TD III. Énergétique du point

Exercice III.1. Travail d'une force de frottements fluides ★

Un point matériel M est animé d'un mouvement sinusoïdal le long d'un axe (Ox), d'amplitude x_0 et de fréquence ν. Il subit l'action d'une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -k_1 \overrightarrow{v}$.

1. **Donner** l'équation horaire du mouvement de M.
2. **Déduire** l'expression de sa vitesse $\overrightarrow{v}$ en fonction du temps.
3. À partir de la valeur de la vitesse, **exprimer** la différentielle $\mathrm{d}x$ en fonction de la différentielle $\mathrm{d}t$
4. **Déterminer** le travail de $\overrightarrow{f}$ au cours d'une période du mouvement (on pourra utiliser une relation trigonométrique pour transformer $\sin^2$ en une somme de deux $\cos$).

Exercice III.2. Distance de freinage ★

Une voiture de masse $m = 1{,}5.10^3$ kg roule à la vitesse de 50 km.h^{-1} sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur freine brusquement et s'arrête après avoir parcouru une distance $d = 15$ m. On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.

1. **Calculer** le travail de la force de freinage.
2. **En déduire** la norme de cette force.
3. **Déterminer** la distance de freinage si la vitesse initiale est de 70 km.h^{-1}.
4. **Commenter** cette phrase relevée dans livret d'apprentissage de la conduite : "La distance de freinage est proportionnelle au carré de la vitesse du mobile".

Exercice III.3. Le Marsupilami ★ ★

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée crée par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui peut se comporter comme un ressort et qui permet au Marsupilami de se propulser vers le haut.

On considère le marsupilami comme un point matériel $m = 50$ kg et sa queue comme un ressort. On note $l_0 = 2{,}0$ m la longueur à vide ce ressort et k sa constante de raideur. On prendra $g = 10$ m.s^{-2}.

On étudie un saut du Marsupilami. À l'instant initial t_0 le ressort est comprimé et a une longueur $l_m = 50$ cm. À un instant ultérieur t_1 la longueur du ressort est l_0, à cet instant le Marsupilami quitte le sol. À un autre instant ultérieur t_2, le Marsupilami atteint une hauteur maximal de h.

1. **Faire** le bilan des forces qui s'exerce sur le Marsupilami. **Déterminer** si ces forces sont conservatives.
2. **Utiliser** le théorème adapté aux instant t_0, t_1 et t_2.
3. La hauteur maximale atteinte par le Marsupilami est $h = 10$ m. **Déterminer** la valeur de k et la valeur de la vitesse au décollage du Marsupilami.

Exercice III.4. Oscillation d'un pendule ★ ★

Un point matériel A de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil idéal de longueur L dont l'autre extrémité O est fixe. On ne considère pas les mouvements en dehors d'un plan vertical Oxy. On repère A par l'angle θ entre le fil et la verticale. On désigne par $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ l'accélération de pesanteur. On tient compte d'une force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -k_1 \overrightarrow{v}$.

1. **Déterminer** l'équation différentielle du mouvement de A en appliquant le théorème de l'énergie cinétique.
2. Les frottements sont suffisamment faibles pour que le régime soit pseudo-périodique. **Donner** la condition sur k_1 pour qu'il en soit ainsi. On utilisera une des formes canoniques de l'équation différentielle du deuxième ordre obtenue plus tôt.
3. On lâche le pendule sans vitesse initiale d'un position faisant un angle θ_0 faible. **Linéariser** l'équation différentielle du mouvement puis **déterminer** l'expression de θ en fonction du temps t.
4. **Donner** l'allure de la courbe représentant θ en fonction du temps.

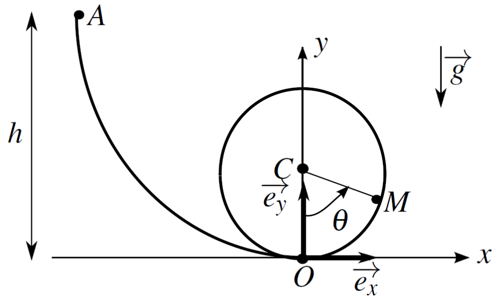
Exercice III.5. Cycliste au Tour de France ★ ★ ★

Un cycliste assimilé à un point matériel se déplace en ligne droite. Il fournit une puissance mécanique constante $\mathcal{P}$, les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v du cycliste telles $\overrightarrow{F}_f = -kv\overrightarrow{v}$ avec k une constante positive. On néglige le travail des forces de frottements du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement du cycliste.

1. En appliquant le théorème de la puissance cinétique, **établir** une équation différentielle en v et montrer qu'on peut la mettre sous la forme
$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\left(v_l^3 - v^3\right)$$
avec v_l une constante homogène à une vitesse dont on cherchera la signification physique.
2. On pose $f(x) = k\left(v_l^3 - v^3\right)$. **Dériver** $f(x)$ par rapport à x. **Exprimer** $mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$ en fonction de $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$.
3. **En déduire** l'équation différentielle vérifiée par $f(x)$ et **donner** la solution générale de cette équation.
4. On étudie le cycliste au moment où il aborde la ligne droite à la position $x = 0$ et avec une vitesse v_0. **Déterminer** l'expression de $f(x)$ puis de $v(x)$ à partir de ces conditions initiales.
5. **Déterminer** la valeur de k pour $\mathcal{P} = 2$ kW et la vitesse limite $v_l = 20$ m.s^{-1}. **En déduire** la distance caractéristique L d'évolution de la vitesse pour un cycliste de masse $m = 85$ kg.

Exercice III.6. Bille dans une gouttière ★ ★ ★

Une bille, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sans vitesse initiale depuis le point A d'une gouttière situé à une hauteur h du point le plus bas O de la gouttière. Cette dernière est terminée en O par un guide circulaire de rayon a, disposé verticalement. La bille, dont on suppose que le mouvement a lieu sans frottement, peut éventuellement quitter la gouttière à l'intérieur du guide circulaire. On note $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{u_y}$ l'accélération de la pesanteur.



1. **Calculer** la norme v_0 de la vitesse en O puis en un point M quelconque du cercle repéré par l'angle θ.
2. **Déterminer** la réaction de la gouttière en un point du guide circulaire.
3. **Déterminer** la hauteur minimale de A pour que la bille ait un mouvement révolutif dans le guide.

Exercice III.7. Tige avec ressort ★ ★ ★

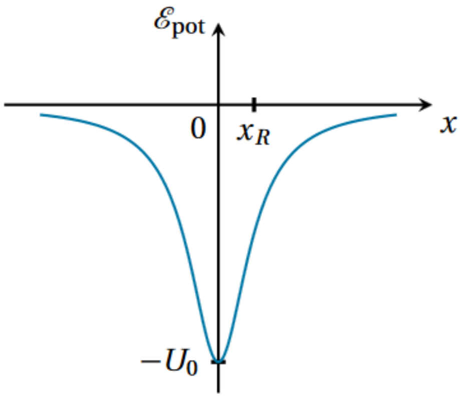
On considère une tige fixe , dans un plan vertical xOz, faisant un l'angle α avec l'axe (Oz). Un anneau M de masse m est enfilé sur la tige et astreint à se déplacer sans frottement le long de celui-ci. Cet anneau est également relié à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_v dont l'autre extrémité est fixée en O. On repère la position de M par $OM = X$.

1. **Déterminer** les forces conservatives appliquées à M. **Déterminer** l'expression de leur énergie potentielle E_p en fonction de X et α.
2. **Établir** l'équation différentielle du mouvement à l'aide du théorème de l'énergie mécanique.
3. On souhaite étudier graphiquement les différents mouvements possibles. **Étudier** la fonction $\mathcal{E}_p(X)$ dans le cas où $mg\cos\alpha < kl_v$. **Tracer** son allure.

4. **Discuter** sur le graphique les mouvements possibles en prenant $t = 0$ les conditions initiales suivantes : $X = l_v$ et $\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = V_0$. **Préciser** la valeur maximale de V_0 pour que le mouvement se fasse entre les deux positions extrêmes $X_1 > 0$ et $X_2 > 0$.
5. **Déterminer** les fonctions $V(X)$ et $X(t)$ dans les conditions de la question précédente.

Exercice III.8. Puits de potentiel ★ ★ ★

On étudie, dans un vide poussé, le mouvement unidimensionnel selon un axe (Ox) d'un atome de lithium ^{7}Li, modélisé par un point matériel de masse m. Un faisceau laser focalisé au point O d'abscisse $x = 0$ exerce sur l'atome une force conservative à laquelle on peut associer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{pot}(x) = -\frac{U_0}{1+x^2/x_R^2}$, avec U_0 et x_R des constantes positives. La fonction $\mathcal{E}_{pot}(x)$ est représentée sur la figure suivante.



L'axe (Ox) est horizontal, sauf mention explicite du contraire. Le poids est compensé par une autre composante de la force exercée par le laser dont on ne se préoccupe pas.

Données : masse d'un nucléon $m_n = 1{,}67.10^{-27}$ kg, longueur $x_R = 3{,}0.10^{-4}$ m. La profondeur U_0 est donnée en unité de température : $U_0 = k_B T_0$ avec $k_B = 1{,}38.10^{-27}$ J.K^{-1} la constante de Boltzmann et T_0 = 200 µK.

1. On considère un atome initialement immobile en $x = 0$ au fond du puits de potentiel. À l'instant $t = 0$, on lui communique une vitesse v_0 positive selon $\overrightarrow{u_x}$. **Déterminer** les conditions impliquant entre autres U_0 et v_0 pour que l'atome demeure dans un état lié.
2. Dans le cas où l'atome est mis dans un état de diffusion, **déterminer** l'expression de sa vitesse limite, notée v_∞, quand $x \to \infty$.
3. On suppose que $v_0^2 \ll 2U_0/m$. **Montrer**, à l'aide d'un développement limité de $\mathcal{E}_{pot}(x)$ pour $x/x_R \ll 1$, que le mouvement de l'atome est quasi harmonique. On donnera l'expression de sa pulsation, notée ω_0, dont on calculera la valeur.
4. Dans cette question et celles qui suivent, on considère que l'axe (Ox) est vertical ascendant et on tient compte du poids. On ne suppose plus que $x/x_R \ll 1$.
   Déterminer une nouvelle expression de l'énergie potentielle totale du système, notée $\mathcal{E}'_{pot}$. On utilisera la variable $y = x/x_R$ et le paramètre sans dimension $\alpha = U_0/(mgx_R)$.
5. **Justifier** brièvement, en traçant son allure, que $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ peut présenter de nouveau un minimum local si α est supérieur à une valeur critique α_c dont on ne cherchera pas à donner la valeur. **Tracer** l'allure de $\mathcal{E}'_{pot}(y)$ pour $\alpha > \alpha_c$.
6. On donne $\alpha_c = 1{,}54$. **Calculer** la valeur de U_0 correspondante, les autres paramètres étant inchangés et **commenter**.
7. **Expliquer**, sans mener les calculs, comment calculer la profondeur du piège ainsi constitué ainsi que sa position d'équilibre.