DS 4 - Mécanique du point et thermodynamique

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en 4 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- La différentielle exacte d'une fonction f dépendant de deux variables x et y est

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y.$$

  Attention, ici $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ indique qu'il s'agit de la valeur de la dérivée partielle de f à y constant.

- Pour une grandeur $f(x_0)$ dépendante d'une autre grandeur x, on peut montrer qu'une petite variation δf sous l'effet d'une petite variation δx peut s'écrire telle que

$$\delta f = f(x_0+\delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{x_0+\delta x - x_0}\delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0} \delta x.$$

  Attention, ici $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0}$ indique qu'il s'agit de la valeur de la dérivée partielle de f pour $x = x_0$.

- Rayon terrestre : $R_T = 6{,}40 \times 10^3\,\mathrm{km}$.
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire du diazote : $M_{\mathrm{N_2}} = 28{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire du dioxygène : $M_{\mathrm{O_2}} = 32{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire de l'air : $M_{\mathrm{air}} = 28{,}8\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
- Coefficient de Laplace de l'air : $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1{,}40$.

1 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

1.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ (avec $g = 9,81$ m.s^{-2}), $\overrightarrow{u_x}$ étant un vecteur unitaire de l'axe Ox. On note, l'angle orienté : $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM})$. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

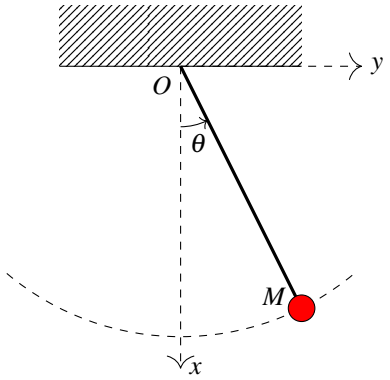


Figure 1: Schéma du pendule simple.

1. Montrer que le mouvement est plan.
2. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.
3. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g.

   En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.
4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ.
5. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

   En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\dot{\theta}^2$, θ, θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.
6. Donner l'expression de la période $T(\theta)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

   On ne demande pas de calculer cette intégrale.

   Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

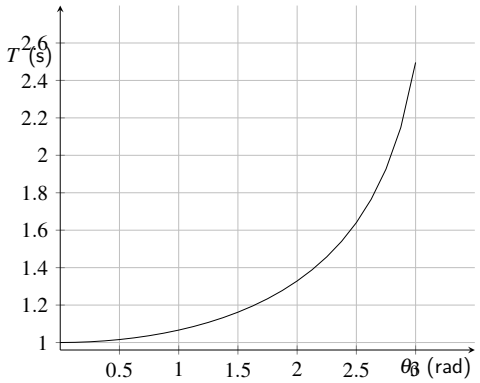


Figure 2: Variation de la période T d'un pendule en fonction de son angle initial θ_0.

7. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

1.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du point M et α, une constante positive.

8. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.

   En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

   Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

9. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

   Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

10. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right).$$

    Exprimer δ en fonction de T et τ.

11. La masse est $m = 470$ g. La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps.

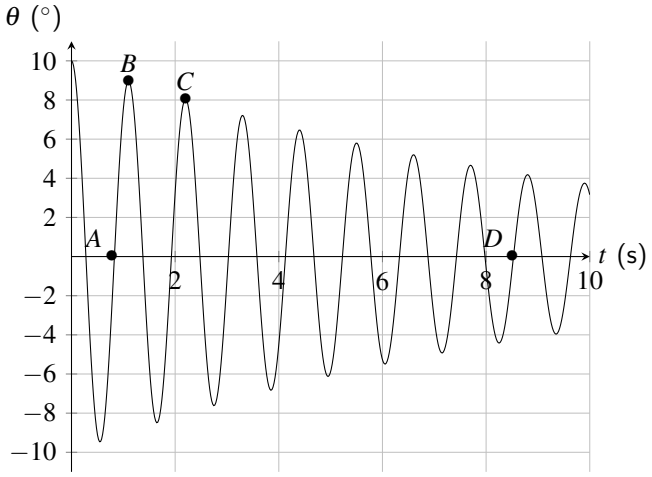


Figure 3: Variation de la coordonnée θ d'un pendule amorti en fonction du temps.

   On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

   Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique δ.

12. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période, T.

13. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps τ.

14. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante α.

2 Quelques aspects thermodynamiques de l'atmosphère

Adapté du concours Centrale-Supélec TSI (2011)

La densité de l'air atmosphérique décroît fortement avec l'altitude, ce qui fait que l'essentiel de la masse de l'atmosphère est concentrée dans la troposphère. Dans les questions suivantes, nous étudierons uniquement cette région qui s'étend jusqu'à une dizaine de kilomètres d'altitude. Le champ de pesanteur terrestre y est supposé uniforme : $\overrightarrow{g} = -g\overrightarrow{e_z}$ où le vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$ est orienté selon la verticale ascendante. L'altitude $z = 0$ correspond à la surface des mers et océans. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

2.1 Équilibre isotherme de l'atmosphère

15. Donner, en ordre de grandeur, les valeurs de la pression moyenne P_0 et de la température moyenne T_0 à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$.

16. On note μ la masse volumique de l'air. En considérant les deux principaux constituants de l'air, justifier la valeur de M_{air}.

17. En considérant l'air comme un gaz parfait, montrer que l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P = \mu R_{\text{air}} T$ où P et T sont la pression et la température absolue du gaz et R_{air} est une constante qui dépend du gaz. Calculer cette constante en unités SI.

18. On considère un volume d'air cubique V dont la face inférieure est situé à l'altitude z et la face supérieure est située à l'altitude $z + \mathrm{d}z$. Exprimer le volume V en fonction de S la surface du cube et $\mathrm{d}z$.

19. À partir de l'équilibre mécanique atteint par ce volume d'air, exprimer la différence entre les pression $P(z + \mathrm{d}z)$ et $P(z)$ en fonction de μ et g et $\mathrm{d}z$.

20. En déduire que le gradient vertical de pression vaut $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu g$.

21. Le modèle le plus simple d'atmosphère (atmosphère isotherme) consiste à supposer que la température est constante et égale à T_0. En exploitant le gradient vertical de pression et l'expression des gaz parfaits obtenue plus tôt, en déduire $P(z)$ (on manipulera les différentielle et on fera attention à intégrer entre les bornes d'intégration adéquates). Décrire alors comment varie la pression en fonction de l'altitude.

22. À partir d'une analyse dimensionnelle de l'argument de la fonction obtenue pour $P(z)$, définir une longueur caractéristique de variation de pression et la calculer pour la valeur de température moyenne donnée plus tôt.

23. Donner l'expression de $\mu(z)$. Décrire alors comment varie la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude.

2.2 Stabilité de l'atmosphère isotherme

On propose maintenant d'étudier la stabilité de l'atmosphère isotherme vis-à-vis des mouvements verticaux de l'air. On considère une parcelle d'air en équilibre mécanique et thermique à l'altitude z_0 (qui n'est pas l'altitude à la surface de la mer $z = 0$!). Cette parcelle d'air constitue un système fermé. Sa masse, son volume, sa pression, sa température et sa masse volumique sont notées respectivement m_1, V_1, P_1, T_1 et μ_1. On envisage un mouvement vertical de cette parcelle d'air qui la fait passer de l'altitude z_0 à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \ll z_0$. On fait l'hypothèse que la pression de la parcelle d'air reste égale à la pression environnante à toute altitude et que, vu la faible conductivité thermique de l'air, l'évolution considérée est adiabatique et réversible. Tous les développements limités possibles seront limités au premier ordre en $\varepsilon(t)(t)$.

24. En vous aidant de la relation de Mayer, exprimer, pour un gaz parfait, les capacités thermiques molaires à volume constant $C_{V,m}$ et à pression constante $C_{P,m}$, en fonction de leur rapport γ et de R.

25. En déduire l'expression de la capacité thermique massique de l'air c_P à pression constante en fonction de γ et R_{air}. Faire l'application numérique.

26. Traduire l'hypothèse d'équilibre thermique et mécanique de la parcelle d'air à l'altitude z_0, en considérant ses paramètres intensifs.

27. La variation de la pression en fonction de l'altitude dans le modèle choisi est $P(z) = P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}} T_0} z}$. Exprimer la petite variation de pression δP_1 de la parcelle d'air lors de son déplacement vertical, en fonction de $P(z_0)$ la pression à l'altitude z_0, , g, R_{air}, T_0 et et la petite variation d'altitude $\varepsilon(t)$.

28. À partir d'une expression des gaz parfaits, exprimer cette petite variation δP_1 en fonction de $\mu(z_0)$, g et $\varepsilon(t)$.

29. La variation de la masse volumique en fonction de l'altitude dans le modèle choisi est $\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}} T_0} z}$. Exprimer la petite variation de pression $\delta\mu$ de la parcelle d'air lors de son déplacement vertical, en fonction de $\mu(z_0)$, g, R_{air}, T_0 et la petite variation d'altitude $\varepsilon(t)$.

30. Une transformation adiabatique réversible respecte la loi de Laplace qui implique que $PV^\gamma = \text{cst}$. Montrer que la différentielle exacte de PV^γ est telle que
$$0 = \gamma P V^{\gamma-1} \mathrm{d}V + V^\gamma \mathrm{d}P.$$

31. Utiliser la relation précédente pour exprimer la petite variation de volume $\mathrm{d}V = \delta V_1$ subie par la masse d'air en fonction de δP_1, $V_1(z_0)$, $P(z_0)$ et γ.

32. Utiliser une relation obtenue plus tôt pour montrer que
$$\delta V_1 = \frac{g V_1(z_0)\varepsilon(t)}{R_{\text{air}} T_0 \gamma}.$$

33. La résultante des forces de pression qui s'exerce sur la parcelle d'air correspond à la force nommée poussée d'Archimède. Donner l'expression de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la parcelle d'air à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$ en fonction de $\mu(z_0)$, $V_1(z_0)$, g, $\varepsilon(t)$, R_{air}, T_0 et γ. On négligera les termes d'ordre supérieur à 1 en ε.

34. Donner l'expression de la résultante des forces sur la parcelle d'air à l'altitude en $z_0 + \varepsilon(t)$ (on tiendra compte du fait que la masse de la parcelle d'air n'a pas changé entre z_0 et $z_0 + \varepsilon(t)$).

35. Écrire l'équation du mouvement vertical de la parcelle d'air et montrer que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :
$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} + N^2 \varepsilon(t) = 0$$
où l'on exprimera N en fonction de g, c_P et T_0.

36. Quelle est la dimension de N ? Calculer la valeur numérique de $2\pi/N$.

37. L'atmosphère isotherme peut-elle être considérée comme stable ? Le modèle de l'atmosphère isotherme vous semble-t-il réaliste ?

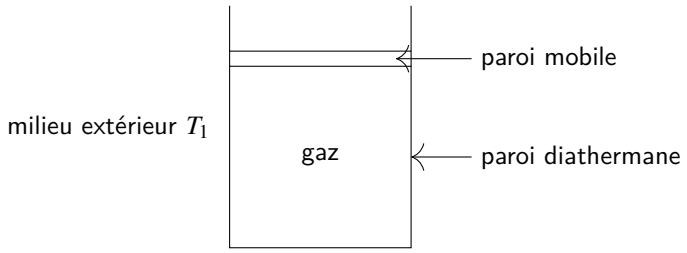
3 Etudes de transformations d'un gaz parfait

Concours communs polytechnique TSI (2006)

3.1 Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement.

La température T_1 du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat. A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_1, un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée.



On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume V_1' offert au gaz soit $V_1' = 2V_1$, et on la bloque à nouveau.

38. Déterminer la pression P_1' du gaz dans l'état final en fonction de P_1.

39. Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n, R et T_1.

40. Calculer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n, R et T_1.

4 L'exploration martienne

Concours communs CCINP TSI (2023)

4.1 Perseverance - l'atterrissage

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. Le site d'atterrissage, le cratère Jezero, est une zone présentant une grande diversité géologique et ayant abrité un lac il y a environ 3,6 milliards d'années. Un des enjeux de cette mission est le prélèvement d'échantillons destinés à être analysés sur Terre afin de déceler d'éventuelles traces d'une vie passée.

La sonde spatiale Mars 2020, de masse m, pénètre dans l'atmosphère martienne à la vitesse de $12\,000\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ (vitesse mesurée par rapport au sol), elle larguera le rover 7 minutes plus tard.

Après une première phase de freinage grâce au bouclier thermique, le parachute est déployé à l'altitude d'environ $10{,}6\,\mathrm{km}$ et à la vitesse, notée v_A, de $420\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

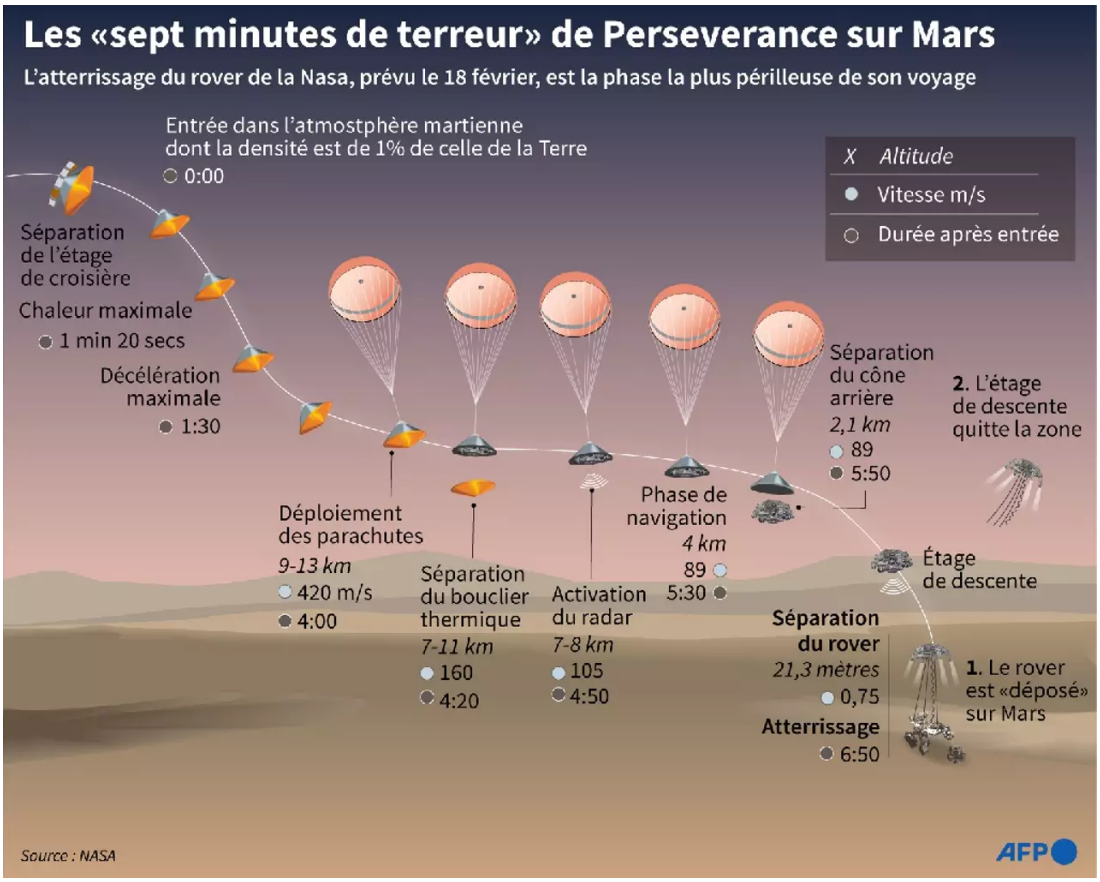


Figure 4: Atterrissage de Perseverance

41. Le point A étant l'endroit où le parachute est déployé, donner l'expression littérale de l'énergie cinétique $E_c(A)$ de l'ensemble en se limitant à un simple mouvement de translation.

    Au bout de 20 secondes, la vitesse n'est plus que de $160\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et l'altitude de $7{,}5\,\mathrm{km}$, Mars 2020 largue alors son bouclier thermique.

42. En appelant B le point de largage et en considérant toujours la même masse, exprimer la variation d'énergie cinétique entre les points A et B.

43. Connaissant la masse de la sonde spatiale de $3000\,\mathrm{kg}$, effectuer le calcul de cette variation d'énergie cinétique.

44. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

45. En supposant l'accélération de la pesanteur martienne uniforme et de valeur $g =_S I3.7m \cdot s^{-2}$, calculer la valeur du travail du poids entre les points A et B, noté $W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right)$.

46. Ce travail est-il qualifié de moteur ou de résistant ? Justifier.

47. Montrer, à partir des questions 44 et 45, que le travail des forces de frottement noté $W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right)$ sur le parachute, dont la résultante sera notée $\overrightarrow{f}$, est d'environ $-2{,}6 \times 10^8\,\mathrm{J}$.

48. Dans la suite du sujet, nous nous limiterons à une étude du mouvement en translation verticale. En supposant cette force de frottement $\overrightarrow{f}$ constante, déduire un ordre de grandeur de sa valeur minimale à partir de la question précédente.

    En réalité, la résultante des forces de frottement n'est pas constante et dépend de la vitesse du système. Nous considérerons une force de type frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h est le coefficient de frottement fluide et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse.

49. Soit l'axe (Oz), vertical et orienté vers le bas, dont l'origine O se situe au point d'ouverture du parachute. Faites un schéma sur lequel figurent la sonde spatiale matérialisée par son centre de gravité G à une altitude quelconque après ouverture du parachute, l'axe (Oz) et les deux forces s'exerçant sur la sonde.

50. La descente de la sonde peut-elle être qualifiée de chute libre ? Justifier.

51. À partir de vos connaissance en dynamique du point, établir l'équation différentielle vérifiée par la projection de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la sonde sur l'axe vertical et la mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = B$$

    où A et B représentent deux constantes dont on précisera les expressions.

52. Sans résoudre l'équation, déduire de la question précédente l'expression de la vitesse limite théorique pouvant être atteinte par la sonde avec cette hypothèse, au bout d'un temps infiniment long.

    Pour pouvoir réussir cette phase périlleuse, l'étage de descente (le *skycrane*) dispose d'un radar Doppler comportant six antennes dévoilées dès que le bouclier thermique est largué. Le radar peut alors déterminer avec précision la vitesse et l'altitude de la sonde.

    La bande Ka (*Kurz Above*) du spectre électromagnétique est très utilisée dans le domaine des télécommunications spatiales ; on considère une fréquence moyenne de $30\,\mathrm{GHz}$.

53. Calculer la longueur d'onde dans le vide, notée λ_0, associée à cette fréquence.

    Lorsque la sonde se trouve à une altitude H, celle-ci peut être déterminée avec précision grâce à la durée mise par l'onde pour effectuer un aller-retour entre l'antenne d'émission et le sol.

54. Exprimer l'altitude H de la sonde en fonction de la durée mise par l'onde pour effectuer cet aller-retour.

55. À partir de l'infographie présentée Figure 4, estimer le temps Δt écoulé entre l'émission de l'onde par le radar de la sonde et sa réception après réflexion sur le sol martien, au moment l'activation du radar.

FIN DU SUJET