

Chapitre 1 - Signal sinusoïdal et filtrage

Dans ce chapitre, nous reprenons l'étude des circuits électroniques du premier et du deuxième ordre. Nous allons, cette fois, étudier des circuits soumis à des signaux sinusoïdaux. Nous allons voir que dans ce cas, la méthode la plus adéquate pour caractériser la réponse d'un circuit vis-à-vis d'un tel signal, est la méthode complexe.

Cette méthode une fois acquise nous permettra d'interpréter un circuit électronique comme un système transformant un signal d'entrée en un signal de sortie.

Leçon I. Régime sinusoïdal forcé et résonance

Au cours de cette leçon nous allons étudier la réponse d'un circuit vis-à-vis d'une **excitation sinusoïdale**. Nous allons introduire la méthode complexe, ainsi que la notion d'impédance complexe, qui nous permettront de transformer les équations différentielles en de simples équations.

L'étude de circuit du deuxième ordre en régime sinusoïdal forcé fera apparaître le phénomène de **résonance**.

I.1. Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

I.1.a Rappel

Nous avons vu, en mécanique comme en électronique, qu'un système du deuxième ordre est régi par des équations canoniques, par exemple

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 s(t)}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t)$$

avec ξ le facteur d'amortissement du système $e(t)$ le signal d'entrée ou excitation du système et $s(t)$ le signal en sortie ou réponse du système.

Au premier semestre, nous avons considéré uniquement des signaux d'entrée continu. Nous allons maintenant considéré des excitation sinusoïdales.

Nota bene

Pourquoi étudier une excitation sinusoïdale? On a vu que **tout signaux périodique**, quelque soit sa forme, pouvait être mis sous la forme d'une somme de signaux sinusoïdaux de fréquences, amplitudes et phases à l'origine multiples. C'est ce qu'on appelle **le développement en série de Fourier**.

Par exemple, un signal $s(t)$ périodique et non sinusoïdal peut s'écrire

$$s(t) = A_0 + \sum_i A_n \cos(2\pi n f_s t + \varphi_n)$$

avec A_n et φ_n les amplitudes et les déphasages à l'origine des harmoniques d'ordre n du signal. Ainsi, l'étude un signal sinusoïdal permet de'étudier tous les signaux périodiques.

I.1.b Réponse d'un circuit à une excitation sinusoïdale

Nous allons nous baser sur les conclusions de l'étude d'un circuit avec un signal d'entrée continu pour décrire qualitativement la réponse d'un circuit dont le signal d'entrée est, cette fois, sinusoïdal.

Nous avons vu que la réponse d'un circuit dont le signal $s(t)$ est régi par un des deux équations canoniques était décomposée en deux parties, la solution particulière s_p et la solution homogène $s_h(t)$.

Nous avons spécifié que la réponse particulière était de la même forme que le second membre. Ici, le second membre n'est plus constant mais est une fonction sinusoïdale du temps, il s'agit de l'excitation sinusoïdale telle que

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

avec E_0 l'amplitude du signal et ω sa pulsation.

La solution particulière est donc de la même forme, soit

$$s_p(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

avec S_0 l'amplitude de la solution particulière, et ω sa pulsation égale à celle de l'excitation.

La solution particulière $s_p(t)$ correspond en fait à la **réponse du système en régime permanent**. La solution homogène $s_h(t)$ s'annule lorsque $t \rightarrow \infty$. **En régime transitoire**, la réponse du circuit correspond à la somme de la solution particulière et de la solution homogène. Le régime transitoire prend fin lorsque la solution homogène devient négligeable devant la solution particulière.

♥ Définition

Si le système est alimenté par une excitation $e(t)$ sinusoïdale, on observe d'abord un régime transitoire puis **un régime sinusoïdal permanent, appelé également régime sinusoïdal forcé, régime établi ou simplement régime sinusoïdale**.

En régime sinusoïdal forcé, le signal de sortie $s(t)$ est égal à l'unique solution de l'équation différentielle du système qui est sinusoïdale et de même fréquence que $e(t)$ (la réponse a la même fréquence que l'excitation, elle est forcée). Cette solution est indépendante des conditions initiales.

Durant le régime transitoire, un signal de régime libre (solution homogène du système, soit solution pour une excitation nulle), dépendant des conditions initiales, se superpose.

Dans la suite du chapitre, nous nous restreindront à l'étude du régime sinusoïdal.

1.2. Méthode complexe

Afin d'établir la réponse du système en régime établi, on utilise la méthode complexe qui consiste à associer à toute fonction sinusoïdale réelle $x(t)$

$$x(t) = X_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

une fonction complexe $\underline{x}(t)$

$$\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)}.$$

La fonction $x(t)$ correspond à la partie réelle de la fonction complexe $\underline{x}(t)$

$$x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t)).$$

On peut également noter le signal complexe tel que

$$\underline{x}(t) = X_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = X_0 e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X}_0 e^{j\omega t}$$

avec $\underline{X}_0 = X_0 e^{j\varphi}$ l'**amplitude complexe** du signal.

Ainsi en connaissant la fonction complexe $\underline{x}(t)$, nous pouvons déterminer :

- la valeur instantanée de la fonction réelle en prenant la partie réelle $x(t) = \operatorname{Re}(\underline{x}(t))$
- l'amplitude de la fonction réelle en prenant le module $X_0 = |\underline{x}(t)|$
- la phase initiale en prenant l'argument $\varphi = \arg(\underline{x}(t)) - \omega t = \arg(\underline{X}_0)$.

Nota bene

Un nombre complexe $\underline{z} = Z_0 e^{jx}$, avec Z_0 un nombre réel, peut s'écrire, d'après **la formule d'Euler**

$$\underline{z} = Z_0 e^{jx} = Z_0 \cos x + jZ_0 \sin x.$$

On peut également exprimer un nombre complexe \underline{z} en fonction de **son module et de son argument** de telle manière que

$$\underline{z} = |\underline{z}| \exp(\arg(\underline{z})).$$

Le **module** d'un nombre complexe \underline{z} est défini tel que

$$|\underline{z}| = \sqrt{\operatorname{Re}^2(\underline{z}) + \operatorname{Im}^2(\underline{z})}.$$

L'**argument** d'une fonction complexe \underline{z} est défini tel que

$$\arg(\underline{z}) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(\underline{z})}{\operatorname{Re}(\underline{z})}\right).$$

1.2.a Impédance complexe

À partir de la méthode complexe on peut introduire l'impédance complexe \underline{Z} d'un dipôle passif. Elle est définie comme le rapport entre la tension complexe \underline{u} aux bornes du dipôle et l'intensité complexe \underline{i} du courant qui traverse le dipôle soit

$$\underline{u} = \underline{Z} \times \underline{i}.$$

1.2.b Cas du résistor

Dans le cas du résistor de résistance R , la loi d'Ohm

$$u(t) = Ri(t)$$

se traduit immédiatement en complexe par

$$\underline{u}(t) = R\underline{i}(t).$$

L'impédance complexe du résistor s'identifie directement à sa résistance, soit

$$\underline{Z}_R = R.$$

1.2.c Cas du condensateur

La loi du condensateur est

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt}.$$

En passant en complexe, il vient que

$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}(t)}{dt}$$

soit pour une tension complexe sinusoïdale $\underline{u}(t) = u e^{j\omega t}$

$$\underline{i}(t) = j\omega C \underline{u}(t)$$

ainsi

$$\underline{u}(t) = \frac{1}{jC\omega} \underline{i}(t).$$

L'impédance complexe du condensateur est donc

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

1.2.d Cas de la bobine

La loi de la bobine est

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$

En passant en complexe, il vient que

$$\underline{u}(t) = L \frac{d\underline{i}(t)}{dt}.$$

L'impédance complexe de la bobine est donc

$$\underline{Z}_L = jL\omega.$$

Nota bene

La dérivation par rapport au temps d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω en mode complexe se résume à la multiplication de la fonction complexe par $j\omega$.

L'intégration par rapport au temps d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω en mode complexe se résume à la multiplication de la fonction complexe par $\frac{1}{j\omega}$.

1.2.e Associations d'impédances complexes et ponts diviseurs

La relation qui relie les tensions complexes et les intensités complexes aux bornes d'un dipôle, $\underline{u} = \underline{Z}i$, est analogue à la loi d'Ohm pour une résistance $u_R = Ri$. **Les lois d'association des impédances** sont donc analogues à celle des résistances.

- Des dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_i avec i compris entre 1 et N **associées en série** constituent une impédance équivalente \underline{Z}_{eq}

$$\underline{Z}_{eq} = \sum_{i=1}^N \underline{Z}_i.$$

- Des dipôles d'impédances complexes \underline{Z}_i avec i compris entre 1 et N **associées en parallèle** constituent une impédance équivalente \underline{Z}_{eq}

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\underline{Z}_i}}.$$

Les formules des **ponts diviseurs de tension et de courant** sont donc encore valables avec les impédances complexes.

- Si un courant identique passe dans deux dipôles d'impédance \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 alors la tension complexe aux bornes d'un des dipôles est d'après le **pont diviseur de tension**

$$\underline{u}_1 = \underline{u} \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

avec \underline{u} la tension aux bornes du tronçon du circuit dans lequel les dipôles sont associés en série.

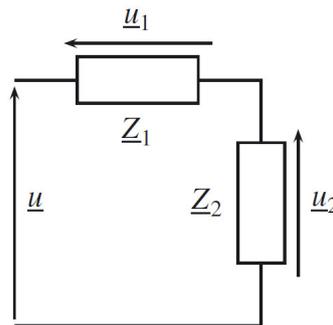


FIGURE 1.1 – Circuit électrique diviseur de tension

- Si deux dipôles d'impédance \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 partagent la même tension à leurs bornes alors l'intensité complexe traversant un des dipôles est d'après le **pont diviseur de courant**

$$\underline{i}_1 = \underline{i} \frac{\frac{1}{\underline{Z}_1}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}} = \underline{i} \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

avec \underline{i} l'intensité complexe correspondant à la somme des intensités complexes traversant les dipôles.

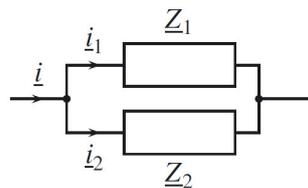


FIGURE 1.2 – Circuit électrique diviseur de courant

1.3. Application au circuit RC

Étudions un circuit RC à l'aide de la méthode complexe.

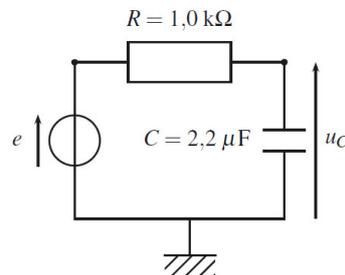


FIGURE 1.3 – Circuit RC

Pour obtenir la tension complexe aux bornes du condensateur, on peut utiliser la formule du pont diviseur de tension, soit

$$\underline{u_C}(t) = \underline{e}(t) \frac{Z_C}{Z_R + Z_C}$$

$$\underline{u_C}(t) = \underline{e}(t) \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{u_C}(t) = \underline{e}(t) \frac{1}{jRC\omega + 1}$$

$$\underline{u_C}(t) = E_0 \frac{e^{j\omega t}}{1 + jRC\omega}$$

Récrivons le terme $\frac{1}{1 + jRC\omega}$. D'après l'expression d'un nombre complexe

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| \exp \left(j \arg \left(\frac{1}{1 + jRC\omega} \right) \right).$$

Nota bene

Étudions les propriétés de la fonction **argument** d'un nombre. D'après la définition de l'argument

$$\arg(1) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(1)}{\text{Re}(1)} \right) = \arctan(0) = 0.$$

Or

$$\arg(1) = \arg \left(\frac{z}{z} \right) = \arg(z) + \arg \left(\frac{1}{z} \right)$$

donc

$$\arg(z) + \arg \left(\frac{1}{z} \right) = 0$$

$$\arg \left(\frac{1}{z} \right) = -\arg(z).$$

Il vient donc que

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| \exp(-j \arg(1 + jRC\omega))$$

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| \exp\left(-j \arctan\left(\frac{jRC\omega}{1}\right)\right)$$

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| \exp(-j \arctan(jRC\omega)).$$

Nota bene

Le **module du rapport** de deux nombres est égal au rapport des modules de ces nombres, soit

$$\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Il vient donc que

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{|1|}{|1 + jRC\omega|} \exp(-j \arctan(jRC\omega))$$

$$\frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \exp(-j \arctan(jRC\omega)).$$

Finalement, l'expression de la tension complexe est

$$\underline{u}_C(t) = E_0 e^{j\omega t} \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{-j \arctan(jRC\omega)}$$

$$\underline{u}_C(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} e^{j(\omega t - \arctan(jRC\omega))}.$$

On peut alors écrire l'expression de la tension comme la partie réelle de la tension complexe, soit

$$u_C(t) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \cos(\omega t - \arctan(jRC\omega)).$$

1.4. Application au circuit RLC, étude en intensité

1.4.a Calcul de la réponse sinusoïdale

Appliquons la méthode complexe au cas du circuit RLC. Étudions particulièrement la tension aux bornes du résistor, ce qui revient à étudier l'intensité du courant i dans le circuit à un facteur R près, c'est pour cela qu'on appelle ce travail **étude en intensité**.

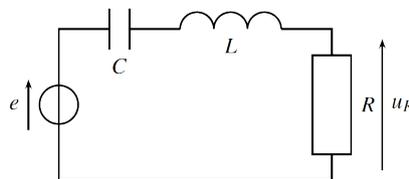


FIGURE 1.4 – Circuit RLC étude en intensité

On peut obtenir la tension complexe aux bornes du résistor \underline{u}_R en utilisant un pont diviseur de tension impliquant les impédances complexes

$$\underline{u}_R = e \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R}$$

$$\underline{u}_R = e \frac{R}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R}$$

en divisant le numérateur et le dénominateur par R

$$\underline{u}_R = e \frac{1}{1 + j\left(\omega \frac{L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)}$$

Nous avons déjà étudié le circuit RLC, nous avons mis en évidence que la pulsation propre du circuit ω_0 et son facteur de qualité Q étaient

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On peut faire apparaître ces grandeurs dans le terme de droite du dénominateur de l'expression précédente

$$\underline{u}_R = e \frac{1}{1 + j\left(\omega \frac{\sqrt{L}\sqrt{L}\sqrt{C}}{R\sqrt{C}} - \frac{\sqrt{L}}{\omega R\sqrt{C}\sqrt{C}\sqrt{L}}\right)}$$

$$\underline{u}_R = e \frac{1}{1 + j\left(Q \frac{\omega}{\omega_0} - Q \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\underline{u}_R = e \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

1.4.b Étude de l'amplitude

L'amplitude de la réponse en intensité du circuit RLC série $U_{R,0}$ en régime permanent ou régime sinusoïdal est donc

$$U_{R,0} = \left| e \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \right|$$

$$U_{R,0} = |e| \frac{1}{\left| 1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \right|}$$

$$U_{R,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

Étudions la valeur de l'amplitude de la réponse en intensité du circuit RLC série $U_{R,0}$ pour une valeur de l'amplitude de l'excitation E_0 fixée, et différentes valeur de la pulsation de l'excitation ω .

- Pour une pulsation excitatrice très petite devant la pulsation propre, soit $\omega \ll \omega_0$, l'amplitude de sortie tend vers

$$U_{R,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \rightarrow E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} \rightarrow E_0 \frac{1}{Q \frac{\omega_0}{\omega}} \rightarrow E_0 \frac{\omega}{Q \omega_0}$$

donc

$$U_{R,0} \rightarrow 0.$$

À basses fréquences, la réponse en intensité du circuit RLC série est nul : l'intensité du courant est nul. C'est ce qu'on avait constaté au premier semestre : **pour une tension d'entrée continue ($\omega = 0$), en régime permanent l'intensité du courant dans le circuit est nul.**

- Pour une pulsation excitatrice égale à la pulsation propre du circuit, soit $\omega = \omega_0$, l'amplitude de sortie tend vers

$$U_{R,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = E_0.$$

Dans ce cas, on voit que la réponse en intensité du circuit a la même amplitude que l'excitation ou signal d'entrée.

- Pour une pulsation excitatrice très grande devant la pulsation propre, soit $\omega \gg \omega_0$, l'amplitude de sortie tend vers

$$U_{R,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \rightarrow E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \rightarrow E_0 \frac{1}{Q \frac{\omega}{\omega_0}} \rightarrow E_0 \frac{\omega_0}{Q \omega}$$

donc

$$U_{R,0} \rightarrow 0.$$

À hautes fréquences, la réponse en intensité du circuit RLC série est nul : l'intensité du courant est nul.

Si on effectue l'étude de l'amplitude de la réponse en intensité $U_{R,0}$ du circuit RLC série en fonction de la pulsation du signal d'entrée, on peut montrer qu'elle est nulle pour $\omega = 0$, puis qu'elle passe par un maximum pour $\omega = \omega_0$, puis diminue jusqu'à s'annuler pour $\omega \rightarrow \infty$.

Comme on le voit sur la Figure 1.5, on voit apparaître un maximum de l'amplitude de la réponse en intensité pour n'importe quelle valeur du facteur de qualité Q (ou du facteur d'amortissement ξ).

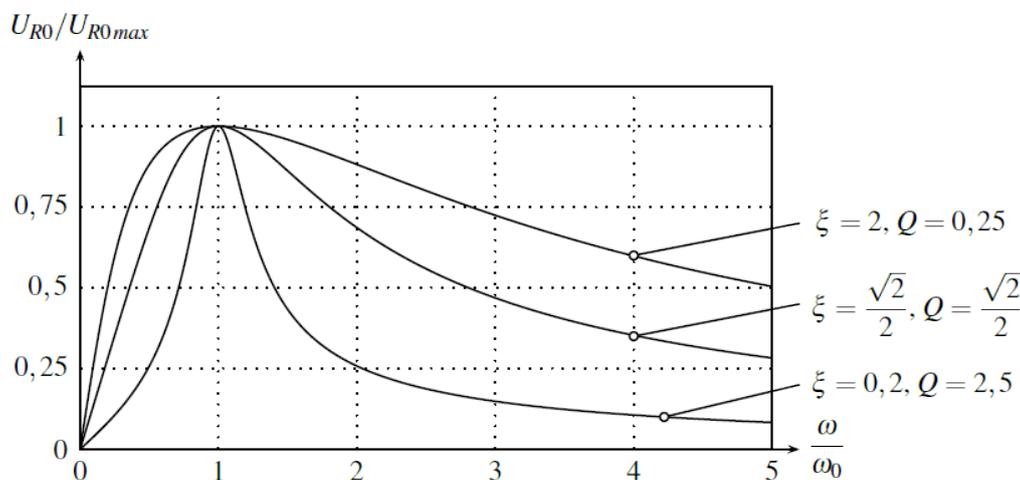


FIGURE 1.5 – Variation de l'amplitude de la réponse en intensité $U_{R,0}$ du circuit RLC série en fonction du rapport de la pulsation excitatrice variable ω et de la pulsation propre du circuit RLC série ω_0 .

♥ Définition

On dit qu'une **résonance** apparaît lorsque l'amplitude de la réponse sinusoïdale d'un système à une excitation sinusoïdale, d'amplitude fixe mais de fréquence variable, passe par un maximum pour une valeur f_r de la fréquence ; f_r est appelée **fréquence de résonance**.

La pulsation de résonance ω_r est la pulsation associée à la fréquence de résonance f_r .

On constate donc que lorsque la pulsation de l'excitation ω est égale à la pulsation propre du circuit RLC série, l'amplitude de la réponse en intensité est maximale : **on dit qu'il y a résonance en intensité.**

La pulsation de l'excitation, ou pulsation d'entrée, provoquant une résonance est notée ω_r . **Dans le cas de la réponse en intensité, la pulsation de résonance est égale à la pulsation propre du circuit RLC série**

$$\omega_r = \omega_0.$$

♥ Définition

On définit la **largeur de la courbe de résonance**, notée $\Delta\omega$ comme la largeur entre les deux pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles l'amplitude est égale à l'amplitude maximale divisée par $\sqrt{2}$.

Dans le cas de la résonance en intensité du circuit RLC, si on cherche les valeurs de ω_1 et ω_2 , il vient que

$$U_{R,0}(\omega_{1,2}) = \frac{U_{R,0,max}}{\sqrt{2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

$$U_{R,0}(\omega_{1,2}) = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$$

ainsi

$$1 + Q^2 \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2 = 2$$

$$Q^2 \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right)^2 = 1$$

$$Q \left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \right) = \pm 1$$

$$\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} = \pm \frac{1}{Q}$$

$$\omega_{1,2}^2 \frac{1}{\omega_0} \mp \omega_{1,2} \frac{1}{Q} - \omega_0 = 0.$$

Les deux solutions positives de cette équation du deuxième ordre sont

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2} \left(\pm \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right).$$

Ainsi, la différence entre ω_1 et ω_2 , soit la largeur de la courbe de résonance, est

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2} \left(\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) - \frac{\omega_0}{2} \left(-\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) = \frac{\omega_0}{Q}.$$

On voit apparaître **une relation simple entre la pulsation propre ω_0 et la largeur de la courbe de résonance en intensité**

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

Nota bene

À partir de la relation précédente et de la courbe de résonance en intensité, **et seulement en intensité**, on peut obtenir la valeur du facteur de qualité Q en mesurant la pulsation propre ω_0 du système, qui correspond dans ce cas à la pulsation de résonance ω_r , donc la pulsation du maximum de la courbe ; et en mesurant la largeur de la courbe à la résonance.

La relation précédente implique que plus le facteur de qualité Q est important, et plus la largeur de la résonance est étroite : on dit que **l'acuité de la résonance est forte**. Inversement, plus le facteur de qualité Q est faible, plus la largeur de la résonance est importante : **l'acuité de la résonance est faible**.

1.4.c Étude du déphasage

La phase de la réponse en intensité du circuit RLC série en régime permanent ou régime sinusoïdal est donc

$$\arg\left(\frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \arg(\underline{e}) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\arg\left(\frac{\underline{e}}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\right) = \omega t - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).$$

Le déphasage φ , soit la différence entre la phase de la réponse en intensité du circuit RLC série et la phase de l'excitation est donc

$$\varphi = \left(\omega t - \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)\right) - \omega t$$

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right).$$

Étudions la valeur du déphasage de la réponse en intensité du circuit RLC série φ pour différentes valeurs de la pulsation de l'excitation ω .

- Pour une pulsation excitatrice très petite devant la pulsation propre, soit $\omega \ll \omega_0$, l'argument de la fonction arctangente

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \rightarrow -Q\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow -\infty.$$

La fonction arctangente étant une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$), il vient que

$$\varphi = -\arctan\left(-Q\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \arctan\left(Q\frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

À l'aide du cercle trigonométrique, cherchons l'angle $\varphi = \arctan\left(Q\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ pour lequel $\tan \varphi \rightarrow \infty$

$$\tan \varphi = \tan\left(\arctan\left(Q\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = Q\frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow \infty.$$

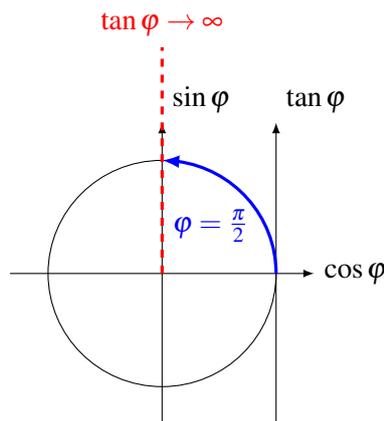


FIGURE 1.6 – Cercle trigonométrique

On constate que lorsque $\tan \varphi \rightarrow \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ainsi, à basses fréquences, soit $\omega \ll \omega_0$, la réponse en intensité du circuit RLC série $u_R(t)$ a un déphasage $\varphi = \frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée $e(t)$. La réponse est en avance de phase, et les deux signaux $u_R(t)$ et $e(t)$ sont en quadrature de phase.

- À la résonance en intensité, soit $\omega = \omega_r = \omega_0$, l'argument de la fonction arctangente est

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 0.$$

La fonction arctangente étant une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$), il vient que

$$\varphi = -\arctan(0) = \arctan(0).$$

À l'aide du cercle trigonométrique, cherchons l'angle $\varphi = \arctan(0)$ pour lequel $\tan \varphi = 0$.

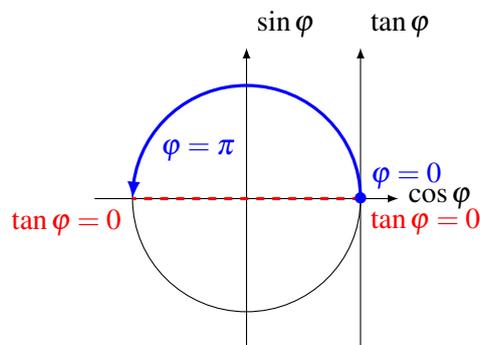


FIGURE 1.7 – Cercle trigonométrique

On constate qu'il y a deux valeurs possible pour φ lorsque $\tan \varphi = 0$

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi.$$

Pour savoir quelle elle est la bonne valeur, il faut étudier la variation du déphasage φ en fonction de la pulsation ω .

Si φ est une fonction croissante de ω , alors la bonne valeur est $\varphi = \pi$: quand ω augmente, φ augmente, or on a montré que pour $\omega \ll \omega_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, donc il faut pour $\omega = \omega_0$ que $\varphi > \frac{\pi}{2}$.

Inversment, si φ est une fonction décroissante de ω , alors la bonne valeur est $\varphi = 0$: quand ω augmente, φ diminue, or on a montré que pour $\omega \ll \omega_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, donc il faut pour $\omega = \omega_0$ que $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Étudions la fonction $\tan \varphi$ en fonction ω

$$\frac{d \tan \varphi}{d \omega} = \frac{d}{d \omega} \left(-Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = -Q \frac{d}{d \omega} \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) = -Q \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right).$$

Cette dérivée peut s'exprimer en fonction de $d\varphi/d\omega$, dérivée qui nous intéresse

$$\frac{d \tan \varphi}{d \omega} = \frac{d \tan \varphi}{d \varphi} \frac{d \varphi}{d \omega} = \frac{d \varphi}{d \omega} \frac{d}{d \varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{d \varphi}{d \omega} \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Ainsi

$$\frac{d \varphi}{d \omega} = \cos^2 \varphi \frac{d \tan \varphi}{d \omega} = -\cos^2 \varphi Q \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{\omega^2} \right).$$

On constate que la dérivée est toujours négative ($\omega_0 > 0$, $\omega > 0$ et $Q > 0$) donc lorsque ω augmente, φ diminue également. À partir du cercle trigonométrique, on peut déduire que lorsque ω augmente de $\omega \ll \omega_0$ à $\omega = \omega_0$, φ diminue de $\frac{\pi}{2}$ à 0.

À la résonance le déphasage entre la réponse en intensité du système et l'excitation est nulle : les deux signaux évoluent en phase.

- Pour une pulsation excitatrice très grande devant la pulsation propre, soit $\omega \gg \omega_0$, l'argument de la fonction arctangente

$$Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \rightarrow Q \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow \infty.$$

La fonction arctangente étant une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$), il vient que

$$\varphi = -\arctan \left(Q \frac{\omega}{\omega_0} \right) = \arctan \left(-Q \frac{\omega}{\omega_0} \right).$$

À l'aide du cercle trigonométrique, cherchons l'angle $\varphi = \arctan \left(-Q \frac{\omega}{\omega_0} \right)$ pour lequel $\tan \varphi \rightarrow -\infty$

$$\tan \varphi = \tan \left(-\arctan \left(Q \frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) = -Q \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow -\infty.$$

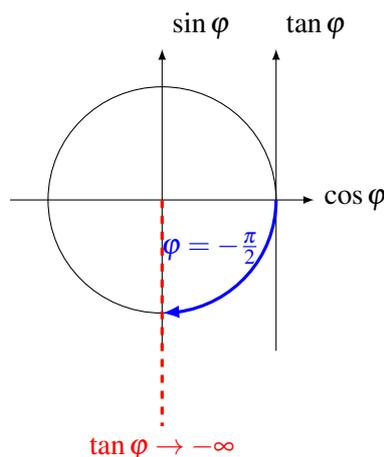


FIGURE 1.8 – Cercle trigonométrique

On constate que lorsque $\tan \varphi \rightarrow -\infty$, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, ainsi, à hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$, la réponse en intensité du circuit RLC série $u_R(t)$ a un déphasage $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ par rapport au signal d'entrée $e(t)$. La réponse est en retard de phase, et les deux signaux $u_R(t)$ et $e(t)$ sont en quadrature de phase.

A partir de cette étude, on peut tracer la variation du déphasage φ entre la réponse en intensité $u_R(t)$ du circuit RLC série et de l'excitation $e(t)$. Plus le facteur de qualité Q est important (et réciproquement plus le facteur d'amortissement ξ est faible) et plus la variation du déphasage est abrupte.

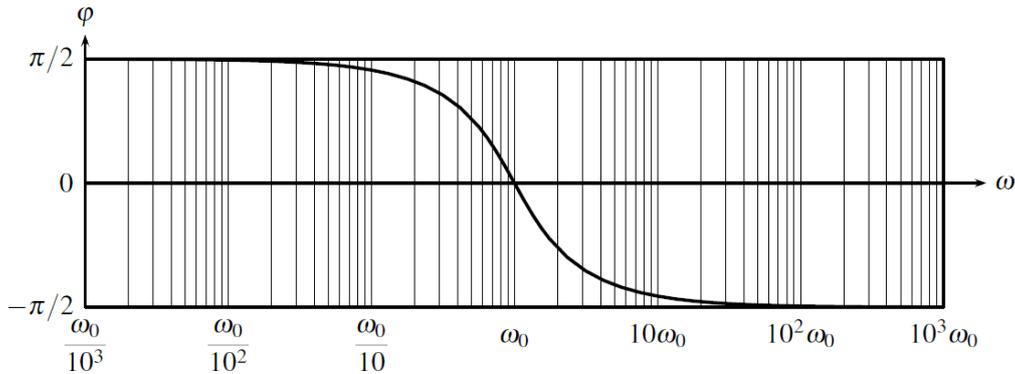


FIGURE 1.9 – Variation du déphasage φ entre la réponse en intensité $u_R(t)$ du circuit RLC série et de l'excitation $e(t)$ en fonction de la pulsation excitatrice variable ω .

1.5. Application au circuit RLC, étude en charge

1.5.a Calcul de la réponse sinusoïdale

On peut mener une étude similaire à celle effectuée précédemment mais cette fois en étudiant la tension aux bornes du condensateur u_C du circuit RLC série. Comme $u_C = \frac{q}{C}$ on dit aussi que l'on mène l'étude en charge du circuit RLC série.

On peut obtenir la tension complexe aux bornes du condensateur \underline{u}_C en utilisant un pont diviseur de tension impliquant les impédances complexes

$$\underline{u}_C = e \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R}$$

$$\underline{u}_C = e \frac{\frac{1}{j\omega C}}{\frac{1}{j\omega C} + j\omega L + R}$$

en multipliant par $j\omega C$ le numérateur et le dénominateur

$$\underline{u}_C = e \frac{1}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC}$$

On peut faire apparaître la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q dans le dénominateur de l'expression précédente

$$\underline{u}_C = e \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\omega R \frac{\sqrt{C}\sqrt{C}\sqrt{L}}{\sqrt{L}}}$$

$$\underline{u}_C = e \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

1.5.b Étude de l'amplitude

L'amplitude de la réponse en charge du circuit RLC série $U_{C,0}$ en régime permanent ou régime sinusoïdal est donc

$$U_{C,0} = \left| e \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}} \right|$$

$$U_{C,0} = |e| \frac{1}{\left| 1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right|}$$

$$U_{C,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

Étudions la valeur de l'amplitude de la réponse en charge du circuit RLC série $U_{C,0}$ pour une valeur de l'amplitude de l'excitation E_0 fixée, et différentes valeur de la pulsation de l'excitation ω .

On peut étudier la variation du carré du dénominateur de l'expression précédente pour en déduire la variation de l'amplitude de la réponse en charge du condensateur : si ce terme admet un minimum, alors l'amplitude admet un maximum. Ainsi

$$\frac{d}{d\omega} \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \right) = -4 \frac{\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{2}{Q^2} \frac{\omega}{\omega_0^2}$$

Le dénominateur admet donc un extremum si

$$-4 \frac{\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{2}{Q^2} \frac{\omega}{\omega_0^2} = 0$$

soit

$$-2 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 = \frac{1}{2Q^2}$$

donc

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Cette valeur de ω qui correspond a un extremum de l'amplitude $U_{C,0}$ n'existe que si

$$1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$$

donc

$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Pour savoir si l'extremum du carré du dénominateur correspond à un minimum ou à un maximum il faut étudier sa dérivée à l'ordre deux : si elle est négative ou positive pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$, alors l'extremum est respectivement un maximum ou un minimum. Ainsi

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = \frac{d}{d\omega} \left(-4 \frac{\omega}{\omega_0^2} \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) + \frac{2}{Q^2} \frac{\omega}{\omega_0^2} \right) = -4 \frac{1}{\omega_0^2} + 12 \frac{\omega^2}{\omega_0^4} + \frac{2}{Q^2} \frac{1}{\omega_0^2}$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) = \frac{2}{\omega_0^2} \left(-2 + \frac{1}{Q^2} + 6 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)$$

et pour $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)_{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} = \frac{2}{\omega_0^2} \left(-2 + \frac{1}{Q^2} + 6 - \frac{6}{2Q^2} \right)$$

$$\frac{d^2}{d\omega^2} \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)_{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} = \frac{8}{\omega_0^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right) = 8 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} > 0.$$

Le dénominateur de l'amplitude de la réponse en charge admet donc un minimum, car sa dérivée à l'ordre 2 par rapport à ω est positive. **L'amplitude de la réponse en charge admet donc un maximum si le facteur de qualité respecte la condition $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.**

Dans ce cas, il y a **résonance en charge**, c'est-à-dire que la valeur de l'amplitude de la réponse en charge est maximale lorsque la pulsation excitatrice ω est égale à la pulsation de résonance en charge ω_r telle que

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

La valeur de l'amplitude est alors

$$U_{C,0,max} = E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega_r}{\omega_0} \right)^2}} = E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2} \right)}}$$

$$U_{C,0,max} = E_0 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} = E_0 \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}.$$

Pour **les basses fréquences**, soit $\omega \ll \omega_0$, l'amplitude de la réponse en charge devient

$$U_{C,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}} \rightarrow E_0.$$

On retrouve le comportement du condensateur en régime permanent lorsque la tension aux bornes du circuit est continue, soit $\omega = 0$: il se comporte comme un interrupteur ouvert, la tension à ses bornes est égale à la tension aux bornes du circuit. On retient que **le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime permanent aux basses fréquences.**

Pour les hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$, l'amplitude de la réponse en charge devient

$$U_{C,0} = E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \rightarrow E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4 + \left(\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \rightarrow E_0 \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}} \rightarrow E_0 \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \rightarrow 0.$$

On constate que le condensateur en régime permanent aux hautes fréquences se comporte comme un interrupteur fermé : la tension à ses bornes est nulle.

La variation de l'amplitude en charge du circuit RLC série est présentée Figure 1.10. On peut voir que pour un facteur de qualité $Q \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$, il n'y a pas de maximum de l'amplitude donc pas de résonance.

De plus, pour un facteur de qualité très important $Q \rightarrow \infty$, il vient que

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \rightarrow \omega_0$$

la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du système, et

$$U_{C,0,max} = E_0 \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}} \rightarrow E_0 Q.$$

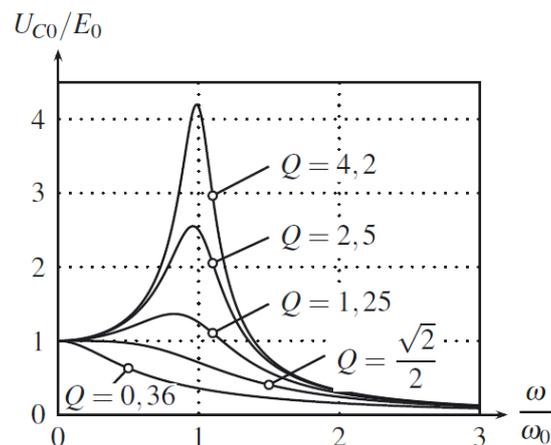


FIGURE 1.10 – Variation de l'amplitude de la réponse en charge $U_{C,0}$ du circuit RLC série en fonction du rapport de la pulsation excitatrice variable ω et de la pulsation propre du circuit RLC série ω_0 .

1.5.c Étude du déphasage

La phase de la réponse en charge du circuit RLC série en régime permanent ou régime sinusoïdal est donc

$$\arg\left(\frac{e}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \arg(e) - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}\right) = \omega t - \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right).$$

Le déphasage φ , soit la différence entre la phase de la réponse en intensité du circuit RLC série et la phase de l'excitation est donc

$$\varphi = \omega t - \arctan\left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right) - \omega t$$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right).$$

Étudions la valeur du déphasage de la réponse en charge du circuit RLC série φ pour différentes valeur de la pulsation de l'excitation ω .

- Pour une pulsation excitatrice très petite devant la pulsation propre, soit $\omega \ll \omega_0$, l'argument de la fonction arctangente

$$\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \rightarrow \frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0.$$

La fonction arctangente étant une fonction impaire ($f(-x) = -f(x)$), il vient que

$$\varphi = -\arctan(0) = \arctan(0).$$

À l'aide du cercle trigonométrique, cherchons l'angle $\varphi = \arctan(0)$ pour lequel $\tan \varphi = 0$.

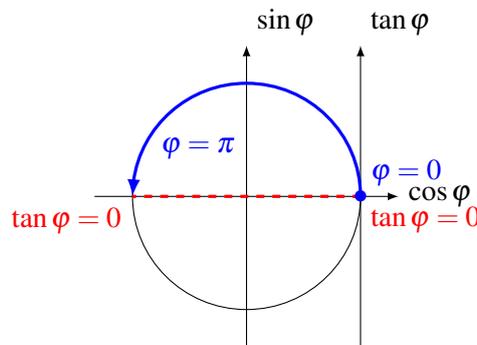


FIGURE 1.11 – Cercle trigonométrique

On constate qu'il y a deux valeurs possible pour φ lorsque $\tan \varphi = 0$

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi.$$

Pour savoir quelle elle est la bonne valeur, il faut étudier la variation du déphasage φ en fonction de la pulsation ω .

Si φ est une fonction croissante de ω , alors la bonne valeur est $\varphi = \pi$: quand ω augmente, φ augmente, or on a montré que pour $\omega \ll \omega_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, donc il faut pour $\omega = \omega_0$ que $\varphi > \frac{\pi}{2}$.

Inversment, si φ est une fonction décroissante de ω , alors la bonne valeur est $\varphi = 0$: quand ω augmente, φ diminue, or on a montré que pour $\omega \ll \omega_0$ $\varphi = \frac{\pi}{2}$, donc il faut pour $\omega = \omega_0$ que $\varphi < \frac{\pi}{2}$.

Étudions la fonction $\tan \varphi$ en fonction ω

$$\tan \varphi = \tan\left(-\arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)\right) = \tan\left(\arctan\left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}\right)\right) = \frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1}$$

$$\frac{d \tan \varphi}{d \omega} = \frac{d}{d \omega} \left(\frac{\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \right) = \frac{\frac{1}{Q}\frac{1}{\omega_0} \left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 \right) - \frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0} \frac{2\omega}{\omega_0^2}}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 \right)^2} = \frac{1}{Q} \frac{\frac{\omega^2}{\omega_0^3} - \frac{1}{\omega_0} - \frac{2\omega^2}{\omega_0^3}}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 \right)^2} = -\frac{1}{Q} \frac{\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^3}}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 \right)^2}.$$

Cette dérivée peut s'exprimer en fonction de $d\varphi/d\omega$, dérivée qui nous intéresse

$$\frac{d \tan \varphi}{d\omega} = \frac{d \tan \varphi}{d\varphi} \frac{d\varphi}{d\omega} = \frac{d\varphi}{d\omega} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right) = \frac{d\varphi}{d\omega} \frac{1}{\cos^2 \varphi}.$$

Ainsi

$$\frac{d\varphi}{d\omega} = \cos^2 \varphi \frac{d \tan \varphi}{d\omega} = -\cos^2 \varphi \frac{1}{Q} \frac{\frac{1}{\omega_0} + \frac{\omega^2}{\omega_0^3}}{\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1 \right)^2}.$$

On constate que la dérivée est toujours négative ($\omega_0 > 0$, $\omega > 0$ et $Q > 0$) donc lorsque ω augmente, φ diminue également. On pourra déduire, à partir du cercle trigonométrique, la valeur de φ pour $\omega \ll \omega_0$ selon la valeur de φ pour $\omega = \omega_0$.

- Pour $\omega = \omega_0$, on s'intéresse à l'argument de la fonction arctangente telle que

$$\arctan \left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \right) = \varphi.$$

Dans ce cas

$$\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \rightarrow \infty.$$

À l'aide du cercle trigonométrique, cherchons l'angle $\varphi = \arctan \left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \right)$ pour lequel $\tan \varphi \rightarrow \infty$

$$\tan \varphi = \tan \left(\arctan \left(\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \right) \right) = \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 - 1} \rightarrow \infty.$$

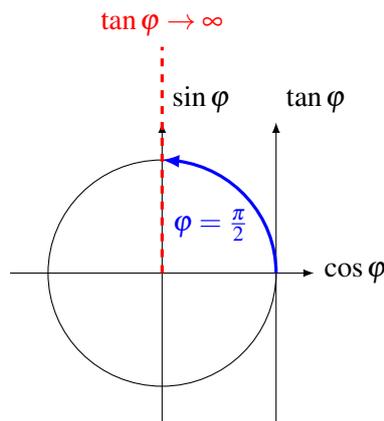


FIGURE 1.12 – Cercle trigonométrique

On constate que lorsque la pulsation excitatrice est égale à la pulsation du propre du système, $\omega = \omega_0$, il vient que $\tan \varphi \rightarrow \infty$, donc la déphasage est tel $\varphi = \frac{\pi}{2}$: **pour $\omega = \omega_0$ la réponse en charge est avancée par rapport à l'excitation, et les deux signaux ont en quadrature de phase.**

À partir de cette valeur du déphasage φ pour $\omega = \omega_0$, on peut en déduire la valeur du déphasage à basses fréquences, soit pour $\omega \ll \omega_0$: le déphasage φ étant une fonction décroissante de la pulsation ω , le déphasage à basse fréquence doit être supérieur au déphasage pour $\omega = \omega_0$. Donc le déphasage φ à basses fréquences est $\varphi = \pi$: **à basses fréquences la réponse en charge est avancée par rapport à l'excitation, et les deux signaux sont en opposition de phase.**

- À hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$, l'argument de la fonction arctangente

$$\frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \rightarrow \frac{\frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} = \frac{1}{Q} \frac{\omega_0}{\omega} \rightarrow 0.$$

À l'aide du cercle trigonométrique, cherchons l'angle $\varphi = \arctan(0)$ pour lequel $\tan \varphi = 0$.

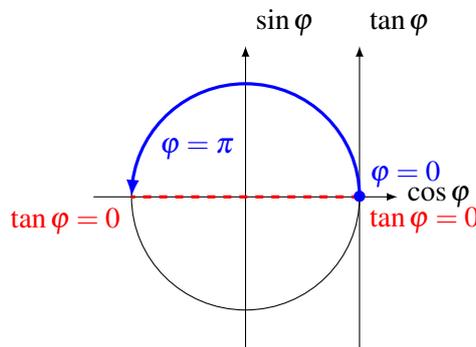


FIGURE 1.13 – Cercle trigonométrique

On constate qu'il y a deux valeurs possible pour φ lorsque $\tan \varphi = 0$

$$\varphi = 0 \quad \text{ou} \quad \varphi = \pi.$$

Nous avons montré que le déphasage φ est une fonction décroissante par rapport à ω , donc à hautes fréquences le déphase est $\varphi = 0$: **à hautes fréquences la réponse en charge u_R est en phase avec l'excitation e .**

A partir de cette étude, on peut tracer la variation du déphasage φ entre la réponse en charge $u_C(t)$ du circuit RLC série et de l'excitation $e(t)$. Plus le facteur de qualité Q est important (et réciproquement plus le facteur d'amortissement ξ est faible) et plus la variation du déphasage est abrupte.

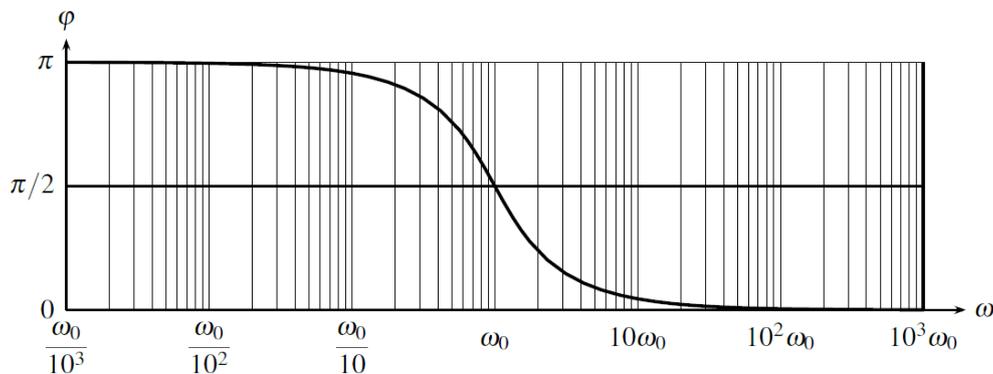


FIGURE 1.14 – Variation du déphasage φ entre la réponse en charge $u_C(t)$ du circuit RLC série et de l'excitation $e(t)$ en fonction de la pulsation excitatrice variable ω .

Synthèse

Connaissances

- Signal sinusoïdal ; description du comportement d'un dipôle en régime sinusoïdal forcé.
- Impédances complexes ; cas d'une résistance, d'un condensateur et d'une bobine.
- Association de deux impédances.
- Oscillateurs électriques soumis à une excitation sinusoïdale ; résonance.

Savoir-faire

- **Établir** l'expression de l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- **Remplacer** une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- **Utiliser** la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
- **Relier** l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- **Déterminer** la pulsation propre et le facteur de qualité d'un système à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.