Applications linéaires

1. Définitions d'applications linéaires. Notations $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{L}(E)$. La composée d'applications linéaires compatibles et une combinaison linéaire d'applications linéaires sont linéaires. Bilinéarité de la composée de deux applications linéaires.
2. L'image réciproque d'un sev H de F par une application linéaire $u \in\in \mathcal{L}(E,F)$ est un sev de E. Notion de noyau d'une application linéaire. Notation $Ker(f)$. Une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à l'élément neutre.
3. Image d'une application linéaire $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'image d'un sev H de E par une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,F)$ est un sev de F.
4. L'ensemble $(\mathcal{L}(E,F),+,\circ)$ est un anneau non commutatif et non intègre pour $dim(E) \geq 1$. L'ensemble des automorphismes est un groupe noté $GL(E)$.
5. Notion d'isomorphisme, la réciproque d'un isomorphisme est une application linéaire. Une application linéaire est un isomorphisme ssi elle envoie une base sur une base. La composée par un isomorphisme ne change pas le rang de l'application linéaire.
6. Modes de définition d'une application linéaire par une base et sur un espace vectoriel $E = F \oplus G$ sur une base adaptée. Notion de projecteur sur un espace vectoriel parallèlement à un autre et de symétrie.
7. Théorèmes du rang :
   (a) Forme géométrique : pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ il existe un supplémentaire S de $Ker(u)$ dans E telle que $u : S \to Im(u)$ soit un isomorphisme.
   (b) Forme dimensionnelle : $dim(E) = dim(Ker(u)) + rg(u)$.
8. Formes linéaires. Hyperplans. Il y a équivalence entre être le noyau d'une forme linéaire non nulle $u^\star \in \mathcal{L}(E,\mathbb{K})$ et un sev de dimension $n-1$ dans un espace de dimension n et admettre un supplémentaire de dimension 1 dans E. L'intersection de m hyperplans dans un espace vectoriel de dimension n est de dimension supérieure à $n-m$.

Compétences à évaluer

— Décrire le noyau d'une application linéaire qui passe la plupart du temps par la résolution d'un système linéaire.
— Être capable de déterminer l'injectivité et la surjectivité d'une application linéaire.
— être capable de déterminer si une application linéaire est un projecteur et une symétrie et de déterminer leurs espaces caractéristiques.
— Savoir appliquer judicieusement le théorème du rang.

Questions de cours

Question 1:
Démontrer que pour $u \in \mathcal{L}(E,F)$ un isomorphisme et $\beta = (e_1,\dots,e_n)$ une base de E, on a $\beta' = (u(e_1),u(e_2),\dots,u(e_n))$ base de F.

Question 2:
Énoncé du théorème du rang sous ses deux formes (voir plus haut).

Question 3:
Démontrer que : Soit E, F des $\mathbb{K}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E,F)$. L'application f est injective si et seulement si

$$Ker(f) = \{0_E\}.$$

Question 4:
Donner la définiton de forme linéaire et d'hyperplan.

Question 5:
Énoncer le théorème de caractérisation des automorphismes en dimension finie : $u \in \mathcal{L}(E)$ est un isomorphisme ssi u est injectif ssi u est surjectif.