim}^3 - \frac{f(x)}{k}\right)^{1/3}$$
   soit
$$\boxed{v(x) = \left(v_{lim}^3 - \left(v_{lim}^3 - v_0^3\right)e^{-x/L}\right)^{1/3}.}$$

5. **Déterminer** la valeur de k pour $\mathcal{P} = 2$ kW et la vitesse limite $v_l = 20$ m.s^{-1}. **En déduire** la distance caractéristique L d'évolution de la vitesse pour un cycliste de masse $m = 85$ kg.
   On a vu que
$$v_l^3 = \frac{\mathcal{P}}{k}$$
   donc
$$k = \frac{\mathcal{P}}{v_l^3}.$$
   A.N.
$$\boxed{k = \frac{2.10^3}{(20)^3} = 0,3 \text{ kg.m}^{-1}.}$$
   On a aussi montré que
$$L = \frac{m}{3k} = m\frac{v_l^3}{3\mathcal{P}}.$$
   A.N.
$$\boxed{L = 85 \times \frac{20^3}{3 \times 2.10^3} = 113 \text{ m}.}$$

Exercice III.6. Bille dans une gouttière ★ ★ ★

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière à l'intérieur du guide circulaire. On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_y}$ l'accélération de la pesanteur.



1. **Calculer** la norme v_0 de la vitesse en O puis en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
Le référentiel lié au sol est galiléen. Les forces s'appliquant au système M sont le poids (force conservative) et la réaction du support dont le travail car orthogonal au mouvement dans le cas d'un mouvement sans frottement. On est donc dans un cas de conservation de l'énergie mécanique. On peut écrire

$$\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(O)$$

soit

$$\frac{1}{2}mv^2(A) + mgy(A) = \frac{1}{2}mv^2(O) + mgy(O)$$

et comme la vitesse est nulle en A, il vient que

$$mg\left(y(A) - y(O)\right) = \frac{1}{2}mv^2(O)$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2(O)$$

soit

$$\boxed{v(O) = \sqrt{2gh}.}$$

Dans le repère polaire dont l'origine est en C la position du système M sur le cercle est

$$\overrightarrow{CM} = \rho\overrightarrow{u_\rho}.$$

L'altitude du système M dans le repère cartésien est donc

$$y(M) = y(C) + \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{u_y}$$

$$y(M) = a + a\cos(\pi - \theta)$$

$$y(M) = a\left(1 - \cos\theta\right).$$

La vitesse du système M en n'importe quel point du cercle est obtenue de manière similaire

$$mgy(A) = \frac{1}{2}mv^2(M) + mgy(M)$$

$$\frac{1}{2}mv^2(M) = mg\left(y(A) - y(M)\right)$$

$$\boxed{v(M) = \sqrt{2g\left(h - a\left(1 - \cos\theta\right)\right)}.}$$

2. **Déterminer** la réaction de la gouttière en un point du guide circulaire.
Pour déterminer la réaction, on fait l'hypothèse que la bille reste en contact avec la gouttière. Dans ce cas, son mouvement est circulaire (sa coordonnée ρ est constante) et on utilise les relations cinématiques

$$\overrightarrow{CM} = \rho\overrightarrow{u_{rho}} \qquad \vec{v} = \rho\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \qquad \vec{a} = -\rho\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_\rho} + \rho\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

Le PFD sur la composante $\overrightarrow{u_\theta}$ donne

$$ma_\theta = -R + mg\cos\theta$$

avec R la norme de la réaction du support. Il vient que

$$-m\rho\dot{\theta}^2 = -R + mg\cos\theta.$$

La coordonnée ρ correspond à a le rayon du cercle, soit

$$-ma\dot{\theta}^2 = -R + mg\cos\theta.$$

On remarque que la vitesse peut s'écrire

$$\vec{v} = a\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

donc sa norme est

$$v = a\dot{\theta}$$

ainsi

$$-m\frac{v^2}{a} = -R + mg\cos\theta.$$

On utilise l'expression de v obtenue à la question 1

$$-2mg\left(\frac{h}{a} - (1-\cos\theta)\right) = -R + mg\cos\theta$$

$$R = 2mg\left(\frac{h}{a} - (1-\cos\theta)\right) + mg\cos\theta$$

$$\boxed{R = mg\left(3\cos\theta + 2\frac{h}{a} - 2\right).}$$

3. **Déterminer** la hauteur minimale de A pour que la bille ait un mouvement révolutif dans le guide.
Pour que la bille ait un mouvement révolutif, il faut que la réaction ne s'annule en aucun point du cercle. Son expression montre qu'elle est minimale en $\theta = \pi$ (au sommet du cercle). On souhaite donc que $R(\theta = \pi) > 0$ soit

$$mg\left(3\cos\pi + 2\frac{h}{a} - 2\right) > 0$$

$$mg\left(-3 + 2\frac{h}{a} - 2\right) > 0$$

$$\boxed{h > \frac{5}{2}a.}$$

Exercice III.7. Tige avec ressort ★ ★ ★

On considère une tige fixe , dans un plan vertical xOz, faisant un l'angle α avec l'axe (Oz). Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et astreint à se déplacer sans frottement le long de celui-ci. Cet anneau est également relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée en O. On repère la position de M par $OM = X$.

1. **Déterminer** les forces conservatives appliquées à M. **Déterminer** l'expression de leur énergie potentielle E_p en fonction de X et α.

Les forces conservatives appliquées à M sont son poids $\overrightarrow{P}$ et la force de rappel du ressort notée $\overrightarrow{T_r}$. La réaction du support ne travaille pas (elle est perpendiculaire au mouvement).

L'énergie potentielle de pesanteur de laquelle dérive le poids est

$$\mathcal{E}_p = mgz + \text{cst}$$

avec z la coordonnée du système défini selon le schéma ci-dessous.

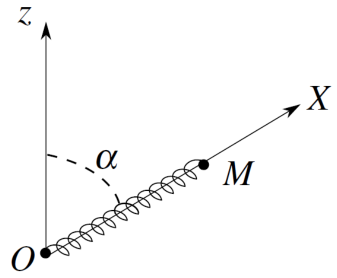


Figure 2 – Schéma du problème.

À partir de la définition de OM il vient que

$$z = X\cos\alpha$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mgX\cos\alpha + \text{cst}.$$

L'énergie potentielle de pesanteur associée à la force de rappel du ressort est

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\,(l - l_v)^2 + \text{cst}$$

avec l la longueur du ressort qui correspond dans notre cas à X. Ainsi

$$\mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k\,(X - l_v)^2 + \text{cst}.$$

La somme des énergies potentielles est donc

$$\mathcal{E}_p = mgX\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(X - l_v)^2 + \text{cst}.$$

On peut prendre l'origine de la somme des énergies potentielles en $X = l_v$ soit

$$0 = mgl_v\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(l_v - l_v)^2 + \text{cst}$$

$$0 = mgl_v\cos\alpha + \text{cst}$$

$$\text{cst} = -mgl_v\cos\alpha$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mg\,(X - l_v)\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(X - l_v)^2.$$

2. **Établir** l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Ici, il n'y a pas de frottements et la force de réaction du support est normale au mouvement donc l'énergie mécanique est constante, soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Exprimons la dérivée temporelle de l'énergie mécanique pour le système. Donnons d'abord l'expression de $\mathcal{E}_m$

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 + mg\,(X - l_v)\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(X - l_v)^2\,.$$

Dans le repère choisi la valeur de la vitesse v correspond à la dérivée par rapport au temps de la coordonnées X, soit $\dot{X}$, ainsi

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{X}^2 + mg\,(X - l_v)\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(X - l_v)^2\,.$$

La dérivée temporelle de l'énergie mécanique est donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = m\dot{X}\ddot{X} + mg\dot{X}\cos\alpha + k\dot{X}\,(X - l_v)\,.$$

Or, comme l'énergie mécanique est constante, il vient que

$$0 = m\dot{X}\ddot{X} + mg\dot{X}\cos\alpha + k\dot{X}\,(X - l_v)\,.$$

En cherchant une solution différente de $\dot{X} = 0$, il vient que

$$0 = m\ddot{X} + mg\cos\alpha + k\,(X - l_v)$$

soit

$$\boxed{\ddot{X} + \frac{k}{m}X = \frac{k}{m}l_v - m\cos\alpha.}$$

On trouve une équation différentielle du premier ordre correspondant à l'équation d'un oscillateur harmonique.

3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles. **Étudier** la fonction $\mathcal{E}_p(X)$ dans le cas où $mg\cos\alpha < kl_v$. **Tracer** son allure.
fin d'étudier la fonction $\mathcal{E}_p(X)$ on doit définir sa dérivée, soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p(X)}{\mathrm{d}X} = mg\cos\alpha + k\,(X - l_v)\,.$$

Cette dérivée s'annule pour

$$X_0 = l_v - m\frac{g}{k}\cos\alpha$$

avec $X > 0$ car $mg\cos\alpha < kl_v$.
Pour cette position, l'énergie potentielle est

$$\mathcal{E}_p(X_0) = mg\left(l_v - m\frac{g}{k}\cos\alpha - l_v\right)\cos\alpha + \frac{1}{2}k\left(l_v - m\frac{g}{k}\cos\alpha - l_v\right)^2$$

$$\mathcal{E}_p(X_0) = -m^2\frac{g^2}{k}\cos^2\alpha + \frac{1}{2}m^2\frac{g^2}{k}\cos^2\alpha = -\frac{1}{2}\frac{(mg\cos\alpha)^2}{k}.$$

Pour $X < X_0$ la dérivée de $\mathcal{E}_p(X)$ est négative, donc la fonction $\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_c(t=0) = \frac{1}{2}mV_0^2.(X)$ est décroissante de $X \to -\infty$ jusqu'à X_0.
Pour $X > X_0$ la dérivée de $\mathcal{E}_p(X)$ est positive, donc la fonction $\mathcal{E}_p(X)$ est croissante de X_0 à $X \to \infty$. On peut tracer l'allure de la variation d'énergie potentielle en fonction de la position X.

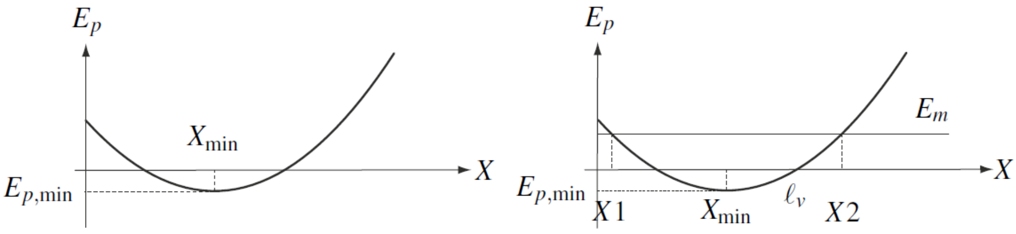


Figure 3 – Schéma du problème

4. **Discuter** sur le graphique les mouvements possibles en prenant $t = 0$ les conditions initiales suivantes : $X = l_v$ et $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = V_0$. **Préciser** la valeur maximale de V_0 pour que le mouvement se fasse entre les deux positions extrêmes $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$.
Les positions accessibles au système dépendent de la valeur de l'énergie mécanique qui est constante car les seules forces dont le travail est non nul sont conservatives.
A $t = 0$, les énergies potentielles sont nulles donc

$$\mathcal{E}_m(t=0) = \mathcal{E}_c(t=0) = \frac{1}{2}mV_0^2.$$

Les seules valeurs accessibles de X sont celles pour lesquelles

$$\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_p.$$

Les points extrêmes X_a et X_b entre lesquels le mouvement est possible correspondent à des points pour lesquels l'énergie cinétique est nulle donc

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mV_0^2$$

donc

$$\mathcal{E}_p = mg\,(X_{a,b} - l_v)\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(X_{a,b} - l_v)^2 = \frac{1}{2}mV_0^2.$$

Comme on peut le voir sur le graphique, la position minimale X_a est positive si $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_p(0)$ donc la vitesse V_0 pour que cela soit respectée est telle que

$$\frac{1}{2}mV_0^2 < mg\,(0 - l_v)\cos\alpha + \frac{1}{2}k\,(0 - l_v)^2$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2 < -mgl_v\cos\alpha + \frac{1}{2}kl_v^2$$

donc

$$\boxed{V_0 < \pm\sqrt{\frac{l_v^2 - 2mgl_v\cos\alpha}{m}}.}$$

5. **Déterminer** les fonctions $V(X)$ et $X(t)$ dans les conditions de la question précédente.
On obtient la vitesse en exprimant l'énergie mécanique en tout point de la trajectoire est la même qu'à l'instant initial, soit

$$\mathcal{E}_m(t=0)=\mathcal{E}_m(X)$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2=\mathcal{E}_c+\mathcal{E}_p$$

$$\frac{1}{2}mV_0^2=\frac{1}{2}mV^2+mg(X-l_v)\cos\alpha+\frac{1}{2}k(X-l_v)^2$$

donc

$$\boxed{V=\pm\sqrt{V_0^2-2gX\cos\alpha-\frac{k(X-l_v)^2}{m}+2gl_v\cos\alpha}.}$$

Pour déterminer $X(t)$, on utilise l'équation du mouvement établie à la question 2. On utilise la positon du minimum du potentiel

$$X_0=l_v-\frac{mg\cos\alpha}{k}$$

et la pulsation propre du système $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.
Il vient que

$$\ddot{X}+\omega^2\dot{X}=\omega_0X_0.$$

En résolvant l'équation différentielle du deuxième ordre, il vient que

$$X=X_0+A\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t).$$

À $t=0$, $X(0)=l_v$ donc

$$X=X_0+A=l_v$$

donc $A=l_v-X_0$, soit

$$X=X_0+(l_v-X_0)\cos(\omega_0t)+B\sin(\omega_0t).$$

La variation temporelle de X est

$$V=-\omega_0(l_v-X_0)\sin(\omega_0t)+\omega_0B\cos(\omega_0t)$$

à $t=0$, $V=V_0$, soit

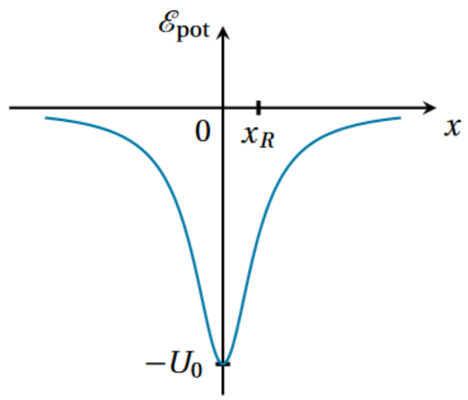
$$V_0=\omega_0B$$

donc $B=\frac{V_0}{\omega_0}$, donc

$$\boxed{X=X_0+(l_v-X_0)\cos(\omega_0t)+\frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t).}$$

Exercice III.8. Puits de potentiel ★ ★ ★

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe (Ox) d'un atome de lithium ^{7}Li, modélisé par un point matériel de masse m. Un faisceau laser focalisé au point O d'abscisse $x = 0$ exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1+x^2/x_R^2}$, avec U_0 et x_R des constantes positives. La fonction $\mathcal{E}_{pot}(x)$ est représentée sur la figure suivante.



L'axe (Ox) est horizontal, sauf mention explicite du contraire. Le poids est compensé par une autre composante de la force exercée par le laser dont on ne se préoccupe pas.

Données : masse d'un nucléon $m_n = 1{,}67.10^{-27}$ kg, longueur $x_R = 3{,}0.10^{-4}$ m. La profondeur U_0 est donnée en unité de température : $U_0 = k_B T_0$ avec $k_B = 1{,}38.10^{-27}$ J.K^{-1} la constante de Boltzmann et T_0 = 200 μK.

1. On considère un atome initialement immobile en $x = 0$ au fond du puits de potentiel. À l'instant $t = 0$, on lui communique une vitesse v_0 positive selon $\overrightarrow{u_x}$. **Déterminer** les conditions impliquant entre autres U_0 et v_0 pour que l'atome demeure dans un état lié.
La force exercée sur l'atome est conservative donc l'énergie mécanique est conservée. De plus, l'atome reste dans un état lié si son énergie mécanique est inférieure à la valeur asymptotique de $\mathcal{E}_{pot}$ quand x tend vers l'infini, soit $\mathcal{E}_{pot}(x \to \pm\infty) = 0$ donc $\mathcal{E}_m < 0$. On calcule à l'état initial

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - U_0$$

la condition est donc

$$\boxed{v_0 < \sqrt{\frac{2U_0}{m}}.}$$

2. Dans le cas où l'atome est mis dans un état de diffusion, **déterminer** l'expression de sa vitesse limite, notée v_∞, quand $x \to \infty$.
Lorsque l'atome est dans un état de diffusion son énergie mécanique est supérieure même pour les valeurs asymptotiques de l'énergie potentielle. Pour ces valeurs l'énergie mécanique est

$$\mathcal{E}_m(x \to \pm\infty) = \frac{1}{2}mv_\infty^2.$$

En utilisant la conservation de l'énergie mécanique à l'instant initial et pour $x \to \pm\infty$ il vient que

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - U_0 = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$

soit

$$\boxed{v_\infty = \sqrt{v_0 - \frac{2U_0}{m}}.}$$

3. On suppose que $v_0^2 \ll 2U_0/m$. **Montrer**, à l'aide d'un développement limité de $\mathcal{E}_{pot}(x)$ pour $x/x_R \ll 1$, que le mouvement de l'atome est quasi harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation, notée ω_0, dont on calculera la valeur.

   Pour $z \ll 1$ le développement limité à l'ordre 1 en 0 de $(1+z)^\alpha \approx 1+\alpha z$ donc il vient que

$$\mathcal{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = -U_0\left(1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right)^{-1} \approx -U_0\left(1-\left(\frac{x}{x_R}\right)^2\right) = -U_0 + \frac{U_0}{x_R^2}x^2.$$

   On peut réécrire l'énergie potentielle sous la forme

$$\mathcal{E}_{pot}(x) = -U_0 + \frac{1}{2}kx^2$$

   avec $k = \frac{2U_0}{x_R^2}$.

   On reconnaît l'expression de l'énergie potentiel d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ soit

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2U_0}{mx_R^2}}.}$$

   A.N.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k_BT_0}{7\times m_n \times x_R^2}} = \sqrt{\frac{2\times 1{,}38.10^{-23}\times 200.10^{-6}}{7\times 1{,}67.10^{-27}\times(3{,}0.10^{-4})^2}} = 2{,}3.10^3 \text{ rad.}$$

4. Dans cette question et celles qui suivent, on considère que l'axe (Ox) est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus que $x/x_R \ll 1$.

   Déterminer une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée $\mathcal{E}'_{pot}$. On utilisera la variable $y = x/x_R$ et le paramètre sans dimension $\alpha = U_0/(mgx_R)$.

   On rajoute l'énergie potentielle de pesanteur mgx à l'expression précédente en considérant que l'origine de l'énergie potentielle de pesanteur est située en $x=0$. Il vient que

$$\mathcal{E}'_{pot} = mgx - \frac{U_0}{1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = mgx\frac{x_R}{x_R} - \frac{mgx_R}{mgx_R}\frac{U_0}{1+\left(\frac{x}{x_R}\right)^2} = mgyx_Ry - mgx_R\frac{\alpha}{1+y^2}$$

   donc

$$\boxed{\mathcal{E}'_{pot} = mgx_R\left(y - \frac{\alpha}{1+y^2}\right).}$$

5. **Justifier** brièvement, en traçant son allure, que $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ peut présenter de nouveau un minimum local si α est supérieur à une valeur critique α_c dont on ne cherchera pas à donner la valeur. **Tracer** l'allure de $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ pour $\alpha > \alpha_c$.

   On a représenté l'allure de $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ pour différentes valeurs de α sur la Figure 4. Pour α faible, on retrouve la droite de l'énergie potentielle de la pesanteur. L'énergie potentielle due au laser $\mathcal{E}_{pot}$ creuse une indentation dans la droite de l'énergie potentielle de la pesanteur. Cette indentation est d'autant plus grande que α est grand. Si α est suffisamment important, la contribution de $\mathcal{E}_{pot}$ peut rendre $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ localement décroissante : on a alors un minimum local d'énergie potentielle, soit un nouvel équilibre stable.

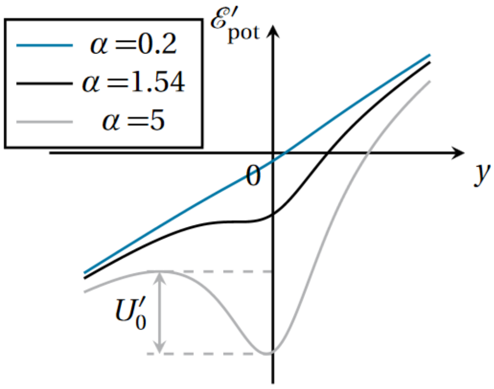


Figure 4 – Allure de $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ pour différentes valeurs de α.

6. On donne $\alpha_c = 1,54$. **Calculer** la valeur de U_0 correspondante, les autres paramètres étant inchangés et **commenter**.
   La valeur $\alpha = 1,54$ marque l'apparition de ce minimum local. D'après la définition de α, on calcule alors
   $$\alpha_c U_0 = \alpha_c mgx_R.$$
   A.N.
   $$\alpha_c U_0 = 1,54 \times 7 \times 1,67.10^{-27} \times 9,8 \times 3,0.10^{-4} = 5,3.10^{-29} \text{ J}.$$
   Il faut comparer cette valeur à $U_0 = k_B T_0$ pour montrer que pour cette valeur de $\alpha_c U_0$ on a bien un minimum local de l'énergie potentielle, soit
   A.N.
   $$U_0 = 1,38.10^{-23} \times 200.10^{-6} = 2,8.10^{-27} \text{ J}.$$
   Pour cette valeur de α_c on voit bien apparaître un minimum local du potentiel.
7. **Expliquer**, sans mener les calculs, comment calculer la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre.
   La profondeur du piège est la grandeur U'_0 représentée sur la Figure 4. On détermine les abscisses du minimum x_{min} et du maximum x_{max} locaux de $\mathcal{E}'_{pot}$ en annulant sa dérivée. La profondeur U'_0 est alors $\mathcal{E}'_{pot}(x_{max}) - \mathcal{E}'_{pot}(x_{min})$. La position d'équilibre est en $x = x_{min}$.