

TD I. Transformations, transferts d'énergies et bilans d'énergies

Exercice I.1. Expériences qualitatives ★

- On dépose un glaçon sortant d'un congélateur dans une coupelle et on l'abandonne à l'air libre.
Déterminer l'état final de la transformation. **Déterminer** s'il y a transfert mécanique et/ou thermique et dans quel sens.
- En hiver, un ballon de baudruche initialement à l'équilibre dans un lieu chauffé est apporté à l'extérieur.
Déterminer s'il y a transfert mécanique et/ou thermique et dans quel sens.
- Qualifier** les deux expériences précédentes.

Exercice I.2. Recherche d'un état final ★

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées est séparée en deux compartiments par une cloison étanche de surface S , mobile, diathermane (paroi perméable à la chaleur) et reliée à un ressort de constante de raideur k . Les deux compartiments contiennent chacun un gaz parfait. Dans l'état initial, le gaz du compartiment 1 est dans l'état (T_0, P_0, V_0, n) , le gaz du compartiment 2 dans l'état $(T_0, 2P_0, V_0, 2n)$, une cale bloque la cloison mobile et le ressort est au repos. On enlève la cale et on laisse le système atteindre un état d'équilibre.

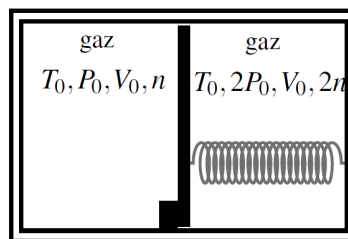


Figure 1.1 – Schéma du système.

- Décrire** l'évolution du système.
En enlevant la cale, le ressort va se détendre jusqu'à ce que la cloison atteigne une position d'équilibre mécanique. La pression étant plus importante dans le compartiment de droite, la cloison se déplace vers la gauche.
- Écrire** cinq relations faisant intervenir certaines des six variables d'état : V_1, V_2 (volumes finaux des deux compartiments), P_1, P_2 (pressions finales dans les deux compartiments), T_1, T_2 (températures finales dans les deux compartiments).
L'enceinte est indéformable, ainsi son volume initial $2V_0$ est égal à son volume final $V_1 + V_2$, soit

$$2V_0 = V_1 + V_2.$$

Le gaz est parfait dans le compartiment 1, on peut donc utiliser la loi des gaz parfait. Comme le nombre de moles n ne change pas entre l'état initial et l'état final du gaz il vient que

$$P_0 V_0 = n R T_0 \quad \text{soit} \quad n R = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

et

$$P_1 V_1 = nRT_1 \quad \text{soit} \quad nR = \frac{P_1 V_1}{T_1}$$

donc

$$\boxed{\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1}}$$

De même, le gaz est parfait dans le compartiment 2, on peut donc utiliser la loi des gaz parfait. Comme le nombre de moles $2n$ ne change pas entre l'état initial et l'état final du gaz il vient que

$$2P_0 V_0 = 2nRT_0 \quad \text{soit} \quad nR = \frac{P_0 V_0}{T_0}$$

et

$$P_2 V_2 = 2nRT_2 \quad \text{soit} \quad nR = \frac{P_2 V_2}{2T_2}$$

donc

$$\boxed{\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_2 V_2}{2T_2}}$$

La cloison est diathermane, elle permet donc le transfert de chaleur, ainsi, à la fin de la transformation, les compartiments ont la même température, soit

$$\boxed{T_1 = T_2}$$

Enfin, à la fin de la transformation la cloison doit atteindre l'équilibre mécanique. Si on effectue une étude dynamique avec la cloison comme système, dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre supposé galiléen, il vient que

$$m \vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_r$$

avec \vec{F}_1 et \vec{F}_2 les forces de pression des compartiments 1 et 2, et \vec{F}_r la force de rappel du ressort.

On considère l'axe (Ox) horizontal orienté de droite à gauche. Le ressort est fixé au côté droit du compartiment par un point fixe noté N , et à la cloison mobile par un point noté M . D'après la loi de Hooke, la force de rappel du ressort est

$$\vec{F}_r = k (\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{M_0 N_0})$$

avec M_0 et N_0 les positions des extrémités du ressort lorsqu'il atteint sa longueur à vide. D'après l'orientation de l'axe (Ox) il vient que

$$\vec{F}_r = k (l \vec{u}_x - l_0 \vec{u}_x) = k (l - l_0) \vec{u}_x$$

avec l la longueur du ressort à l'équilibre, soit largeur finale du compartiment 2, et l_0 la longueur à vide du ressort. Le ressort n'est ni comprimé, ni étiré à l'état initial : l_0 est donc la largeur initial du compartiment 2.

À l'équilibre la vitesse de la cloison est **constamment** nulle, donc son accélération est nulle, donc

$$\vec{0} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + k (l - l_0) \vec{u}_x$$

soit

$$\vec{0} = P_1 S \vec{u}_x - P_2 S \vec{u}_x + k(l - l_0) \vec{u}_x.$$

avec S la surface de la cloison. En projetant sur l'axe (Ox) et en remarquant que le volume initial du compartiment 2 est $V_0 = Sl_0$, et que son volume final est $V_2 = Sl$, il vient que

$$0 = P_1 - P_2 + \frac{k}{S}(l - l_0)$$

$$0 = P_1 - P_2 + \frac{k}{S} \left(\frac{V_2}{S} - \frac{V_0}{S} \right)$$

soit

$$P_2 = P_1 + \frac{k}{S^2}(V_2 - V_0).$$

Exercice I.3. Travail reçu par un gaz parfait durant une compression adiabatique ★

Une masse de 1 kg d'air, assimilé à un gaz parfait monoatomique, subit une compression adiabatique qui fait passer sa température $T_i = 293$ K à $T_f = 333$ K.

Trouver l'expression du travail nécessaire à la compression. **Réaliser** l'application numérique.

On considère que l'air est en majorité constitué de diazote de masse molaire $M(\text{N}_2) = 28$ g.mol⁻¹.

On a ici affaire à une compression adiabatique. Par définition le transfert thermique Q est nul. Si on écrit le premier principe de la thermodynamique il vient que

$$dU = \delta Q + \delta W = \delta W.$$

De plus, la variation d'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de la température soit

$$C_V = \frac{dU}{dT}.$$

La dérivée de l'expression précédente étant droite, nous pouvons interpréter la capacité thermique à volume constant comme le rapport de deux différentielles, soit

$$dU = C_V dT.$$

Ainsi le premier principe dans le cas d'un gaz parfait subissant une transformation adiabatique

$$C_V dT = \delta W$$

soit en intégrant

$$C_V (T_f - T_i) = W.$$

Pour un gaz parfait monoatomique, l'énergie interne U est telle que

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

avec n la quantité de matière en mol du gaz parfait. Donc

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{3}{2} nR$$

soit ici

$$W = \frac{3}{2} nR(T_f - T_i).$$

La masse m en kg et la masse molaire M en $\text{kg}\cdot\text{mol}^{-1}$ d'un corps sont liées de telle manière que

$$n = \frac{m}{M}$$

donc si on assimile l'air à un corps pur composé de molécule de diazote il vient que

$$W = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R(T_f - T_i).$$

A.N.

$$W = \frac{3}{2} \frac{1 \text{ kg}}{28 \cdot 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{mol}^{-1}} \times 8,314 \text{ J}\cdot\text{mol}^{-1}\cdot\text{K}^{-1} \times (333 \text{ K} - 293 \text{ K}) = 20 \text{ kJ}.$$

Exercice I.4. Valeur en eau d'un calorimètre ★

On mélange 95 g d'eau à 20°C et 71 g d'eau à 50°C dans un calorimètre dont la température initiale est 20°C.

1. **Déterminer** la température finale à l'équilibre en négligeant l'influence du calorimètre.
2. Expérimentalement on obtient 31,3°C. **Expliquer**.
3. **En déduire** la valeur en eau du calorimètre.

Exercice I.5. Détermination de la chaleur massique du cuivre ★

Dans un calorimètre dont la valeur en eau est de 41 g, on verse 100 g d'eau. Une fois l'équilibre thermique atteint, on mesure une température de 20°C. On plonge alors une barre métallique dont la masse est 200 g et dont la température initiale est de 60°C. À l'équilibre, on mesure une température de 24,5°C.

Déterminer la capacité thermique massique du métal.

On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_{eau} = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et on suppose que les capacités thermiques massiques sont constantes dans le domaine de températures considérées.

Il s'agit d'une transformation monobare (la pression extérieur au calorimètre ne varie pas) avec équilibre mécanique à l'état initial et l'état final. On peut donc utiliser le premier principe de la thermodynamique impliquant l'enthalpie. En considérant qu'il n'y a pas d'autres forces que les forces de pression, il vient que

$$\Delta H = Q$$

or comme le calorimètre est calorifugée, la transformation est adiabatique soit $Q = 0$, ainsi

$$\Delta H = 0.$$

L'enthalpie est une grandeur additive, on peut donc la décomposer en enthalpie de l'eau H_{eau} et enthalpie du cuivre H_{cuivre} , soit

$$\Delta H = \Delta H_{eau} + \Delta H_{cuivre} = 0.$$

On assimile le calorimètre, l'eau et le cuivre à des phases condensées indilatables et incompressibles, on peut donc exprimer leur capacité thermique à pression constante comme une dérivée droite de leur enthalpie par rapport à la température, soit

$$C_P = \frac{dH}{dT}$$

ainsi pour ces trois corps, la variation d'enthalpie peut être mis sous la forme

$$\Delta H = C_P(T_f - T_i).$$

Ces corps étant considérés comme des phases condensées indilatables et incompressibles, leurs capacités thermiques à pression constante et à volume constant sont approximativement égales, donc on peut les nommer indifféremment capacités thermiques.

La valeur en eau du calorimètre est notée μ , la masse de l'eau m_{eau} et la masse de cuivre m_{cuivre} . On note la capacité massique du cuivre c_{cuivre} . Il vient que

$$\Delta H_{eau} + \Delta H_{cuivre} = c_{eau} (\mu + m_{eau}) (T_f - T_{i,eau}) + c_{cuivre} m_{cuivre} (T_f - T_{i,cuivre}) = 0.$$

En isolant la capacité massique du cuivre il vient que

$$c_{cuivre} = c_{eau} \frac{(\mu + m_{eau}) (T_{i,eau} - T_f)}{m_{cuivre} (T_f - T_{i,cuivre})}.$$

A.N.

$$c_{cuivre} = 4,18 \cdot 10^3 \frac{(41 + 100) (20 - 24,5)}{200 (24,5 - 60)} = 3,7 \cdot 10^2 \text{ J.kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}.$$

Exercice I.6. Détente adiabatique d'un gaz parfait monoatomique ★

Un gaz monoatomique considéré comme parfait est maintenu à une pression de 1,2 bar et à une température de 300 K dans une enceinte cylindrique de volume $V_i = 1 \text{ L}$, grâce à une masse M posée sur un piston de masse $m_p = 1 \text{ kg}$. Le piston est à une hauteur $h_1 = 50 \text{ cm}$. On enlève la masse M , ce qui permet au gaz de se détendre de façon adiabatique jusqu'à la pression finale d'équilibre P_f . Le volume est alors V_f . On désigne par $P_0 = 1 \text{ bar}$ la pression atmosphérique.

1. **Calculer** la valeur de la masse posée sur le piston et la pression finale P_f .

Menons une étude dynamique sur le piston et la masse M considéré comme le système d'étude dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces auxquelles sont soumis le piston et la masse M sont leur poids \vec{P} , la force de pression à l'extérieur de l'enceinte \vec{F}_{ext} et la force de pression à l'intérieur de l'enceinte \vec{F}_{int} . À l'état initial le système est à l'équilibre, donc sa vitesse est constamment nulle, donc son accélération est nulle. Si on applique le PFD il vient que

$$\vec{0} = \vec{P} + \vec{F}_{ext} + \vec{F}_{int}.$$

On projette les forces le long d'un axe (Oz) verticale orientée vers le haut, il vient que

$$0 = -(m_p + M)g - P_0 S + P_i S.$$

avec S la surface du piston, telle que $V_i = h_1 S$.

Si on isole M il vient que

$$M = (P_i - P_0) \frac{S}{g} - m_p = (P_i - P_0) \frac{V_i}{h_1 g} - m_p.$$

A.N.

$$M = (1,2 \cdot 10^5 - 1 \cdot 10^5) \frac{1 \cdot 10^{-3}}{50 \cdot 10^{-2} \times 9,8} - 1 = 3 \text{ kg}.$$

En enlevant la masse M le piston atteint un nouvel état d'équilibre mécanique qui est décrit par l'application du PFD suivante

$$0 = -m_p g - P_0 S + P_f S$$

avec P_f la pression finale d'équilibre dans l'enceinte après avoir enlevé la masse M .

Si on isole P_f il vient que

$$P_f = m_p \frac{g}{S} + P_0 = m_p \frac{h_1 g}{V_i} + P_0.$$

A.N.

$$P_f = 1 \times \frac{50 \cdot 10^{-2} \times 9,8}{1 \cdot 10^{-3}} + 1 \cdot 10^5 = 1,05 \cdot 10^5 = 1 \text{ bar.}$$

2. **Effectuer** le bilan énergétique de la transformation.

En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur le gaz considérée comme le système d'étude il vient que

$$\Delta U = Q + W.$$

Comme la transformation est adiabatique (pas de transfert thermique) $Q = 0$, soit

$$\Delta U = W.$$

Le travail mécanique élémentaire δW est défini tel que

$$\delta W = -P_{ext} dV.$$

Au moment où enlève la masse M , la pression extérieur au gaz est la pression atmosphérique P_0 ainsi que le poids du piston par unité de surface que l'on peut assimiler à une pression le gaz, soit

$$P_{ext} = m_p \frac{g}{S} + P_0 = P_f$$

on reconnaît l'expression de la pression finale P_f constante.

Ainsi

$$\delta W = -P_f dV$$

soit en intégrant

$$W = -P_f (V_f - V_i).$$

Soit

$$\Delta U = P_f (V_i - V_f).$$

3. **Trouver** les rapports $\frac{V_f}{V_i}$ et $\frac{T_f}{T_i}$. **Réaliser** les applications numériques.

Le gaz étant un gaz parfait, la variation d'énergie interne ne dépend que de la température, soit

$$\Delta U = C_V (T_f - T_i)$$

ainsi

$$C_V (T_f - T_i) = P_f (V_i - V_f)$$

ou

$$C_V T_i \left(\frac{T_f}{T_i} - 1 \right) = P_f V_i \left(1 - \frac{V_f}{V_i} \right).$$

En utilisant la loi des gaz parfait, comme la quantité de matière n reste constante au cours de la transformation, il vient que

$$\begin{aligned} P_i V_i &= n R T_i & n R &= \frac{P_i V_i}{T_i} \\ P_f V_f &= n R T_f & n R &= \frac{P_f V_f}{T_f} \end{aligned}$$

soit

$$\frac{P_i V_i}{T_i} = \frac{P_f V_f}{T_f} \quad \text{et} \quad \frac{T_f}{T_i} = \frac{P_f V_f}{P_i V_i}.$$

On exprimer T_f inconnue à partir des autres grandeurs

$$C_V T_i \left(\frac{P_f V_f}{P_i V_i} - 1 \right) = P_f V_i \left(1 - \frac{V_f}{V_i} \right).$$

On multiplie le terme à droite de l'expression par $1 = \frac{P_i}{P_i}$ pour faire apparaître le rapport $\frac{P_f}{P_i}$ soit

$$C_V T_i \left(\frac{P_f V_f}{P_i V_i} - 1 \right) = \frac{P_f}{P_i} P_i V_i \left(1 - \frac{V_f}{V_i} \right).$$

Or $P_i V_i = nRT_i$ donc

$$C_V T_i \left(\frac{P_f V_f}{P_i V_i} - 1 \right) = \frac{P_f}{P_i} nRT_i \left(1 - \frac{V_f}{V_i} \right)$$

soit en simplifiant par T_i

$$C_V \left(\frac{P_f V_f}{P_i V_i} - 1 \right) = \frac{P_f}{P_i} nR \left(1 - \frac{V_f}{V_i} \right).$$

On notant x le rapport $\frac{P_f}{P_i}$ il vient que

$$C_V x \frac{V_f}{V_i} - C_V = nRx - nRx \frac{V_f}{V_i}$$

soit

$$\frac{V_f}{V_i} x (C_V + nR) = nRx + C_V$$

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{nRx + C_V}{x(C_V + nR)}.$$

Pour un gaz parfait monoatomique

$$C_V = \frac{dU}{dT} = \frac{d}{dT} \left(\frac{3}{2} nRT \right) = \frac{3}{2} nR.$$

Donc

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{nRx + \frac{3}{2} nR}{x \left(\frac{3}{2} nR + nR \right)}$$

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{nR \left(\frac{3}{2} + x \right)}{\frac{5}{2} nRx} = \frac{3 + 2x}{5x}.$$

A.N.

$$\frac{V_f}{V_i} = \frac{3 + 2 \frac{1,05}{1,2}}{5 \frac{1,05}{1,2}} = 1,086.$$

Je prends quelques liberté avec les chiffres significatifs car d'après le nombre de chiffres significatifs des valeurs fournies dans l'énoncé, tous les résultats n'auraient qu'un seul chiffre significatif ce qui n'est pas intéressant.

On a vu plus tôt que

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{P_f V_f}{P_i V_i}$$

soit

$$\frac{T_f}{T_i} = x \frac{3+2x}{5x} = \frac{3+2x}{5}.$$

A.N.

$$\frac{T_f}{T_i} = \frac{3+2\frac{1,05}{1,2}}{5} = 0,95.$$

4. **Calculer** le travail reçu par le gaz. Le travail reçu par le gaz est donc

$$W = -P_{ext}\Delta V = -P_f(V_f - V_i) = -P_f V_i \left(\frac{V_f}{V_i} - 1 \right).$$

A.N.

$$W = -1,05 \cdot 10^5 \times 1 \cdot 10^{-3} (1,086 - 1) = -9 \text{ J}.$$

Le gaz cède une énergie de 9 J sous forme de travail au milieu extérieur.

Exercice I.7. Transformations polytropiques ★ ★

Une transformation polytropique est une transformation quasistatique vérifiant PV^k constante.

1. **Calculer** le travail des forces de pression pour un gaz parfait subissant une transformation polytropique entre (P_0, V_0, T_0) et (P_1, V_1, T_1) en fonction des pressions et volumes ainsi que de k .

Le travail élémentaire des forces de pression est

$$\delta W = -P_{ext}dV$$

en considérant que le système à une paroi déformable et que la transformation est quasi-statique, la pression extérieure est égale à la pression du système soit $P_{ext} = P$, ainsi

$$\delta W = -PdV.$$

Comme la transformation est polytropique, il vient que

$$PV^k = \text{cst} \quad \text{donc} \quad PV^k = P_0 V_0^k$$

donc

$$\delta W = -P_0 V_0^k \frac{1}{V^k} dV$$

en intégrant

$$W = -P_0 V_0^k \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V^k}$$

car P_0 et V_0 sont des constantes. Ainsi

$$W = -P_0 V_0^k \left[-\frac{1}{k-1} \frac{1}{V^{k-1}} \right]_{V_0}^{V_1}$$

$$W = \frac{P_0 V_0^k}{k-1} \left(\frac{1}{V_1^{k-1}} - \frac{1}{V_0^{k-1}} \right)$$

$$W = \frac{1}{k-1} \left(\frac{P_0 V_0^k}{V_1^{k-1}} - \frac{P_0 V_0^k}{V_0^{k-1}} \right)$$

et comme $P_0 V_0^k = P_1 V_1^k = \text{cst}$ il vient que

$$W = \frac{1}{k-1} \left(\frac{P_1 V_1^k}{V_1^{k-1}} - \frac{P_0 V_0^k}{V_0^{k-1}} \right)$$

$$W = \frac{1}{k-1} (P_1 V_1 - P_0 V_0).$$

2. On note $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$ qui est une constante pour un gaz parfait. **Trouver** une expression du transfert thermique au cours de la transformation précédente de la forme $C(T_1 - T_0)$ où C est une constante.

On appliquer le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = Q + W$$

soit

$$Q = \Delta U - W.$$

Pour un gaz parfait

$$\Delta U = C_V (T_1 - T_0)$$

donc

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{1}{k-1} (P_1 V_1 - P_0 V_0).$$

En appliquant la loi des gaz parfait il vient que

$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad P_1 V_1 = nRT_1$$

comme la quantité de matière n se conserve au cours de la transformation

$$nR = \frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1} \quad \text{soit} \quad P_1 V_1 = P_0 V_0 \frac{T_1}{T_0}$$

donc

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{1}{k-1} \left(P_0 V_0 \frac{T_1}{T_0} - P_0 V_0 \right)$$

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{1}{k-1} \frac{P_0 V_0}{T_0} (T_1 - T_0)$$

$$Q = C_V (T_1 - T_0) - \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0)$$

$$Q = \left(C_V - \frac{nR}{k-1} \right) (T_1 - T_0).$$

D'après la relation de Mayer pour un gaz parfait

$$C_P - C_V = nR$$

de plus on introduit le coefficient de Laplace $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$, ainsi

$$\gamma C_V - C_V = nR$$

donc

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}.$$

En remplaçant dans l'expression du transfert thermique

$$Q = \left(\frac{nR}{\gamma - 1} - \frac{nR}{k - 1} \right) (T_1 - T_0)$$

$$Q = \frac{nR(k - 1 - \gamma + 1)}{(\gamma - 1)(k - 1)} (T_1 - T_0)$$

$$Q = \frac{nR(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k - 1)} (T_1 - T_0).$$

Ainsi

$$C = \frac{nR(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k - 1)}.$$

3. **Donner** une interprétation physique de C .

Les coefficients k et γ étant sans dimension, on constate que C a la même dimension que nR soit la même dimension qu'**une capacité thermique**.

4. **Étudier** en les interprétant physiquement les cas suivants : $k = \gamma$, $k = 0$, $k \rightarrow \infty$ et $k = 1$.

- Pour $k = \gamma$ il vient que

$$C = \frac{nR(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k - 1)} = 0$$

donc $Q = C(T_1 - T_0) = 0$. **Il s'agit d'une transformation adiabatique.**

- Pour $k = 0$ il vient que

$$C = \frac{nR(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k - 1)} = \frac{nR\gamma}{(\gamma - 1)} = nR \frac{\frac{C_P}{C_V}}{\frac{C_P}{C_V} - \frac{C_V}{C_V}} = nR \frac{C_P}{C_P - C_V} = nR \frac{C_P}{nR} = C_P.$$

On reconnaît la capacité thermique à pression constante, donc la transformation s'effectue à pression constante, elle est donc **isobare**, pour $k = 0$.

Si on étudie la relation polytropique

$$PV^k = \text{cst} \quad \text{soit} \quad PV^0 = \text{cst} \quad \text{soit} \quad P = \text{cst}$$

ce qui confirme qu'on a bien affaire à une **transformation isobare**.

- Pour $k \rightarrow \infty$ il vient que

$$C = \frac{nR(k - \gamma)}{(\gamma - 1)(k - 1)} \rightarrow \frac{nRk}{(\gamma - 1)k} = \frac{nR}{(\gamma - 1)} = \frac{nR}{\frac{C_P}{C_V} - \frac{C_V}{C_V}} = \frac{nRC_V}{C_P - C_V} = \frac{nRC_V}{nR} = C_V.$$

On reconnaît la capacité thermique à volume constant, donc la transformation s'effectue à volume constant, elle est donc **isochore**, pour $k \rightarrow \infty$.

Si on étudie la relation polytropique

$$PV^k = \text{cst} \quad \text{soit} \quad P^{1/k}V = \text{cst} \quad \text{soit pour } k \rightarrow \infty \quad V = \text{cst}$$

ce qui confirme qu'on a bien affaire à une **transformation isochore**.

- Pour $k = 1$ il vient que

$$C = \frac{nR(k-\gamma)}{(\gamma-1)(k-1)} \rightarrow \infty$$

or une capacité thermique est inversement proportionnelle à la variation de température, donc ici, la variation de température est nulle : **la transformation est isotherme. Un système avec une capacité thermique infinie est un système qui peut absorber n'importe quelle variation d'énergie sans faire varier sa température.**

Si on étudie la relation polytropique

$$PV = \text{cst}$$

or pour un gaz parfait $PV = nRT$ donc

$$T = \text{cst}$$

ce qui confirme qu'on a bien affaire à une **transformation isotherme**.

Exercice 1.8. Chauffage d'une enceinte ★ ★

On étudie le système illustré ci-dessous.

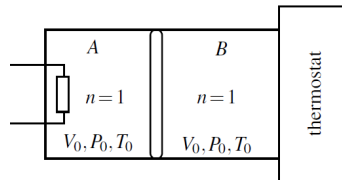


Figure 1.2 – Schéma du système.

On suppose que les enceintes contiennent des gaz parfaits et que l'enceinte A est parfaitement calorifugée. On note $\gamma = \frac{C_P}{C_V}$. On chauffe l'enceinte A jusqu'à la température T_1 par la résistance chauffante. Les transformations seront considérées comme quasistatiques.

1. **Déterminer** les volumes finaux des deux enceintes ainsi que la pression finale.

La cloison est mobile et calorifugée. Les enceintes étant rigides, la somme de leur volume initial et de leur volume final sont égale

$$2V_0 = V_A + V_B.$$

Au cours du chauffage, la cloison mobile bouge jusqu'à atteindre l'équilibre mécanique. Menons une étude dynamique sur le système qu'est la cloison étudiée dans le référentiel du laboratoire lié au référentiel terrestres supposé galiléen. Les forces qui s'exerce sur la cloison son son poids, la réaction du support et les forces de pression des enceintes A et B , notées \vec{F}_A et \vec{F}_B . À l'équilibre la vitesse du système est constamment nulle, donc son accélération est nulle. Si on s'intéresse uniquement à la composante horizontale de l'accélération, le PFD donne

$$0 = F_A + F_B \quad \text{soit} \quad 0 = P_A S - P_B S \quad \text{soit} \quad P_A = P_B$$

avec S la surface de la cloison. On note $P = P_A = P_B$.

En utilisant la loi des gaz parfaits pour le gaz de l'enceinte A à l'état initial et à l'état final il vient que

$$P_0 V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad P V_A = nRT_1$$

avec T_1 la température de la résistance chauffante. Comme la quantité de matière n est conservée, il vient que

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P V_A}{T_1}.$$

En utilisant la loi des gaz parfaits pour le gaz de l'enceinte B à l'état initial et à l'état final il vient que

$$P_0V_0 = nRT_0 \quad \text{et} \quad PV_B = nRT_0$$

avec T_0 la température à laquelle le thermostat maintient l'enceinte B . Comme la quantité de matière n est conservée, il vient que

$$\frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{PV_B}{T_0} \quad \text{soit} \quad P_0V_0 = PV_B.$$

Si on exprime V_A et V_B en fonction des relations trouvées il vient que

$$V_A = V_0 \frac{P_0 T_1}{P T_0} \quad \text{et} \quad V_B = V_0 \frac{P_0}{P}.$$

La pression P est inconnue, il faut donc l'éliminer. On peut éliminer P en faisant le rapport des deux volumes, soit

$$\frac{V_A}{V_B} = V_0 \frac{P_0 T_1}{P T_0} \frac{1}{V_0} \frac{P}{P_0} = \frac{T_1}{T_0}.$$

On peut ainsi exprimer V_A en fonction de V_B (ou l'inverse) et introduire cette expression dans la relation entre V_0 , V_A et V_B , soit

$$V_A = V_B \frac{T_1}{T_0}$$

ce qui donne

$$2V_0 = V_A + V_B = V_B \frac{T_1}{T_0} + V_B = V_B \left(1 + \frac{T_1}{T_0}\right).$$

Donc

$$V_B = \frac{2V_0}{1 + \frac{T_1}{T_0}}.$$

Et donc

$$V_A = V_B \frac{T_1}{T_0} = \frac{2V_0}{1 + \frac{T_1}{T_0}} \frac{T_1}{T_0}$$

soit

$$V_A = \frac{2V_0}{\frac{T_0}{T_1} + 1}.$$

En utilisant la relation

$$P_0V_0 = PV_B$$

il vient que la pression finale P est

$$P = \frac{P_0V_0}{V_B} = \frac{P_0V_0}{2V_0} \left(1 + \frac{T_1}{T_0}\right)$$

soit

$$P = \frac{P_0}{2} \left(1 + \frac{T_1}{T_0}\right).$$

2. **Calculer** la variation d'énergie interne de chacune des enceintes A et B ainsi que celle de l'ensemble $A+B$.

Comme le gaz est parfait dans l'enceinte A , il vient que

$$\Delta U_A = C_V (T_1 - T_0).$$

Comme le gaz est parfait dans l'enceinte B , il vient que

$$\Delta U_B = C_V (T_0 - T_0) = 0.$$

L'énergie interne étant une grandeur additive, la variation d'énergie interne de l'ensemble du système notée ΔU est

$$\Delta U = \Delta U_A + \Delta U_B = C_V (T_1 - T_0).$$

3. **Déterminer** la nature de la transformation de l'enceinte B . **En déduire** le travail échangé entre les enceintes A et B et le transfert thermique Q_1 échangé entre B et le thermostat.

Dans l'enceinte B , la transformation est quasi-statique. L'enceinte étant en contact avec un thermostat et calorifugée sur ces autres côtés, la transformation est monotherme. Comme on a affaire à une transformation monotherme et quasi-statique, **la transformation est donc isotherme** (et réversible thermiquement car elle est quasi-statique et il y a une paroi permettant les échanges thermiques).

D'après le premier principe de la thermodynamique pour l'enceinte B

$$\Delta U_B = Q_1 + W_B.$$

On a montré que

$$\Delta U_B = 0$$

donc

$$Q_1 = -W_B.$$

Le travail W_B reçu par l'enceinte B est

$$W_B = - \int_{V_0}^{V_B} P_{ext} dV$$

or comme la transformation est quasi-statique et que l'enceinte B a une paroi déformable (la cloison mobile), $P_{ext} = P$, soit

$$W_B = - \int_{V_0}^{V_B} P dV = - \int_{V_0}^{V_B} \frac{nRT_0}{V} dV$$

$$W_B = -nRT_0 \left[\ln \left(\frac{1}{V} \right) \right]_{V_0}^{V_B}$$

$$W_B = -nRT_0 \ln \left(\frac{V_B}{V_0} \right) = -nRT_0 \ln \left(\frac{2}{1 + \frac{T_1}{T_0}} \right).$$

Ainsi le transfert thermique de l'enceinte B au thermostat est

$$Q_1 = nRT_0 \ln \left(\frac{2}{1 + \frac{T_1}{T_0}} \right).$$

4. **Déterminer** le transfert thermique Q_2 fourni par la résistance. D'après le premier principe de la thermodynamique pour l'enceinte A

$$\Delta U_A = Q_2 + W_A$$

or le travail reçu par l'enceinte A est égal à l'opposé du travail fourni à l'enceinte B soit

$$W_A = -W_B = nRT_0 \ln \left(\frac{2}{1 + \frac{T_1}{T_0}} \right).$$

On a montré plus tôt que

$$\Delta U_A = C_V (T_1 - T_0)$$

donc

$$Q_2 = \Delta U_A - W_A = C_V (T_1 - T_0) - nRT_0 \ln \left(\frac{2}{1 + \frac{T_1}{T_0}} \right).$$

Exercice I.9. Compressions et détentes successives d'un gaz parfait ★ ★

On étudie les compressions et détentes successives d'un gaz parfait ($\gamma = 1,4$). On suppose que les transformations sont mécaniquement réversibles.

1. Le gaz subit une compression isotherme (température $T_0 = 273$ K) de $P_0 = 1$ bar à $P_1 = 20$ bar, puis une détente adiabatique jusqu'à P_0 . Pour cette détente adiabatique on indique que la température et la pression sont liées par la loi : $T^\gamma P^{1-\gamma} = \text{cst}$. **Calculer** la température T_1 après les deux transformations. Dans l'état initial, la température est T_0 et la pression est P_0 . Au cours de la compression isotherme, la température reste à T_0 et la pression augmente jusqu'à P_1 . Enfin, lors de la détente adiabatique, la température atteint la valeur T_1 et la pression revient à P_0 . La loi $T^\gamma P^{1-\gamma}$ est applicable pour la détente adiabatique, soit

$$T_0^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_0^{1-\gamma}$$

donc

$$T_1^\gamma = T_0^\gamma \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{1-\gamma}$$

$$T_1 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.$$

A.N.

$$T_1 = 273 \times 20^{\frac{1}{1,4}-1} = 116 \text{ K.}$$

2. On recommence l'opération. **Calculer** T_2 puis T_n après n séries de transformations. **Effectuer** l'application numérique pour $n = 5$.

Dans l'état initial, la température est T_1 et la pression est P_0 .

Au cours de la compression isotherme, la température reste T_1 et la pression augmente jusqu'à P_1 .

Enfin, lors de la détente adiabatique, la température atteint la valeur T_2 et la pression revient à P_0 .

La loi $T^\gamma P^{1-\gamma}$ est applicable pour la détente adiabatique, soit

$$T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} = T_2^\gamma P_0^{1-\gamma}$$

donc

$$T_2 = T_1 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}.$$

En remplaçant T_1 par l'expression obtenue plus tôt

$$T_2 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1} \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{\frac{1}{\gamma}-1}$$

$$T_2 = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{2\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}.$$

On constate que l'on peut obtenir directement l'expression de T_n par récurrence, soit

$$T_n = T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}.$$

A.N.

$$T_5 = 273 \times 20^5 \left(\frac{1}{1,4} - 1 \right) = 4 \text{ K.}$$

3. **Calculer** la variation d'énergie interne au cours de la n ème double transformation en fonction de T_0 , P_0 et P_1 . **Calculer** le travail W et le transfert thermique Q reçus par le gaz. **Effectuer** les applications numériques pour une mole de gaz et pour $n = 5$.

Comme le système est un gaz parfait, entre la n ème et la $n-1$ ème double transformation, la variation d'énergie interne est donnée par la variation de température entre ces deux doubles transformations, soit

$$\Delta U = C_V \Delta T$$

$$\Delta U = C_V (T_n - T_{n-1})$$

$$\Delta U = C_V T_0 \left(\left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{(n-1)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \right)$$

$$\Delta U = C_V T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \right).$$

On peut exprimer C_V en fonction du coefficient de Laplace γ , soit

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

or comme le gaz est parfait la relation de Mayer donne

$$C_P - C_V = nR$$

ainsi

$$C_P = nR + C_V$$

donc il vient que

$$\gamma = \frac{nR + C_V}{C_V}$$

soit

$$C_V (\gamma - 1) = nR$$

donc

$$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}.$$

La variation d'énergie interne du système est donc

$$\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} T_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{n(\frac{1}{\gamma} - 1)} \left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{-\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)} \right).$$

On peut mener l'application numérique pour une mole de gaz et $n = 5$ le nombre de transformations (à ne pas confondre avec la quantité de matière).

A.N.

$$\Delta U = \frac{8,314}{1,4 - 1} \times 273 \times (20)^{5(\frac{1}{1,4} - 1)} \left(1 - (20)^{-\left(\frac{1}{1,4} - 1\right)} \right) = -1,1 \cdot 10^2 \text{ J}.$$

On peut décomposer la variation d'énergie interne au cours de la double transformation en deux variation d'énergie interne

$$\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$$

avec ΔU_1 la variation d'énergie interne au cours de la compression isotherme, et ΔU_2 la variation d'énergie interne au cours de la détente adiabatique.

Comme la première transformation est une transformation isotherme, pour un gaz parfait la variation d'énergie interne est nulle

$$\Delta U_1 = C_V (T_{n-1} - T_{n-1}) = 0$$

et

$$\Delta U = \Delta U_2.$$

Ainsi, comme

$$\Delta U_1 = Q_1 + W_1 = 0$$

il vient que l'échange thermique au cours de cette transformation est directement

$$Q_1 = -W_1.$$

On peut calculer le travail W_1 au cours de cette compression isotherme. Comme la transformation est mécaniquement réversible $P = P_{ext}$, il vient que

$$\delta W_1 = -P_{ext} dV = -P dV$$

or comme le gaz est parfait

$$P = \frac{nRT}{V}.$$

Comme la température est T_{n-1} constante au cours de la première transformation, il vient que

$$\delta W_1 = -nRT_{n-1} \frac{dV}{V}.$$

Au cours de la première transformation transformation, soit la compression isotherme, le système passe de T_{n-1} , P_0 , V_0 à T_{n-1} , P_1 , V_1 ainsi

$$W_1 = \int_{V_0}^{V_1} -nRT_{n-1} \frac{dV}{V} = -nRT_{n-1} \ln \left(\frac{V_1}{V_0} \right).$$

En utilisant la loi des gaz parfait

$$P_0V_0 = nRT_{n-1} \quad \text{et} \quad P_1V_1 = nRT_{n-1}$$

soit

$$\frac{V_1}{V_0} = \frac{P_0}{P_1}$$

ainsi

$$W_1 = nRT_{n-1} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$$

$$W_1 = nRT_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(n-1)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right).$$

La deuxième transformation est une détente adiabatique, donc le bilan d'énergie interne au cours de cette transformation s'écrit

$$\Delta U_2 = Q_2 + W_2 = W_2.$$

Or on a montré que

$$\Delta U = \Delta U_2$$

donc

$$W_2 = \Delta U = \frac{nR}{\gamma-1} T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}\right).$$

Ainsi le transfert thermique total Q reçu par le gaz est

$$Q = Q_1 + Q_2 = Q_1 = -W_1$$

$$Q = -nRT_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(n-1)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right).$$

A.N.

$$Q = -8,314 \times 273 (20)^{(5-1)\left(\frac{1}{1,4}-1\right)} \ln(20) = -94 \text{ J.}$$

Le travail total W reçu par le gaz est

$$W = W_1 + W_2$$

$$W = nRT_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(n-1)\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + \frac{nR}{\gamma-1} T_0 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{n\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)} \left(1 - \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{-\left(\frac{1}{\gamma}-1\right)}\right).$$

A.N.

$$W = 8,314 \times 273 (20)^{(5-1)\left(\frac{1}{1,4}-1\right)} \ln(20) + \frac{8,314}{1,4-1} \times 273 \times (20)^{5\left(\frac{1}{1,4}-1\right)} \left(1 - (20)^{-\left(\frac{1}{1,4}-1\right)}\right) = -12 \text{ J.}$$

Exercice I.10. Compression d'un gaz de Van der Waals ★ ★

On considère un gaz réel obéissant à l'équation de Van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT$$

avec a et b des constantes positives caractéristiques du gaz.

1. Calculer le travail reçu par une mole de gaz au cours d'une compression isotherme à T_0 faisant passer le gaz de V_{m1} à V_{m2} .

Pour une mole, comme la transformation est réversible

$$\delta W_m = -P_{ext}dV_m = -PdV_m.$$

Comme la transformation est réversible $T = T_0 = \text{cst}$, ainsi

$$W_m = - \int_{V_{m,1}}^{V_{m,2}} \left(\frac{RT_0}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2} \right) dV_m$$

donc

$$W_m = RT_0 \ln \left(\frac{V_{m,1} - b}{V_{m,2} - b} \right) - a \left(\frac{1}{V_{m,2}} - \frac{1}{V_{m,1}} \right).$$

2. Donner une expression approchée de ce travail aux faibles densités ($b \ll V_m$). On mettra en évidence dans le résultat le terme correctif par rapport au travail qui serait reçu par le gaz parfait correspondant et on pourra utiliser la relation approchée $\ln(1+x) \approx x$ pour $x \ll 1$.

Si on exprime le terme en \ln

$$\ln \left(\frac{V_{m,1} - b}{V_{m,2} - b} \right) = \ln \left(\frac{V_{m,1} \left(1 - \frac{b}{V_{m,1}}\right)}{V_{m,2} \left(1 - \frac{b}{V_{m,2}}\right)} \right) = \ln \left(\frac{V_{m,1}}{V_{m,2}} \right) + \ln \left(\frac{1 - \frac{b}{V_{m,1}}}{1 - \frac{b}{V_{m,2}}} \right).$$

Pour $b \ll V_m$ il vient que

$$\ln \left(\frac{V_{m,1} - b}{V_{m,2} - b} \right) \approx \ln \left(\frac{V_{m,1}}{V_{m,2}} \right) - \frac{b}{V_{m,1}} + \frac{b}{V_{m,2}} = \ln \left(\frac{V_{m,1}}{V_{m,2}} \right) + b \left(\frac{1}{V_{m,2}} - \frac{1}{V_{m,1}} \right).$$

Ainsi

$$W_m \approx RT_0 \ln \left(\frac{V_{m,1}}{V_{m,2}} \right) + (RT_0 b - a) \left(\frac{1}{V_{m,2}} - \frac{1}{V_{m,1}} \right).$$

On retrouve l'équation d'état du gaz parfait à partir de l'équation de Van der Waals pour $a = 0$ et $b = 0$. Ainsi pour le cas du gaz parfait le travail reçu par une mole de gaz est

$$W_m \approx RT_0 \ln \left(\frac{V_{m,1}}{V_{m,2}} \right).$$

Le terme correctif est donc

$$(RT_0 b - a) \left(\frac{1}{V_{m,2}} - \frac{1}{V_{m,1}} \right).$$

3. En déduire qu'il existe une température, appelée température de Mariotte, pour laquelle le gaz réel se comporte comme un gaz parfait.

On voit que le gaz réel se comporte comme un gaz parfait si le terme correctif s'annule, soit pour

$$(RT_{0,M}b - a) \left(\frac{1}{V_{m,2}} - \frac{1}{V_{m,1}} \right) = 0$$

soit pour

$$T_{0,M} = \frac{a}{Rb}.$$

4. Vérifier que pour cette température, l'isotherme correspondante dans le diagramme d'Amagat ($PV = f(P)$) admet une tangente horizontale.

L'équation de Van der Waals est telle que

$$\left(P + \frac{a}{V_m^2} \right) (V_m - b) = RT$$

soit

$$PV_m - Pb + \frac{a}{V_m} - \frac{ab}{V_m^2} = RT.$$

Toujours dans le cas où $b \ll V_m$ on peut négliger le terme $\frac{ab}{V_m^2}$ par rapport aux autres. Ainsi

$$PV_m \approx RT + Pb - \frac{a}{V_m}.$$

Comme on étudie une tangente horizontale sur le diagramme d'Amagat, on étudie un gaz pour lequel $PV \approx \text{cst}$ soit un gaz dont le comportement tend vers celui d'un gaz parfait, on peut ainsi faire l'approximation

$$PV_m \approx RT$$

donc

$$PV_m \approx RT + Pb - P \frac{a}{RT}.$$

On obtient la valeur de la tangente de l'isotherme en dérivant cette dernière équation par P à T constant, soit

$$\left(\frac{\partial PV_m}{\partial P} \right)_T = b - \frac{a}{RT}.$$

À $T = T_{0,M}$, il vient que

$$\left(\frac{\partial PV_m}{\partial P} \right)_T = b - \frac{a}{RT_{0,M}} = b - \frac{aRb}{Ra} = 0$$

la valeur de la tangente est nulle, elle est donc bien horizontale.

Exercice I.11. Étude d'un compresseur ★ ★

Le problème étudie le compresseur d'un moteur à air comprimé (celui d'un marteau-piqueur, par exemple). L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, de capacité thermique massique à pression constante $c_p = 1,00 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et de rapport des capacités thermiques à pression et à volume constants $\gamma = 1,4$. La constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$. L'air est aspiré dans les conditions atmosphériques, sous la pression $P_0 = 1 \text{ bar}$ et à la température $T_0 = 290 \text{ K}$, jusqu'au volume V_m , puis comprimé jusqu'à la pression P_1 , où il occupe le volume V_1 , et refoulé à la température T_1 dans un milieu où la pression est $P_1 = 6 \text{ bar}$. Bien que le mécanisme réel d'un compresseur soit différent, on

suppose que celui-ci fonctionne comme une pompe à piston, qui se compose d'un cylindre, d'un piston coulissant entraîné par un moteur et de deux soupapes.

- La soupape d'entrée Σ_1 est ouverte si la pression P dans le corps de pompe est inférieure ou égale à la pression atmosphérique P_0 .
- La soupape de sortie Σ_2 est ouverte si P est supérieure à P_1 .
- Le volume V du corps de pompe est compris entre 0 et V_m .
- À chaque cycle (chaque aller et retour du piston), la pompe aspire et refoule une mole d'air.

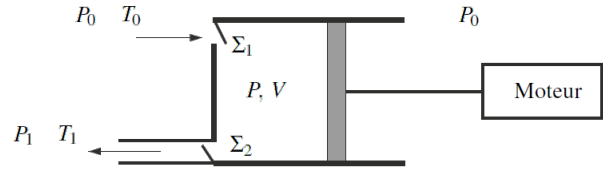


Figure 1.3 – Schéma de principe du compresseur.

1. Tracer sur un diagramme de Clapeyron l'allure de la courbe représentant un aller et un retour du piston. Indiquer le sens de parcours par une flèche.
2. Montrer que le travail de l'air situé à droite du piston est nul sur un aller-retour.
3. Montrer que le travail fourni par le moteur qui actionne le piston est égal à l'aire d'une surface sur le diagramme. On supposera que le mouvement est assez lent pour que l'évolution soit mécaniquement réversible.
4. Pendant la phase de compression, l'air suit une loi polytropique $PV^k = \text{cste}$; il sort du compresseur à la température $T_1 = 391\text{K}$. Trouver la valeur de k .
5. Exprimer le travail mécanique W moteur fourni par le moteur pendant un aller-retour en fonction de R , n , k , T_1 et T_0 .
6. Le débit massique de l'air dans le compresseur est $D_m = 0,013\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer la puissance $\mathcal{P}_{\text{moteur}}$ fournie par le moteur.

Exercice I.12. Température d'un conducteur ohmique ★ ★

Un conducteur ohmique de résistance $R = 1,00\text{k}\Omega$, assimilé à une phase condensée idéale de capacité thermique C , est placé dans l'air ambiant dont la température $T_0 = 293\text{K}$ est supposée constante. On modélise les transferts thermiques entre ces deux systèmes en supposant que le conducteur ohmique à la température T reçoit pendant un intervalle de temps dt un transfert thermique infinitésimal $\delta Q = a(T_0 - T)dt$ de la part de l'atmosphère. À partir de $t = 0$, le conducteur ohmique est parcouru par un courant d'intensité $I = 100\text{mA}$ constante.

1. Etablir l'équation différentielle vérifiée par la température T du conducteur ohmique pour $t \geq 0$. Quel est la durée caractéristique τ du phénomène décrit par cette équation ?
2. Au bout d'un temps suffisamment long, le conducteur ohmique atteint une température limite $T_1 = 313\text{K}$. En déduire la valeur du coefficient a .

Exercice I.13. Résistance en fonction des dimensions du conducteur ★ ★

La résistance (électrique, thermique...) d'une portion de matériau conducteur dépend de ses dimensions géométriques et d'une grandeur caractéristique du matériau, sa conductivité. On s'intéresse ici au cas du transfert thermique dans un conducteur de forme cylindrique, de longueur L , dont la section a une aire S , parcouru par le courant dans le sens de la longueur.

On cherche à déterminer comment la résistance thermique R de ce cylindre varie en fonction de L et S . La forme précise de la section n'a pas d'importance, seule son aire S importe : il ne s'agit donc pas forcément d'un cylindre au sens usuel (cylindre de révolution).

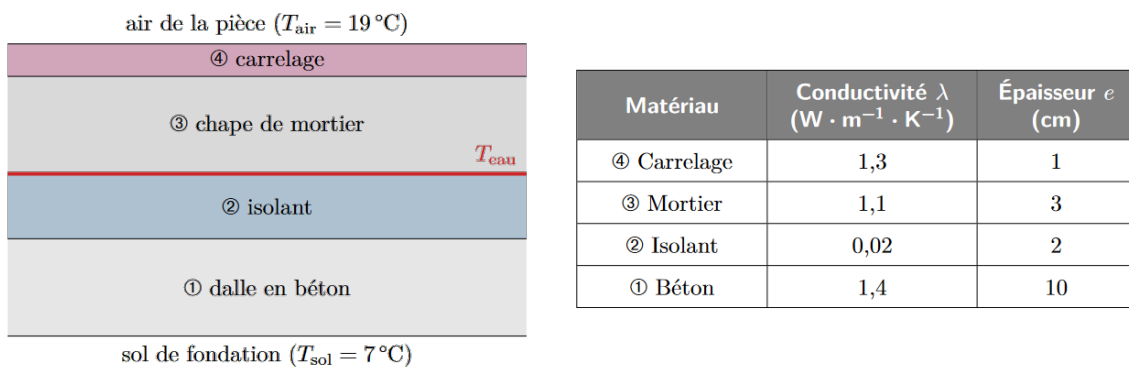
1. Pour étudier l'influence du paramètre L , découpons par la pensée ce cylindre en n cylindres identiques de longueur L/n de section S . Chacun a une résistance R' .

Par analogie avec les dipôles ohmiques, ces n conducteurs thermiques sont-ils en série ou en parallèle ? Écrire alors la relation entre n , R' et R , et en déduire si la résistance est proportionnelle ou inversement proportionnelle à la longueur.

2. Pour étudier de façon analogue l'influence du paramètre S , découpons maintenant par la pensée ce cylindre en n cylindres identiques de section S/n de longueur L . Chacun a une résistance R'' . Ces n conducteurs sont-ils en série ou en parallèle? Écrire alors la relation entre n , R'' et R , et en déduire si la résistance est proportionnelle ou inversement proportionnelle à l'aire de la section.
3. On note λ la conductivité thermique du matériau. Déterminer l'expression de R en fonction de λ , L et S .

Exercice I.14. Plancher chauffant ★ ★

Un plancher chauffant est un système de chauffage des bâtiments par le sol dans lequel l'énergie de chauffage est transmise au plancher via un réseau hydraulique circulant sous le plancher (des systèmes de chauffage électrique existent également). Dans les constructions modernes, bien isolées, la température de l'eau peut être relativement basse, entre 21°C et 24°C , ce qui rend le plancher chauffant particulièrement adapté aux chauffages écologiques de nouvelle génération comme la géothermie et le chauffage solaire. Cet exercice a pour but d'étudier l'installation schématisée ci-dessous, destinée à chauffer une salle de vie de 40 m^2 au sol. Pour simplifier, on suppose que le réseau hydraulique impose la température $T = T_{\text{eau}}$ à l'interface entre l'isolant et le mortier.



On donne le coefficient de transfert thermique de surface entre le carrelage et l'air $h = 10\text{ W} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$.

- Montrer que la loi de Newton se traduit par une résistance thermique d'interface R_i , dont on établira l'expression en fonction de h et S .
- Donner le schéma électrique équivalent de l'installation. En déduire la résistance thermique totale R entre la "couche" d'eau et l'air de la pièce. La calculer numériquement.
Dans une région au climat est assez doux, une pièce de 40 m^2 bien isolée nécessite en hiver une puissance de chauffe de l'ordre de 1 kW , alors qu'une maison mal isolée consomme quatre fois plus.
- En déduire la température T_{eau} à laquelle se trouve l'eau du circuit de chauffage pour chauffer la maison bien isolée.
- Les normes d'installation d'un plancher chauffant imposent que la température de surface du carrelage T_s n'excède pas 28°C , ce qui correspond à la température de la plante des pieds. Quelle puissance maximale l'installation peut-elle fournir à l'habitation? Commenter.
- Bien qu'une couche isolante soit placée sous les tuyaux de chauffage, une partie de l'énergie fournie par le plancher chauffant est perdue car cédée aux fondations. Calculer le rendement du plancher, c'est-à-dire le rapport entre la puissance Φ réellement fournie à l'habitation et la puissance totale fournie par l'eau chaude.
- Le choix du revêtement de sol est essentiel pour une bonne efficacité du plancher chauffant. En particulier, il est déconseillé d'utiliser un parquet en bois (conductivité de l'ordre de $0,2\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$). Proposer une explication.