DS 4 - Mécanique du point et thermodynamique

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en 4 parties **indépendantes**.
- Une calculatrice **non programmable** ou une calculatrice **programmable en mode examen** est autorisée.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

- La différentielle exacte d'une fonction f dépendant de deux variables x et y est

$$\mathrm{d}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y.$$

  Attention, ici $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_y$ indique qu'il s'agit de la valeur de la dérivée partielle de f à y constant.

- Pour une grandeur $f(x_0)$ dépendante d'une autre grandeur x, on peut montrer qu'une petite variation δf sous l'effet d'une petite variation δx peut s'écrire telle que

$$\delta f = f(x_0+\delta x) - f(x_0) = \frac{f(x_0+\delta x)-f(x_0)}{x_0+\delta x - x_0}\delta x = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0} \delta x.$$

  Attention, ici $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x=x_0}$ indique qu'il s'agit de la valeur de la dérivée partielle de f pour $x = x_0$.

- Rayon terrestre : $R_T = 6{,}40 \times 10^3\,\mathrm{km}$.
- Accélération de la pesanteur : $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.
- Constante des gaz parfaits : $R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire du diazote : $M_{\mathrm{N_2}} = 28{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire du dioxygène : $M_{\mathrm{O_2}} = 32{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
- Masse molaire de l'air : $M_{\mathrm{air}} = 28{,}8\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.
- Coefficient de Laplace de l'air : $\gamma = \frac{c_P}{c_V} = 1{,}40$.

1 Le pendule simple

Adapté du concours ENSTIM - MPSI, PCSI et PTSI (1996)

1.1 Un pendule simple non amorti

On considère un point matériel M de masse m accroché à un point fixe O par l'intermédiaire d'un fil inextensible de longueur l et de masse nulle. L'ensemble est situé dans le champ de pesanteur terrestre $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u_x}$ (avec $g = 9{,}81$ m.s^{-2}), $\overrightarrow{u_x}$ étant un vecteur unitaire de l'axe Ox. On note, l'angle orienté : $\theta = (\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{OM})$. On néglige les frottements. On lâche la masse d'un angle θ_0 sans vitesse initiale.

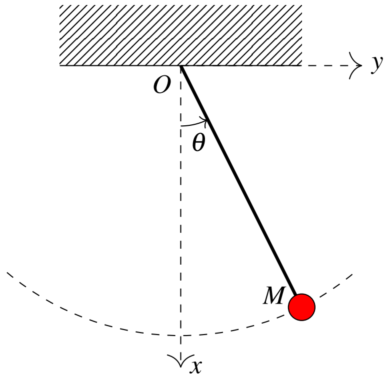


Figure 1: Schéma du pendule simple.

1. Montrer que le mouvement est plan.

   La projection du principe fondamentale de la dynamique est nulle selon l'axe (Oz). Comme la vitesse initiale est nulle, la vitesse du système selon l'axe (Oz) est nulle à tout instant, **le mouvement s'effectue uniquement dans le plan (Oxy).**

2. Établir l'équation différentielle du second ordre, vérifiée par θ.

   Deux solutions : utiliser le PFD ou le théorème de la puissance cinétique. Prenons la deuxième.

   Le système étudié est le pendule dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces appliquées sur le système sont son poids $\overrightarrow{P}$ et la tension du fil $\overrightarrow{T}$.

   La vitesse du pendule dans le repère polaire est

$$\overrightarrow{v} = l\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}.$$

   Comme la tension du fil est selon u_ρ, donc orthogonale à u_θ, sa puissance s'annule

$$\mathscr{P}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{T} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$$

   Ainsi le théorème de la puissance cinétique donne

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{P}) = m\overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{v} = -mg\sin\theta l\dot{\theta}.$$

   L'énergie cinétique est

$$\mathscr{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2$$

   donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta}$$

   ainsi

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta l\dot{\theta}.$$

   Comme on recherche des solutions pour lesquelles $\dot{\theta} \neq 0$, on peut diviser la dernière équation par $\dot{\theta}$, donc

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta.$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0.}$$

3. En supposant que les élongations angulaires sont faibles, montrer que l'équation du mouvement est approchée par celle d'un oscillateur harmonique de pulsation ω_0 dont on donnera l'expression en fonction de l et g.

   En déduire $\theta(t)$. On rappelle que pour les faibles élongations angulaires, $\sin(\theta) \approx \theta$.

   Pour des élongations angulaires faibles, on peut utiliser le développement limité de la fonction sinus à l'ordre 1 en 0, soit
$$\sin\theta \approx \theta$$
   donc
$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0.$$
   On reconnaît l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. La solution générale de cette équation est
$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
   avec A et B des constantes à déterminer à partir des conditions initiales. Ici $\theta(t=0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(t=0) = 0$. Donc il vient que
$$\theta(t=0) = A = \theta_0$$
   soit
$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t).$$
   La vitesse angulaire est donc
$$\dot{\theta}(t) = -\omega_0\theta_0\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t).$$
   A $t=0$, il vient que
$$\dot{\theta}(t) = \omega_0 B = 0$$
   donc $B=0$, et ainsi
$$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t).}$$

4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur en fonction de x puis de θ.

   Comme l'axe (Ox) est dirigé vers le bas, l'énergie potentielle de pesanteur est
$$\mathscr{E}_p = -mgx + \text{cst}$$
   soit
$$\mathscr{E}_p = -mgl\cos\theta + \text{cst}.$$
   On peut prendre comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur, le point le plus bas du mouvement soit pour $\theta = 0$, ainsi
$$0 = -mgl + \text{cst} \qquad \text{donc} \qquad \text{cst} = mgl$$
   donc
$$\boxed{\mathscr{E}_p = mgl(1-\cos\theta).}$$

5. Montrer que l'énergie mécanique se conserve au cours du mouvement.

   En déduire l'équation différentielle du premier ordre reliant $\dot{\theta}^2$, θ, θ_0 et les paramètres caractéristiques du système. On garde les mêmes conditions initiales.

   D'après le théorème de l'énergie mécanique, la variation d'énergie mécanique est égale à la somme des travaux des forces non conservatives. Comme la tension du fil ne travaille pas car orthogonale au mouvement, la seule force travaillant est le poids qui est une force conservative. Ainsi, le travail des forces non conservatives est nulle donc l'énergie mécanique ne varie : **elle se conserve au cours du mouvement**.

   Comme l'énergie mécanique est telle que
$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_c + \mathscr{E}_p$$

à $t=0$ il vient que

$$\mathscr{E}_m(t=0)=\mathscr{E}_p(t=0)=mgl\,(1-\cos\theta_0)$$

car à $t=0$ la vitesse nulle d'après l'énoncé.
A un autre instant t quelconque

$$\mathscr{E}_m(t)=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\,(1-\cos\theta)\,.$$

Comme l'énergie mécanique ne varie pas au cours du mouvement, il vient que

$$\mathscr{E}_m(t=0)=\mathscr{E}_m(t)$$

soit

$$mgl\,(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2+mgl\,(1-\cos\theta)$$

$$g\,(\cos\theta-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}l\dot{\theta}^2+$$

donc

$$\dot{\theta}=\sqrt{2\frac{g}{l}\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}$$

$$\boxed{\dot{\theta}=\pm\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}}$$

avec choix du signe dépendant du sens du mouvement.

6. Donner l'expression de la période $T(\theta)$ sous forme d'une intégrale en fonction θ, θ_0 et des paramètres caractéristiques du système. On précisera soigneusement les bornes d'intégration.

On remarque que le passage de la position $\theta=0$ à la position $\theta=\theta_0$ se fait durant une durée $\frac{T}{4}$. On peut donc intégrer la différentielle de temps dt entre ces deux positions pour obtenir la valeur de $\frac{T}{4}$.
Pour obtenir l'expression de la différentielle de temps dt, on utilise l'équation obtenue précédemment, soit

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\pm\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}.$$

Afin de choisir le bon signe, il faut remarquer que lors du passage de la position $\theta=0$ à la position $\theta=\theta_0$, d'après l'orientation de θ donné par le schéma, la vitesse diminue mais reste positive, il faut donc choisir la racine positive (si on avait étudié le mouvement entre θ_0 et 0, la vitesse aurait été négative).
Il vient que

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.$$

donc

$$\frac{T}{4}=\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta$$

et finalement

$$\boxed{T=4\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta.}$$

N.B. On aurait pu intégrer la différentiel de temps entre θ_0 et $-\theta_0$, puis entre $-\theta_0$ et θ_0 pour obtenir T directement, mais il aurait fallu distinguer les trajets avec vitesse positive et négative, et utiliser la symétrie du mouvement

$$T=\int_{\theta_0}^{-\theta_0}-\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta+\int_{-\theta_0}^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2\,(\cos\theta-\cos\theta_0)}}\mathrm{d}\theta$$

$$T = \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \mathrm{d}\theta + \int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \mathrm{d}\theta = 2\int_{-\theta_0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \mathrm{d}\theta.$$

Or comme la fonction est paire, il vient que

$$T = 4\int_{0}^{\theta_0} \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2(\cos\theta - \cos\theta_0)}} \mathrm{d}\theta.$$

On ne demande pas de calculer cette intégrale.

Une intégration numérique donne la courbe ci-dessous. Commenter la courbe obtenue.

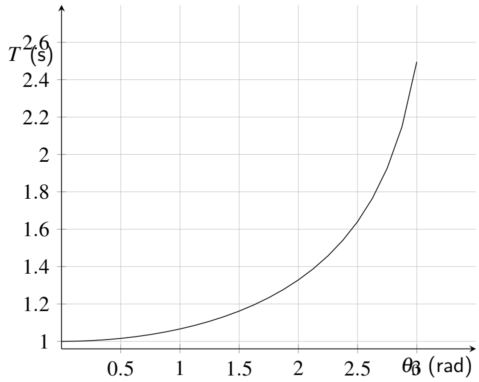


Figure 2: Variation de la période T d'un pendule en fonction de son angle initial θ_0.

On constate que pour les faibles valeurs d'angle initial $\theta_0 \ll 1$ **on a bien un mouvement isochrone** : la période ne dépend pas de θ_0.

7. Proposer une méthode pour déterminer expérimentalement les valeurs de T.

   Pour différentes valeurs de θ_0. particulières, on mesure la durée entre deux passages successifs par la verticale,dans le même sens. soit $\theta = 0$, dans le même sens. On obtient la période T pour les différentes valeurs de θ_0.

1.2 Oscillateur amorti

Lorsque l'on enregistre expérimentalement $\theta(t)$, on constate que l'amplitude de θ diminue lentement. On interprète ce résultat par la présence de frottements que l'on modélise par : $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v}$, avec $\overrightarrow{v}$ la vitesse du point M et α, une constante positive.

8. Établir l'équation différentielle du second ordre vérifiée par θ.

   En se limitant aux petits angles, écrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{\tau}\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0.$$

   Donner l'expression de τ et son interprétation physique.

   On peut utiliser le théorème de la puissance cinétique utilisé plus tôt, en ajoutant la puissance des forces de frottements, soit

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}(\overrightarrow{P}) + \mathscr{P}(\overrightarrow{f})$$

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta l\dot{\theta} - \alpha v^2$$

$$ml^2\ddot{\theta}\dot{\theta} = -mg\sin\theta l\dot{\theta} - \alpha l^2\dot{\theta}^2.$$

Il vient donc que

$$\ddot{\theta}\dot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}^2+\frac{g}{l}\sin\theta\dot{\theta}=0.$$

En se limitant aux petits angles

$$\ddot{\theta}\dot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}^2+\frac{g}{l}\theta\dot{\theta}=0.$$

En divisant par $\dot{\theta}\neq 0$

$$\ddot{\theta}+\frac{\alpha}{m}\dot{\theta}+\frac{g}{l}\theta=0.$$

On peut alors identifier les différents termes de cette équation avec les termes de l'énoncé.

On retrouver la pulsation propre du système

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}$$

et **le temps caractéristique τ d'évolution du système** tel que

$$\frac{2}{\tau}=\frac{\alpha}{m}$$

donc

$$\boxed{\tau=\frac{2m}{\alpha}.}$$

9. A quelle condition obtient-on un régime pseudo-périodique ?

   Le régime est pseudopériodique si le facteur de qualité Q est supérieur à $1/2$.

   Le facteur de qualité est lié à la constante de temps du système de telle manière que

   $$\frac{1}{Q\omega_0}=\frac{2}{\tau\omega_0^2}$$

   soit

   $$Q=\frac{\omega_0\tau}{2}$$

   donc il faut que

   $$\frac{\omega_0\tau}{2}>\frac{1}{2}$$

   donc

   $$\boxed{\omega_0>\frac{1}{\tau}.}$$

   Dans le cadre d'un régime pseudo-périodique, calculer la pseudo-pulsation ω et la pseudo-période T.

   La pseudo-pulsation, par définition, est

   $$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

   soit

   $$\boxed{\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}=\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}.}$$

   Et la pseudo-période est

   $$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}}.}$$

10. On appelle décrément logarithmique la quantité

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right).$$

Exprimer δ en fonction de T et τ.

L'expression générale de θ en régime pseudo-périodique est

$$\theta(t) = \theta_0 e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0 t)\right)$$

il vient donc que

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0 t)\right)}{e^{-(t+T)/\tau}\left(\cos(\omega_0(t+T)) + \frac{1}{\omega\tau}\sin(\omega_0(t+T))\right)}.$$

Le régime étant pseudo-périodique $\cos(\omega_0 t) = \cos(\omega_0(t+T))$ et $\sin(\omega_0 t) = \sin(\omega_0(t+T))$ donc

$$\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)} = \frac{e^{-t/\tau}}{e^{-(t+T)/\tau}} = e^{-t/\tau+t/\tau+T/\tau} = e^{T/\tau}.$$

Ainsi le décrément logarithmique est simplement le rapport entre la pseudo-période et le temps caractéristique d'évolution du système

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}\right) = \ln\left(e^{T/\tau}\right) = \frac{T}{\tau}.}$$

11. La masse est $m = 470$ g. La figure ci-après représente les variations de θ avec le temps.

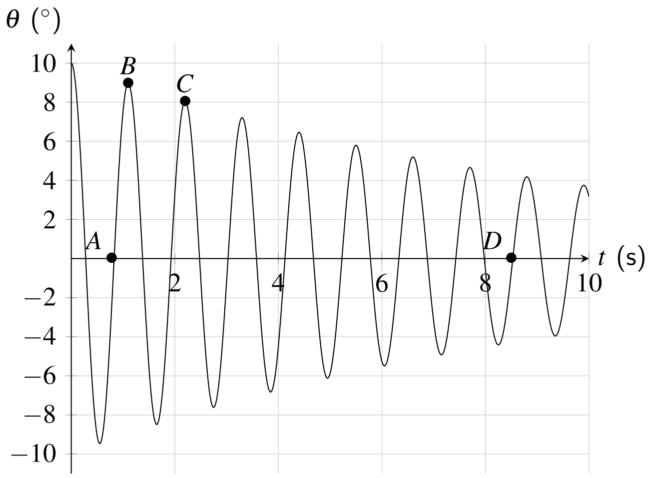


Figure 3: Variation de la coordonnée θ d'un pendule amorti en fonction du temps.

On précise les coordonnées de 4 points particuliers:

Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
θ (°)	0	8,95	8,02	0

Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le décrément logarithmique δ.

En étudiant les deux maxima successifs B et C on le décrément logarithmique. Comme ils sont séparés d'une période, le rapport de leur valeur de θ est

$$\frac{\theta(B)}{\theta(C)} = \frac{\theta(t)}{\theta(t+T)}$$

donc il vient que

$$\delta = \ln\left(\frac{\theta(B)}{\theta(C)}\right).$$

A.N.

$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{8,95}{8,02}\right) = 0,110.}$$

12. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la pseudo-période, T.

    On peut mesurer la durée séparant les points B et C afin d'obtenir la pseudo-période T.

    A.N.

    $$\boxed{T = 2,2 - 1,1 = 1,1 \text{ s.}}$$

13. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales le temps τ.

    On obtient le temps τ à partir des deux dernières questions. En effet, on a montré que

    $$\delta = \frac{T}{\tau}$$

    donc

    $$\tau = \frac{T}{\delta}.$$

    A.N.

    $$\boxed{\tau = \frac{1,1}{0,110} = 10 \text{ s.}}$$

14. Calculer numériquement à partir des valeurs expérimentales la constante α.

    On a montré que le temps τ était défini tel que

    $$\tau = \frac{2m}{\alpha}$$

    donc

    $$\alpha = \frac{2m}{\tau}.$$

    A.N.

    $$\boxed{\alpha = \frac{2 \times 0,470 \text{ kg}}{10 \text{ s}} = 9,4.10^{-2} \text{ kg.s}^{-1}.}$$

2 Quelques aspects thermodynamiques de l'atmosphère

Adapté du concours Centrale-Supélec TSI (2011)

La densité de l'air atmosphérique décroît fortement avec l'altitude, ce qui fait que l'essentiel de la masse de l'atmosphère est concentrée dans la troposphère. Dans les questions suivantes, nous étudierons uniquement cette région qui s'étend jusqu'à une dizaine de kilomètres d'altitude. Le champ de pesanteur terrestre y est supposé uniforme : $\vec{g} = -g\vec{e_z}$ où le vecteur unitaire $\vec{e_z}$ est orienté selon la verticale ascendante. L'altitude $z = 0$ correspond à la surface des mers et océans. L'étude est menée dans le référentiel terrestre, supposé galiléen.

2.1 Équilibre isotherme de l'atmosphère

15. Donner, en ordre de grandeur, les valeurs de la pression moyenne P_0 et de la température moyenne T_0 à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$.

    La pression moyenne à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$ est $P_0 = 1\,\mathrm{atm} = 1{,}1\,\mathrm{bar} = 1\times 10^5\,\mathrm{pa}$.

    La température moyenne à la surface de la Terre pour une altitude $z = 0$ est $T_0 = 15\,°\mathrm{C} = 288\,\mathrm{K} \approx 300\,\mathrm{K}$.

16. On note μ la masse volumique de l'air. En considérant les deux principaux constituants de l'air, justifier la valeur de M_{air}.

    L'atmosphère est composé en ordre de grandeur à 80% de diazote et à 20% de dioxygène, ainsi la masse molaire moyenne de l'air est telle que

$$M_{\text{air}} \approx \frac{80\times M_{N_2} + 20\times M_{O_2}}{100}$$
$$M_{\text{air}} \approx \frac{80\times 28{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}} + 20\times 32{,}0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}}{100}$$
$$M_{\text{air}} \approx 28{,}8\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$$

    soit exactement la valeur fournie $M_{\text{air}} = 28{,}8\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

17. En considérant l'air comme un gaz parfait, montrer que l'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P = \mu R_{\text{air}} T$ où P et T sont la pression et la température absolue du gaz et R_{air} est une constante qui dépend du gaz. Calculer cette constante en unités SI.

    En utilisant l'expression des gaz parfaits

$$PV = nRT$$
$$P = \frac{nRT}{V}$$
$$P = \frac{nRT}{V}\times\frac{m}{m}$$
$$P = \frac{n}{m}\times\frac{m}{V}\times RT$$
$$P = \frac{1}{M_{\text{air}}}\times\mu\times RT$$
$$P = \mu\times\frac{R}{M_{\text{air}}}\times T$$

$$\boxed{P = \mu R_{\text{air}} T}$$

    avec m la masse du volume d'air V étudié et $R_{\text{air}} = \frac{R}{M_{\text{air}}}$ la constante à trouver s'exprimant en $\frac{\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}}{\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}} = \mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}$.

    A.N.

$$\boxed{R_{\text{air}} = \frac{R}{M_{\text{air}}} = \frac{8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}}}{28{,}8\times 10^{-3}\,\mathrm{kg\cdot mol^{-1}}} = 289\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}.}$$

18. On considère un volume d'air cubique V dont la face inférieure est situé à l'altitude z et la face supérieure est située à l'altitude $z + \mathrm{d}z$. Exprimer le volume V en fonction de S la surface du cube et $\mathrm{d}z$.

    D'après l'énoncé $V = S\mathrm{d}z$.

19. À partir de l'équilibre mécanique atteint par ce volume d'air, exprimer la différence entre les pression $P(z+\mathrm{d}z)$ et $P(z)$ en fonction de μ et g et $\mathrm{d}z$.

À l'équilibre mécanique le volume d'air est immobile, ainsi

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i \\
\vec{0} &= \vec{P} + \vec{F_P}(z) + \vec{F_P}(z+\mathrm{d}z) \\
0 &= -mg + P(z)S - P(z+\mathrm{d}z)S \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\frac{mg}{S} \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\frac{mg\mathrm{d}z}{S\mathrm{d}z} \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\frac{mg\mathrm{d}z}{V} \\
P(z+\mathrm{d}z) - P(z) &= -\mu g\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

20. En déduire que le gradient vertical de pression vaut $\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu g$.

    À partir de l'expression précédente il vient que

$$\frac{P(z+\mathrm{d}z) - P(z)}{\mathrm{d}z} = -\mu g$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} = -\mu g.}$$

21. Le modèle le plus simple d'atmosphère (atmosphère isotherme) consiste à supposer que la température est constante et égale à T_0. En exploitant le gradient vertical de pression et l'expression des gaz parfaits obtenue plus tôt, en déduire $P(z)$ (on manipulera les différentielle et on fera attention à intégrer entre les bornes d'intégration adéquates). Décrire alors comment varie la pression en fonction de l'altitude.

    En utilisant l'expression du gaz parfait obtenu plus haut, il vient que

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= -\mu g \\
\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}z} &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}P \\
\frac{\mathrm{d}P}{P} &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\mathrm{d}z \\
\ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z
\end{aligned}$$

$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}.}$$

La pression décroît exponentiellement avec l'altitude.

22. À partir d'une analyse dimensionnelle de l'argument de la fonction obtenue pour $P(z)$, définir une longueur caractéristique de variation de pression et la calculer pour la valeur de température moyenne donnée plus tôt.

Une analyse dimensionnelle de l'argument de l'exponentielle qui doit être sans dimension donne

$$\begin{aligned}
\left[\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z\right] &= 1\\
[z] &= \left[\frac{R_{\text{air}}T_0}{g}\right]\\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}\times K}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}\\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{J\cdot kg^{-1}}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}\\
\mathrm{m} &= \frac{\mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-2}\cdot kg^{-1}}}{\mathrm{m\cdot s^{-2}}}\\
\mathrm{m} &= \mathrm{m}.
\end{aligned}$$

On voit que le terme $\frac{R_{\text{air}}T_0}{g}$ est bien homogène à une longueur, il s'agit de la longueur caractéristique.

A.N.

$$\boxed{\frac{R_{\text{air}}T_0}{g} = \frac{289\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}\times 300\,\mathrm{K}}{9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}} = 8{,}84\,\mathrm{km}.}$$

23. Donner l'expression de $\mu(z)$. Décrire alors comment varie la masse volumique de l'air en fonction de l'altitude.

En utilisant l'expression du gaz parfait obtenu plus haut, il vient que

$$\begin{aligned}
P(z) &= \mu(z)R_{\text{air}}T_0\\
\mu(z) &= \frac{P(z)}{R_{\text{air}}T_0}\\
\mu(z) &= \frac{P_0}{R_{\text{air}}T_0}e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}}$$

avec μ_0 la masse volumique de l'air au niveau de la mer.

La masse volumique décroît exponentiellement avec l'altitude.

2.2 Stabilité de l'atmosphère isotherme

On propose maintenant d'étudier la stabilité de l'atmosphère isotherme vis-à-vis des mouvements verticaux de l'air. On considère une parcelle d'air en équilibre mécanique et thermique à l'altitude z_0 (qui n'est pas l'altitude à la surface de la mer $z = 0$!). Cette parcelle d'air constitue un système fermé. Sa masse, son volume, sa pression, sa température et sa masse volumique sont notées respectivement m_1, V_1, P_1, T_1 et μ_1. On envisage un mouvement vertical de cette parcelle d'air qui la fait passer de l'altitude z_0 à l'altitude $z_0 + \varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \ll z_0$. On fait l'hypothèse que la pression de la parcelle d'air reste égale à la pression environnante à toute altitude et que, vu la faible conductivité thermique de l'air, l'évolution considérée est adiabatique et réversible. Tous les développements limités possibles seront limités au premier ordre en $\varepsilon(t)(t)$.

24. En vous aidant de la relation de Mayer, exprimer, pour un gaz parfait, les capacités thermiques molaires à volume constant $C_{V,m}$ et à pression constante $C_{P,m}$, en fonction de leur rapport γ et de R.

La relation de Mayer donne

$$C_P - C_V = nR$$

soit pour les capacités thermiques molaires

$$\frac{C_P - C_V}{n} = R$$
$$C_{P,m} - C_{V,m} = R.$$

Ainsi

$$\frac{C_{P,m} - C_{V,m}}{C_{V,m}} = \frac{R}{C_{V,m}}$$
$$\frac{C_{P,m}}{C_{V,m}} - 1 = \frac{R}{C_{V,m}}$$
$$\gamma - 1 = \frac{R}{C_{V,m}}$$

$$\boxed{C_{V,m} = \frac{R}{\gamma - 1}.}$$

Pour obtenir la capacité thermique à pression constante molaire, on utilise de nouveau la relation de Mayer

$$C_{P,m} - C_{V,m} = R$$
$$C_{P,m} - \frac{R}{\gamma - 1} = R$$
$$C_{P,m} = R\left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right)$$

$$\boxed{C_{P,m} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}.}$$

25. En déduire l'expression de la capacité thermique massique de l'air c_P à pression constante en fonction de γ et R_{air}. Faire l'application numérique.

D'après la relation précédent, il vient que

$$C_{P,m} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$
$$nC_{P,m} = n\frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$
$$\frac{C_P}{m} = \frac{n}{m}\frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$
$$c_P = \frac{1}{M_{\text{air}}}\frac{R\gamma}{\gamma - 1}$$
$$c_P = \frac{R}{M_{\text{air}}}\frac{\gamma}{\gamma - 1}$$
$$c_P = R_{\text{air}}\frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

A.N

$$\boxed{c_P = 289\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}} \times \frac{1{,}4}{1{,}4 - 1} = 1{,}01 \times 10^3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot kg^{-1}}.}$$

26. Traduire l'hypothèse d'équilibre thermique et mécanique de la parcelle d'air à l'altitude z_0, en considérant ses paramètres intensifs.

L'équilibre thermique implique que la parcelle d'air à l'altitude z_0 est à la température $T_1 = T_0$.

L'équilibre mécanique implique que la parcelle d'air à l'altitude z_0 est à la pression $P_1 = P(z_0)$.

27. La variation de la pression en fonction de l'altitude dans le modèle choisi est $P(z) = P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}$. Exprimer la petite variation de pression δP_1 de la parcelle d'air lors de son déplacement vertical, en fonction de $P(z_0)$ la pression à l'altitude z_0, , g, R_{air}, T_0 et et la petite variation d'altitude $\varepsilon(t)$.

D'après la relation donnée on sait qu'une petite variation de pression en fonction de l'altitude s'exprime

$$\delta P_1 = \left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z_0} \delta z.$$

Ici la petite variation d'altitude est $\delta z = \varepsilon(t)$ et la dérivée partielle de la pression en fonction de l'altitude est

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=z_0} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}\right)_{z_0} \\
\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=z_0} &= \left(-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0} P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}\right)_{z_0} \\
\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=z_0} &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0} P_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z_0} \\
\left(\frac{\partial P}{\partial z}\right)_{z=z_0} &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0} P(z_0).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\delta P_1 = -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0} P(z_0)\varepsilon(t).}$$

28. À partir d'une expression des gaz parfaits, exprimer cette petite variation δP_1 en fonction de $\mu(z_0)$, g et $\varepsilon(t)$.

D'après la relation donnée plus tôt

$$P = \mu R_{\text{air}} T$$

il vient que

$$P(z_0) = \mu(z_0) R_{\text{air}} T$$

et comme l'atmosphère est isotherme $T = T_0$. Donc

$$\begin{aligned}
\delta P_1 &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0} P(z_0)\varepsilon(t) \\
\delta P_1 &= -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0} \mu(z_0) R_{\text{air}} T_0 \varepsilon(t).
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{\delta P_1 = -g\mu(z_0)\varepsilon(t).}$$

29. La variation de la masse volumique en fonction de l'altitude dans le modèle choisi est $\mu(z) = \mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}$. Exprimer la petite variation de pression $\delta\mu$ de la parcelle d'air lors de son déplacement vertical, en fonction de $\mu(z_0)$, g, R_{air}, T_0 et la petite variation d'altitude $\varepsilon(t)$.

D'après la relation donnée on sait qu'une petite variation de pression en fonction de l'altitude s'exprime

$$\delta\mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_{z=z_0} \delta z.$$

Ici la petite variation d'altitude est $\delta z = \varepsilon(t)$ et la dérivée partielle de la pression en fonction de l'altitude est

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_{z=z_0} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}\right)_{z_0}$$
$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_{z=z_0} = \left(-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z}\right)_{z_0}$$
$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_{z=z_0} = -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\mu_0 e^{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}z_0}$$
$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial z}\right)_{z=z_0} = -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\mu(z_0).$$

Ainsi

$$\boxed{\delta\mu = -\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\mu(z_0)\varepsilon(t).}$$

30. Une transformation adiabatique réversible respecte la loi de Laplace qui implique que $PV^\gamma = \text{cst}$. Montrer que la différentielle exacte de PV^γ est telle que

$$0 = \gamma PV^{\gamma-1}\mathrm{d}V + V^\gamma \mathrm{d}P.$$

En utilisant la formule donnée, il vient que

$$\mathrm{d}\left(PV^\gamma\right) = \frac{\partial PV^\gamma}{\partial P}\mathrm{d}P + \frac{\partial PV^\gamma}{\partial V}\mathrm{d}V$$
$$\mathrm{d}\left(PV^\gamma\right) = V^\gamma \mathrm{d}P + \gamma PV^{\gamma-1}\mathrm{d}V.$$

La différentielle du constante étant nulle, il vient que

$$\boxed{0 = \gamma PV^{\gamma-1}\mathrm{d}V + V^\gamma \mathrm{d}P.}$$

31. Utiliser la relation précédente pour exprimer la petite variation de volume $\mathrm{d}V = \delta V_1$ subie par la masse d'air en fonction de δP_1, $V_1(z_0)$, $P(z_0)$ et γ.

En remplaçant $\mathrm{d}V$ par δV_1 et $\mathrm{d}P$ par δP_1 il vient que

$$\boxed{0 = \gamma P(z_0)V_1^{\gamma-1}(z_0)\,\delta V_1 + V_1^\gamma(z_0)\,\delta P_1.}$$

32. Utiliser une relation obtenue plus tôt pour montrer que

$$\delta V_1 = \frac{gV_1(z_0)\varepsilon(t)}{R_{\text{air}}T_0\gamma}.$$

À partir de l'expression précédente, on peut isoler δV_1, soit

$$\delta V_1 = -\frac{V_1^\gamma(z_0)\,\delta P_1}{\gamma P(z_0)V_1^{\gamma-1}(z_0)} = -\frac{V_1(z_0)\,\delta P_1}{\gamma P(z_0)}$$

soit

$$\delta V_1 = -V_1(z_0)\left(\frac{-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}P(z_0)\varepsilon(t)}{\gamma P(z_0)}\right)$$

donc

$$\boxed{\delta V_1 = \frac{gV_1(z_0)\varepsilon(t)}{R_{\text{air}}T_0\gamma}.}$$

33. La résultante des forces de pression qui s'exerce sur la parcelle d'air correspond à la force nommée poussée d'Archimède. Donner l'expression de la poussée d'Archimède qui s'exerce sur la parcelle d'air à l'altitude $z_0+\varepsilon(t)$ en fonction de $\mu(z_0)$, $V_1(z_0)$, g, $\varepsilon(t)$, R_{air}, T_0 et γ. On négligera les termes d'ordre supérieur à 1 en ε.

La poussé d'Archimède qui s'exerce sur la particule à l'altitude $z_0+\varepsilon(t)$ est

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\Pi} &= -\mu\left(z_0+\varepsilon(t)\right)V\left(z_0+\varepsilon(t)\right)\overrightarrow{g} \\
&= -\left(\mu\left(z_0\right)+\delta\mu\right)\left(V\left(z_0\right)+\delta V_1\right)\overrightarrow{g} \\
&= -\left(\mu\left(z_0\right)-\mu\left(z_0\right)\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\right)\left(V_1\left(z_0\right)+V_1\left(z_0\right)\frac{g}{R_{\text{air}}T_0\gamma}\varepsilon(t)\right)\overrightarrow{g} \\
&= -\left(\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)-\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)+\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\frac{g}{R_{\text{air}}T_0\gamma}\varepsilon(t)\right)\overrightarrow{g} \\
&= -\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\left(1-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\right)\overrightarrow{g}
\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi} = -\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\left(1-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\overrightarrow{g}.}$$

34. Donner l'expression de la résultante des forces sur la parcelle d'air à l'altitude en $z_0+\varepsilon(t)$ (on tiendra compte du fait que la masse de la parcelle d'air n'a pas changé entre z_0 et $z_0+\varepsilon(t)$).

La résultante des forces sur la particule à l'altitude $z_0+\varepsilon(t)$ est

$$\sum\overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{P}+\overrightarrow{\Pi}$$

soit

$$\begin{aligned}
\sum\overrightarrow{F}_i &= m\overrightarrow{g}-\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\left(1-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\overrightarrow{g} \\
&= \mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\overrightarrow{g}-\mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\left(1-\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma}\right)\overrightarrow{g}
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\sum\overrightarrow{F}_i = \mu\left(z_0\right)V_1\left(z_0\right)\frac{g}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma}\overrightarrow{g}.}$$

35. Écrire l'équation du mouvement vertical de la parcelle d'air et montrer que $\varepsilon(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2}+N^2\varepsilon(t)=0$$

où l'on exprimera N en fonction de g, c_P et T_0.

D'après le PFD appliqué sur la parcelle d'air

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= \sum \vec{F}_i \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z\vec{u}_z}{\mathrm{d}t^2} &= -\mu(z_0)V_1(z_0)\frac{g^2}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma}\vec{u}_z \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} &= -\mu(z_0)V_1(z_0)\frac{g^2}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma} \\
m\frac{\mathrm{d}^2 z_0+\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -\mu(z_0)V_1(z_0)\frac{g^2}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma} \\
m\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -\mu(z_0)V_1(z_0)\frac{g^2}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma} \\
\mu(z_0)V_1(z_0)\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -\mu(z_0)V_1(z_0)\frac{g^2}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma} \\
\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{g^2}{R_{\text{air}}T_0}\varepsilon(t)\frac{\gamma-1}{\gamma} \\
\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{g^2}{c_P T_0}\varepsilon(t)
\end{aligned}$$

ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 \varepsilon(t)}{\mathrm{d}t^2} + N^2\varepsilon(t) = 0}$$

avec

$$\boxed{N = \frac{g}{\sqrt{c_P T_0}}.}$$

36. Quelle est la dimension de N ? Calculer la valeur numérique de $2\pi/N$.

On mène l'analyse dimensionnelle sur le terme précédent

$$\begin{aligned}
\left[\frac{g}{\sqrt{c_P T_0}}\right] &= \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\left(\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\times\mathrm{K}\right)^{1/2}} \\
\left[\frac{g}{\sqrt{c_P T_0}}\right] &= \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\left(\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\times\mathrm{K}\right)^{1/2}} \\
\left[\frac{g}{\sqrt{c_P T_0}}\right] &= \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\left(\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}\right)^{1/2}} \\
\left[\frac{g}{\sqrt{c_P T_0}}\right] &= \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}}{\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}} \\
\left[\frac{g}{\sqrt{c_P T_0}}\right] &= \mathrm{s}^{-1}.
\end{aligned}$$

N correspond à l'inverse d'un temps. En comparant l'équation différentielle du second degré avec une équation canonique, on constate que N correspond à une pulsation : la pulsation à laquelle oscille la parcelle d'air autour de la position d'équilibre.

La valeur de $2\pi/N$ correspond à la période d"oscillation de la parcelle, soit

A.N.

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi\times\sqrt{c_P T_0}}{g} = \frac{2\pi\times\sqrt{1{,}01\times10^3\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}\cdot\mathrm{kg}^{-1}\times300\,\mathrm{K}}}{9{,}81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}} = 352\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{h}53\,\mathrm{min}.}$$

37. L'atmosphère isotherme peut-elle être considérée comme stable ? Le modèle de l'atmosphère isotherme vous semble-t-il réaliste ?

    Comme le montre cette étude, la parcelle d'air oscille autour d'une position d'équilibre suite à une perturbation verticale, on peut donc considérer que l'atmosphère isotherme est stable.

    Le modèle de l'atmosphère isotherme n'est cependant pas applicable dans la troposphère où la température varie plutôt linéairement avec l'altitude. Il conviendrait mieux dans la stratosphère entre $10\,\mathrm{km}$ et $20\,\mathrm{km}$ d'altitude.

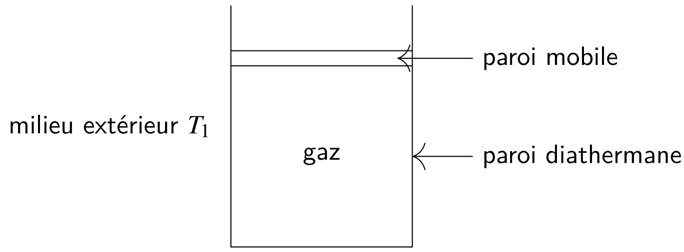
3 Etudes de transformations d'un gaz parfait

Concours communs polytechnique TSI (2006)

3.1 Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement.

La température T_1 du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat. A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression P_1, un volume V_1 et une température T_1 et la paroi est bloquée.



On débloque la paroi et on la déplace de manière quasi-statique jusqu'à une position, telle que le volume V_1' offert au gaz soit $V_1' = 2V_1$, et on la bloque à nouveau.

38. Déterminer la pression P_1' du gaz dans l'état final en fonction de P_1.

    Le gaz étant parfait, on peut utiliser la loi des gaz parfaits

$$PV = nRT.$$

Le système étant fermé, la quantité de matière n est constante.

Les parois étant diathermanes et l'extérieur se comportant comme un thermostat, la température du système aux états d'équilibre est égale à celle de l'extérieur donc

$$T_1 = T_i = T_f.$$

Il vient que

$$P_iV_i = nRT_i = nRT_1 \qquad \text{et} \qquad P_fV_f = nRT_f = nRT_1$$

donc

$$P_iV_i = P_fV_f.$$

Or $P_i = P_1$, $V_i = V_1$, $V_f = 2V_1$, donc

$$P_1V_1 = P_f2V_1$$

donc

$$\boxed{P_f = \frac{P_i}{2}.}$$

39. Déterminer l'expression du travail W_1 mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de n, R et T_1.

Le travail des forces de pression est

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{ext} \mathrm{d}V.$$

La paroi étant mobile et la transformation étant quasi-statiique, la pression P du système est définie à tout instant et est égale à la pression extérieure, soit

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P \mathrm{d}V$$

soit, en utilisant la loi des gaz parfait

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} \frac{nRT}{V} \mathrm{d}V.$$

En sortant les constantes ($T = T_1 = \mathrm{cst}$)

$$W = -nRT_1 \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V} \mathrm{d}V = -nRT_1 \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right) = -nRT_1 \ln\left(\frac{2V_1}{V_1}\right)$$

$$\boxed{W = -nRT_1 \ln 2.}$$

40. Calculer la variation d'énergie interne ΔU_1 du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique Q_1 reçu par le gaz en fonction de n, R et T_1.

Le gaz étant parfait la variation d'énergie interne est

$$\boxed{\Delta U = C_V \Delta T = 0.}$$

D'après le premier principe de la thermodynamique

$$\Delta U = Q + W$$

donc

$$0 = Q + W \qquad \text{soit} \qquad Q = -W$$

donc

$$\boxed{Q = nRT_1 \ln 2.}$$

Au cours de la détente le gaz perd de l'énergie sous forme de travail mécanique $W < 0$, pour maintenir sa température à la valeur de la température du milieu extérieur, il doit recevoir de l'énergie sous forme de chaleur $Q > 0$.

4 L'exploration martienne

Concours communs CCINP TSI (2023)

4.1 Perseverance - l'atterrissage

Lancé depuis la Terre le 30 juillet 2020 grâce à un lanceur Atlas V, le rover Perseverance a atterri sur la planète Mars le 18 février 2021. Le site d'atterrissage, le cratère Jezero, est une zone présentant une grande diversité géologique et ayant abrité un lac il y a environ 3,6 milliards d'années. Un des enjeux de cette mission est le prélèvement d'échantillons destinés à être analysés sur Terre afin de déceler d'éventuelles traces d'une vie passée.

La sonde spatiale Mars 2020, de masse m, pénètre dans l'atmosphère martienne à la vitesse de $12\,000\,\mathrm{km \cdot h^{-1}}$ (vitesse mesurée par rapport au sol), elle larguera le rover 7 minutes plus tard.

Après une première phase de freinage grâce au bouclier thermique, le parachute est déployé à l'altitude d'environ $10{,}6\,\mathrm{km}$ et à la vitesse, notée v_A, de $420\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

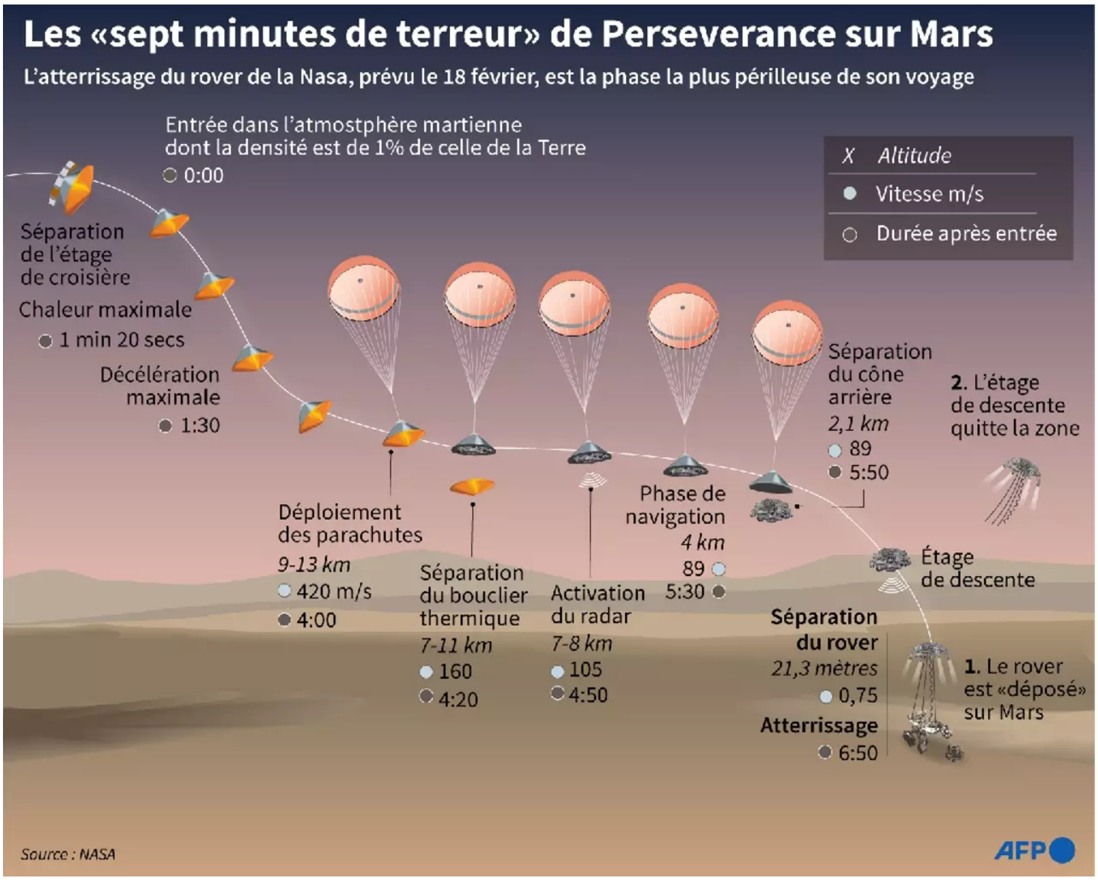


Figure 4: Atterrissage de Perseverance

41. Le point A étant l'endroit où le parachute est déployé, donner l'expression littérale de l'énergie cinétique $E_c(A)$ de l'ensemble en se limitant à un simple mouvement de translation.

D'après la définition de l'énergie cinétique il vient que

$$\boxed{E_c(A) = \frac{1}{2}mv_A^2.}$$

Au bout de 20 secondes, la vitesse n'est plus que de $160\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et l'altitude de $7{,}5\,\mathrm{km}$, Mars 2020 largue alors son bouclier thermique.

42. En appelant B le point de largage et en considérant toujours la même masse, exprimer la variation d'énergie cinétique entre les points A et B.

La variation d'énergie cinétique entre les points A et B, notée $\Delta_{AB}E_c$ est telle que

$$\boxed{\Delta_{AB}E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right).}$$

43. Connaissant la masse de la sonde spatiale de $3000\,\mathrm{kg}$, effectuer le calcul de cette variation d'énergie cinétique.

A.N.

$$\Delta_{AB}E_c = \frac{1}{2}m\left(v_B^2 - v_A^2\right) = \frac{1}{2}\times 3000\,\mathrm{kg}\times\left(\left(160\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2 - \left(420\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)^2\right) = -2{,}26\times 10^8\,\mathrm{J}.$$

44. Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

Le théorème de l'énergie cinétique implique que la variation d'énergie cinétique d'un objet est égale à la somme des travaux des forces exercées sur lui, soit

$$\boxed{\Delta E_c = \sum W\left(\overrightarrow{F}_i\right).}$$

45. En supposant l'accélération de la pesanteur martienne uniforme et de valeur $g =_S I3.7m\cdot s^{-2}$, calculer la valeur du travail du poids entre les points A et B, noté $W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right)$.

Le travail du poids est tel que

$$\begin{aligned}
W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) &= \int_A^B \delta W\left(\overrightarrow{P}\right)\\
&= \int_A^B \overrightarrow{P}\,\mathrm{d}\overrightarrow{OM}\\
&= \int_A^B -P\overrightarrow{u}_z\cdot\mathrm{d}z\overrightarrow{u}_z\\
&= \int_{z_A}^{z_B} -P\mathrm{d}z\\
&= \int_{z_A}^{z_B} -mg\mathrm{d}z\\
&= -mg\int_{z_A}^{z_B}\mathrm{d}z\\
&= -mg\left(z_B - z_A\right)
\end{aligned}$$

soit

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) = mg\left(z_A - z_B\right).$$

A.N.

$$\boxed{W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) = 3000\,\mathrm{kg}\times 3{,}7\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\times\left(10{,}6\times 10^3\,\mathrm{m} - 7{,}5\times 10^3\,\mathrm{m}\right) = 3{,}44\times 10^7\,\mathrm{J}.}$$

46. Ce travail est-il qualifié de moteur ou de résistant ? Justifier.

Le travail étant positif, il est moteur. On le voit aisément en constant que la force qu'est le poids est dans le même sens que le déplacement du système : vers le bas.

47. Montrer, à partir des questions 44 et 45, que le travail des forces de frottement noté $W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right)$ sur le parachute, dont la résultante sera notée $\overrightarrow{f}$, est d'environ $-2{,}6\times 10^8\,\mathrm{J}$.

D'après le thérorème de l'énergie cinétique, il vient que

$$\Delta_{AB}E_c = W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right) + W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right).$$

Ainsi

$$W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) = \Delta_{AB}E_c - W_{AB}\left(\overrightarrow{P}\right).$$

A.N.

$$\boxed{W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) = -2{,}26 \times 10^8\,\text{J} - 3{,}44 \times 10^7\,\text{J} = -2{,}60 \times 10^8\,\text{J}.}$$

48. Dans la suite du sujet, nous nous limiterons à une étude du mouvement en translation verticale. En supposant cette force de frottement $\overrightarrow{f}$ constante, déduire un ordre de grandeur de sa valeur minimale à partir de la question précédente.

Le travail de la force de frottement est tel que

$$\begin{aligned} W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right) &= \int_A^B \delta W\left(\overrightarrow{f}\right) \\ &= \int_A^B \overrightarrow{f}\,\overrightarrow{\mathrm{d}OM} \\ &= \int_A^B f u_z \cdot \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u}_z \\ &= \int_{z_A}^{z_B} f \mathrm{d}z \\ &= f\int_{z_A}^{z_B} \mathrm{d}z \\ &= f\left(z_B - z_A\right) \end{aligned}$$

soit

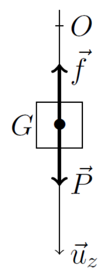
$$f = \frac{W_{AB}\left(\overrightarrow{f}\right)}{z_B - z_A}.$$

A.N.

$$\boxed{f = \frac{-2{,}60 \times 10^8\,\text{J}}{7{,}5 \times 10^3\,\text{m} - 10{,}6 \times 10^3\,\text{m}} = 8{,}39 \times 10^4\,\text{N}.}$$

En réalité, la résultante des forces de frottement n'est pas constante et dépend de la vitesse du système. Nous considérerons une force de type frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$, où h est le coefficient de frottement fluide et $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse.

49. Soit l'axe (Oz), vertical et orienté vers le bas, dont l'origine O se situe au point d'ouverture du parachute. Faites un schéma sur lequel figurent la sonde spatiale matérialisée par son centre de gravité G à une altitude quelconque après ouverture du parachute, l'axe (Oz) et les deux forces s'exerçant sur la sonde.



---

50. La descente de la sonde peut-elle être qualifiée de chute libre ? Justifier.

La sonde n'étant pas seulement soumise qu'à son poids, on ne peut pas qualifier la chute de chute libre.

51. À partir de vos connaissance en dynamique du point, établir l'équation différentielle vérifiée par la projection de la vitesse $\overrightarrow{v}$ de la sonde sur l'axe vertical et la mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + Av = B$$

où A et B représentent deux constantes dont on précisera les expressions.

En considérant la sonde comme le système et le référentiel martien comme un référentiel galiléen, on peut utiliser le principe fondamental de la dynamique

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}$$

en projetant cette équation sur l'axe vertical

$$-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg + hv$$
$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -g + \frac{h}{m}v$$

soit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{h}{m}v = g.}$$

On peut identifier les deux constantes $A = \frac{h}{m}$ et $B = g$.

52. Sans résoudre l'équation, déduire de la question précédente l'expression de la vitesse limite théorique pouvant être atteinte par la sonde avec cette hypothèse, au bout d'un temps infiniment long.

La vitesse limite est la vitesse atteinte par la sonde après un temps très long, soit la vitesse de la sonde en régime permanent. Le régime permanent signifie que la vitesse ne varie plus, dans ce cas la vitesse limite correspond à la solution particulière de l'équation différentielle, soit

$$0 + \frac{h}{m}v_{lim} = g$$

donc

$$\boxed{v_{lim} = \frac{gm}{h}.}$$

Pour pouvoir réussir cette phase périlleuse, l'étage de descente (le *skycrane*) dispose d'un radar Doppler comportant six antennes dévoilées dès que le bouclier thermique est largué. Le radar peut alors déterminer avec précision la vitesse et l'altitude de la sonde.

La bande Ka (*Kurz Above*) du spectre électromagnétique est très utilisée dans le domaine des télécommunications spatiales ; on considère une fréquence moyenne de $30\,\mathrm{GHz}$.

53. Calculer la longueur d'onde dans le vide, notée λ_0, associée à cette fréquence.

La longueur d'onde est telle que

$$\lambda_0 = \frac{c}{f}.$$

A.N.

$$\boxed{\lambda_0 = \frac{3\times10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{30\times10^9\,\mathrm{s^{-1}}} = 0{,}01\,\mathrm{m}.}$$

Lorsque la sonde se trouve à une altitude H, celle-ci peut être déterminée avec précision grâce à la durée mise par l'onde pour effectuer un aller-retour entre l'antenne d'émission et le sol.

54. Exprimer l'altitude H de la sonde en fonction de la durée mise par l'onde pour effectuer cet aller-retour.

On considère que la sonde reste à l'altitude H durant le trajet de l'onde entre la sonde, le sol puis la sonde, la vitesse de l'onde étant celle de la lumière.

Ainsi durant un aller-retour, nous pouvons écrire la relation

$$c = \frac{2H}{\Delta t}$$

avec Δt la durée mise par l'onde pour effectuer l'aller-retour.

Donc

$$\boxed{H = \frac{c\Delta t}{2}.}$$

55. À partir de l'infographie présentée Figure 4, estimer le temps Δt écoulé entre l'émission de l'onde par le radar de la sonde et sa réception après réflexion sur le sol martien, au moment l'activation du radar.

Sur l'infographie, on constate que l'altitude correspondant à l'activation du radar est en moyenne de 7,5 km, ainsi

$$\Delta t = \frac{2H}{c}.$$

A.N.

$$\boxed{\Delta t = \frac{2 \times 7{,}5 \times 10^3\,\mathrm{m}}{3 \times 10^8\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}} = 5 \times 10^{-5}\,\mathrm{s}.}$$

FIN DU SUJET