Travaux dirigés

Chapitre 1 - Signal sinusoïdal et filtrage

TD I. Régime sinusoïdal forcé et résonance

Exercice I.1. Notation complexe ★

Écrire sous forme complexe les équations différntielles suivantes.

1.
$$\tau\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+u(t)=E_0.$$

On peut associer à une fonction sinusoïdale réelle $f(t)=F_0\cos(\omega t+\varphi)$ une fonction complexe $\underline{f}(t)$ telle que
$$\underline{f}(t)=F_0e^{j(\omega t+\varphi)}=F_0\cos(\omega t+\varphi)+jF_0\sin(\omega t+\varphi).$$
On constate que la fonction réelle correspond à la partie réelle de la fonction complexe.
Ainsi si on considère que la fonction $u(t)$ est sinusoïdale, on peut lui associer une fonction complexe $\underline{u}(t)$ telle que
$$\underline{u}(t)=U_0e^{j(\omega t+\varphi)}$$
la dérivée temporelle est
$$\frac{\mathrm{d}\underline{u}(t)}{\mathrm{d}t}=U_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{j(\omega t+\varphi)}\right)$$
donc
$$\frac{\mathrm{d}\underline{u}(t)}{\mathrm{d}t}=j\omega U_0e^{j(\omega t+\varphi)}=j\omega\underline{u}(t).$$
Ainsi, dériver temporellement une fonction sinusoïdale complexe revient à multiplier par $j\omega$. Il vient donc que
$$\tau\frac{\mathrm{d}\underline{u}(t)}{\mathrm{d}t}+\underline{u}(t)=E_0$$
revient à
$$j\omega\tau\underline{u}(t)+\underline{u}(t)=E_0$$
$$\underline{u}(t)(1+j\omega\tau)=E_0$$
donc
$$\boxed{\underline{u}(t)=\frac{E_0}{1+j\omega\tau}.}$$

2.
$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+u(t)=e(t).$$

En utilisant le travail de la question précédente il vient que
$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{u}(t)}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\underline{u}(t)}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(j\omega\underline{u}(t))=j\omega\frac{\mathrm{d}\underline{u}(t)}{\mathrm{d}t}=(j\omega)^2\underline{u}(t)$$
la dérivée d'ordre n d'un fonction complexe sinusoïdale revient à multiplier cette fonction par $(j\omega)^n$, ainsi on peut associer l'équation réelle
$$\frac{1}{\omega_0^2}\frac{\mathrm{d}^2u(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{2\xi}{\omega_0}\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}+u(t)=e(t)$$

à l'équation complexe

$$(j\omega)^2 \frac{1}{\omega_0^2}\underline{u}(t) + j\omega\frac{2\xi}{\omega_0}\underline{u}(t) + \underline{u}(t) = \underline{e}(t)$$

soit

$$\underline{u}(t)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \underline{e}(t)$$

$$\boxed{\underline{u}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j2\xi\frac{\omega}{\omega_0}}.}$$

Exercice I.2. Impédance ★

1. **Écrire** les impédances complexes d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.

$$\underline{Z}_R = R \qquad ; \qquad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} \qquad ; \qquad \underline{Z}_L = jL\omega.$$

2. **Déterminer** l'unité d'une impédance.
On constate que la résistance d'un résistor correspond à une impédance donc l'impédance à la même unité qu'une résistance, soit l'ohm noté Ω.
3. **Déterminer** l'impédance totale de deux impédance $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en série.

$$\underline{Z}_{tot} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.$$

4. **Déterminer** l'impédance totale de deux impédance $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en parallèle.

$$\underline{Z}_{tot} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}.$$

Exercice I.3. Circuit RLC ★

On étudie un circuit RLC série dans les bornes sont branchés à un générateur de tension idéal délivrant une tension $e(t)$.

1. **Établir** l'impédance du circuit.

$$\underline{Z}_{tot} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

$$\underline{Z}_{tot} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + jL\omega - j\frac{1}{C\omega} = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right).$$

2. **Établir** $\underline{u}_R(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$.
Un pont diviseur de tension sur le circuit RLC série donne

$$\underline{u}_R(t) = \underline{e}(t)\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_{tot}} = \underline{e}(t)\frac{R}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \underline{e}(t)\frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

3. **Établir** l'expression de l'amplitude U_{R0} de $u_R(t)$. **Déterminer** pour quelle pulsation cette amplitude est maximale.
   U_{R0} correspond à la norme de $\underline{u}_R(t)$ soit

$$U_{R0} = |\underline{u}_R(t)| = \left| \underline{e}(t) \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)} \right| = |\underline{e}(t)| \frac{1}{\left|1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right|} = E_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}.$$

   L'amplitude U_{R0} est maximale lorsque le dénominateur de l'expression précédente est minimal, soit lorsque

$$\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)^2 = 0$$

   donc

$$\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega} = 0$$

$$\frac{L}{R}\omega = \frac{1}{RC\omega} \qquad \text{soit} \qquad \omega^2 = \frac{R}{RLC} \qquad \text{soit} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

4. **Établir** l'expression du déphasage φ entre $u_R(t)$ et $e(t)$.
   Le déphasage φ entre $u_R(t)$ et $e(t)$ est défini tel que

$$\varphi = \arg\left(\underline{e}(t)\right) - \arg\left(\underline{u}(t)\right)$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{e}(t)\right) - \arg\left(\underline{e}(t) \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}\right)$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{e}(t)\right) - \left(\arg\left(\underline{e}(t)\right) - \arg\left(1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right)\right)$$

$$\varphi = \arg\left(1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)\right) = \arctan\left(\frac{\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}}{1}\right)$$

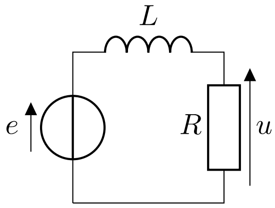
$$\varphi = \arctan\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right).$$

5. **Établir** $\underline{u}_C(t)$ en fonction de $\underline{e}(t)$.
   Voir cours.
6. **Établir** l'expression de l'amplitude U_{C0} de $u_C(t)$. **Déterminer** pour quelle pulsation cette amplitude est maximale et pour quelle condition sur Q le maximum existe.
   Voir cours.

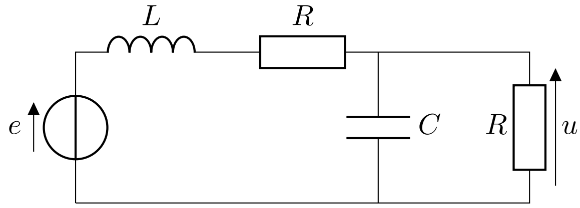
Exercice I.4. Comportement à hautes à hautes et basses fréquences ★ ★

Les générateurs des circuits ci-dessous délivrent la tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Déterminer pour les deux circuits la tension u en hautes et basses fréquences.



(a) Circuit A



(b) Circuit B

Figure 1.1 – Schémas des circuits électriques

Pour le circuit A, on peut utiliser la méthode complexe pour obtenir l'expression de $\underline{u}$ en utilisant le diviseur de tension, soit

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{R + jL\omega} = \underline{e}(t)\frac{1}{1 + j\frac{L}{R}\omega}$$

on reconnaît la pulsation propre $\omega_0 = \frac{R}{L}$ du circuit, soit

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}.$$

Pour les basses fréquences, soit $\omega \ll \omega_0$ il vient que

$$\frac{\omega}{\omega_0} \ll 1 \qquad \text{donc} \qquad 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \approx 1$$

donc

$$\underline{u}(t) \approx \underline{e}(t).$$

À basses fréquences la tension u est égale à la tension e : la bobine se comporte comme un fil ou un interrupteur fermé.

Pour les hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$ il vient que

$$\frac{\omega}{\omega_0} \gg 1 \qquad \text{donc} \qquad 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \approx j\frac{\omega}{\omega_0}$$

donc

$$\underline{u}(t) \approx \underline{e}(t)\frac{\omega_0}{j\omega}$$

or

$$u(t) = \mathrm{Re}\{\underline{u}(t)\} = 0.$$

À hautes fréquences la tension u est nulle : la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert.

Pour le circuit B, on peut utiliser la méthode complexe pour obtenir l'expression de $\underline{u}$ en utilisant le diviseur de tension, mais avant cela il faut déterminer l'impédance équivalente à l'impédance du condensateur et du résistor en parallèle, soit

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$

En utilisant le diviseur de tension il vient que

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R}$$

$$\underline{u}(t)=\underline{e}(t)\frac{R}{1+jRC\omega}\frac{1}{\frac{R}{1+jRC\omega}+jL\omega+R}=\underline{e}(t)\frac{R}{1+jRC\omega}\frac{1}{\frac{R+(jL\omega+R)(1+jRC\omega)}{1+jRC\omega}}$$

$$\underline{u}(t)=\underline{e}(t)\frac{R}{1+jRC\omega}\frac{1+jRC\omega}{R+jL\omega-RLC\omega^2+R+jR^2C\omega}=\underline{e}(t)\frac{R}{2R-RLC\omega^2+j\omega\left(L+R^2C\right)}$$

$$\underline{u}(t)=\underline{e}(t)\frac{1}{2-LC\omega^2+j\omega\left(\frac{L}{R}+RC\right)}$$

on reconnaît la pulsation propre $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ du circuit et le facteur de qualité $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\underline{u}(t)=\underline{e}(t)\frac{1}{2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\omega\left(\frac{\sqrt{L}\sqrt{LC}}{R\sqrt{C}}+\frac{R\sqrt{C}\sqrt{LC}}{\sqrt{L}}\right)}$$

$$\underline{u}(t)=\underline{e}(t)\frac{1}{2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\omega\left(Q\frac{1}{\omega_0}+\frac{1}{Q\omega_0}\right)}=\underline{e}(t)\frac{1}{2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{\omega_0}\left(Q+\frac{1}{Q}\right)}$$

Pour les basses fréquences, soit $\omega\ll\omega_0$ il vient que

$$\frac{\omega}{\omega_0}\ll 1\qquad\text{donc}\qquad 2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{\omega_0}\left(Q+\frac{1}{Q}\right)\approx 2$$

donc

$$\underline{u}(t)\approx\frac{1}{2}\underline{e}(t).$$

À basses fréquences la tension u est égale à la tension $\frac{1}{2}e$: la bobine se comporte comme un fil ou un interrupteur fermé et le condensateur comme un interrupteur ouvert, le circuit est équivalent à un circuit avec deux résistors de résistance R en série.

Pour les hautes fréquences, soit $\omega\gg\omega_0$ il vient que

$$\frac{\omega}{\omega_0}\gg 1\qquad\text{donc}\qquad 2-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{\omega_0}\left(Q+\frac{1}{Q}\right)\approx-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

car c'est le terme avec la puissance la plus grande qui prédomine lorsque ce terme est très grand devant 1, ainsi

$$\underline{u}(t)\approx\underline{e}(t)-\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\approx 0.$$

À hautes fréquences la tension u est nulle : la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert et le condensateur comme un fil ou interrupteur fermé. La bobine empêche la circulation du courant, et, en plus, la tension aux bornes du condensateur étant nul (court-cicuit), la tension u est aussi nulle.

Exercice I.5. Résonance en intensité ★ ★

Un circuit RLC série est alimenté par une source idéal de tension sinusoïdale de tension sinusoïdale, de f.é.m $e(t)=E_0\cos(\omega t)$, avec $E_0=2{,}5$ V.

La figure ci-dessus représente la courbe de résonance en intensité obtenue expérimentalement avec I_0 l'amplitude de l'intensité du courant.

En exploitant cette courbe, **déterminer** les valeurs de la résisantce R, de la capacité C et de l'inductance L utilisées.

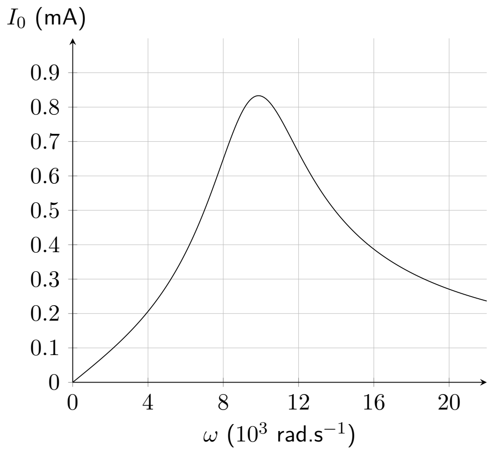


Figure 1.2 – Amplitude de l'intensité I_0 en fonction de la pulsation.

Un circuit RLC série est alimenté par une source idéal de tension sinusoïdale de tension sinusoïdale, de f.é.m $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$, avec $E_0 = 2,5$ V.

La figure ci-dessus représente la courbe de résonance en intensité obtenue expérimentalement avec I_0 l'amplitude de l'intensité du courant.

En exploitant cette courbe, **déterminer** les valeurs de la résistance R, de la capacité C et de l'inductance L utilisées.

La figure nous permet de déterminer l'amplitude maximale I_{max}

$$I_{max} \approx 0,85 \text{ mA} = 8,5.10^{-4} \text{ A}.$$

Cette amplitude I_{max} est atteint à la pulsation de résonance en intensité qui correspond à la pulsation propre du circuit, soit

$$\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Ainsi, d'après la figure

$$\omega_0 = 10.10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

De plus, on sait qu'à la résonance en intensité, l'amplitude de la tension aux bornes du résistor est égale à l'amplitude de la tension imposée par le générateur soit

$$E_0 = U_{max} = RI_{max}$$

ainsi

$$R = \frac{E_0}{I_{max}}.$$

A.N.

$$\boxed{R = \frac{2,5}{8,5.10^{-4}} = 3,0 \text{ k}\Omega.}$$

On sait que le facteur de qualité Q du circuit est lié à la résonance et à la largeur à résonance **en intensité** par la relation

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}.$$

On sait que la largeur de la résonance en intensité $\Delta\omega = \omega_b - \omega_a$ avec ω_a et ω_b, les pulsations pour lesquelles $I(\omega_a) = I(\omega_b) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$I(\omega_a) = I(\omega_b) = \frac{I_{max}}{\sqrt{2}} = 6,0.10^{-4} \text{ A}.$$

Les pulsations qui correspondent à ces amplitudes sont

$$\omega_a \approx 7,5.10^3 \text{ rad.s}^{-1} \qquad \text{et} \qquad \omega_b \approx 13.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$$

donc

$$\Delta\omega = \omega_b - \omega_a = 5,5.10^3 \text{ rad.s}^{-1}.$$

La valeur du facteur de qualité dans ce cas est donc

$$Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{10.10^3}{5,5.10^3} = 1,8.$$

A partir de ω_0, R et Q on peut déterminer les valeurs de C et L.
Le facteur de qualité d'un circuit RLC est défini tel que

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

ainsi

$$\sqrt{\frac{L}{C}} = RQ$$

En multipliant cette expression par $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, il vient que

$$\omega_0 RQ = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{C}$$

donc

$$C = \frac{1}{\omega_0 RQ}.$$

A.N.

$$\boxed{C = \frac{1}{10.10^3 \times 3,0.10^3 \times 1,8} = 19.10^{-9} \text{ F}.}$$

On obtient la valeur de L à partir de C et ω_0

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \text{soit} \qquad L = \frac{1}{C\omega_0^2}.$$

A.N.

$$\boxed{L = \frac{1}{19.10^{-9} \times (10.10^3)^2} = 530 \text{ mH}.}$$

Exercice I.6. Calculs d'impédance ★ ★

1. **Déterminer** les expressions de R' et L' en fonction de R, L et ω pour que le Dipôle A et le Dipôle B ci-dessous aient la même impédance. **Déterminer** si l'égalité $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$ est possible.
Pour le dipôle A, l'association en parallèle des impédances donne

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_R}} = \frac{1}{\frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}} = \frac{jLR\omega}{R+jL\omega}.$$

Afin d'écrire l'impédance sous la forme $a+jb$ avec a la partie réelle et b la partie imaginaire, il faut multiplier l'impédance, en haut et en bas de la fraction, par le conjugué complexe de son dénominateur soit $R-jL\omega$. Il vient que

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{jLR\omega}{R+jL\omega} \times 1 = \frac{jLR\omega}{R+jL\omega} \times \frac{R-jL\omega}{R-jL\omega} = \frac{L^2R\omega^2 + jLR^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}.$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{L^2R\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} + j\frac{LR^2\omega}{R^2+L^2\omega^2}.$$

Pour le dipôle B, l'association en série des impédances donne

$$\underline{Z}'_{eq} = R' + jL'\omega.$$

Si on égalise les deux impédances $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}'_{eq}$ il vient que

$$\frac{jLR\omega}{R+jL\omega} = R' + jL'\omega.$$

Pour que les deux expressions soient égales il faut que les parties réelles et imaginaires soient égales entre elles, soit

$$\boxed{R' = \frac{L^2R\omega^2}{R^2+L^2\omega^2} \qquad \text{et} \qquad L' = \frac{LR^2}{R^2+L^2\omega^2}.}$$

Il vient que

$$\frac{L'}{R'} = \frac{LR^2}{R^2+L^2\omega^2}\frac{R^2+L^2\omega^2}{L^2R\omega^2} = \frac{LR^2}{L^2R\omega^2} = \frac{R}{L\omega^2}.$$

L'égalité $\frac{L}{R} = \frac{L'}{R'}$ est possible si

$$\frac{L}{R} = \frac{R}{L\omega^2}$$

donc

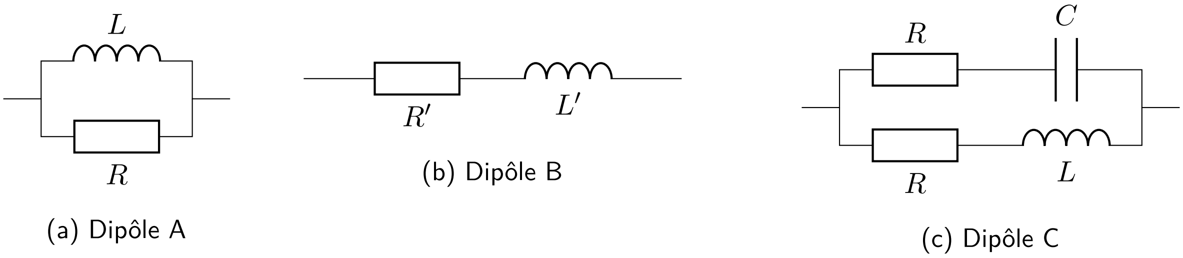
$$\omega^2 = \frac{R^2}{L^2}$$

soit

$$\boxed{\omega = \frac{R}{L}.}$$

Si la pulsation imposée respecte cette condition, les rapport $\frac{L}{R}$ et $\frac{L'}{R'}$ sont égaux pour les circuits A et B.

2. **Exprimer** l'impédance $\underline{Z}$ équivalent au Dipôle C. **Exprimer** $\underline{Z}$ pour ω et $\omega \to \infty$. **Montrer** que $\underline{Z}$ est réel pour une certaine pulsation.



(a) Dipôle A (b) Dipôle B (c) Dipôle C

Figure 1.3 – Schémas des dipôles

L'impédance $\underline{Z}$ du dipôle C est

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}}$$

avec $\underline{Z}_1$ l'impédance de la branche contenant le résistor et le condensateur soit

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} = R - j\frac{1}{C\omega}$$

et $\underline{Z}_2$ l'impédance de la branche contenant le résistor et la bobine soit

$$\underline{Z}_2 = R + jL\omega.$$

Il vient que

$$\underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R - j\frac{1}{C\omega}} + \frac{1}{R + jL\omega}}$$

$$\underline{Z} = \frac{\left(R - j\frac{1}{C\omega}\right)(R + jL\omega)}{R + jL\omega + R - j\frac{1}{C\omega}} = \frac{R^2 + \frac{L}{C} + j\left(RL\omega - \frac{R}{C\omega}\right)}{2R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{R + \frac{L}{RC} + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}{2 + j\frac{1}{R}\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}.}$$

On constate que pour $\omega\infty$ il vient que

$$\underline{Z} \to \frac{R + \frac{L}{RC} + jL\omega}{2 + j\frac{1}{R}L\omega} \to \frac{jL\omega}{j\frac{1}{R}L\omega} = R$$

$$\boxed{\underline{Z} \to R.}$$

À hautes fréquences, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé et la bobine comme un interrupteur ouvert : le circuit se réduit au résistor de la branche supérieure.

On constate que $\underline{Z}$ est réel si le terme $L\omega - \frac{1}{C\omega}$ est nul, soit

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0 \qquad \text{soit} L\omega = \frac{1}{C\omega}$$

donc

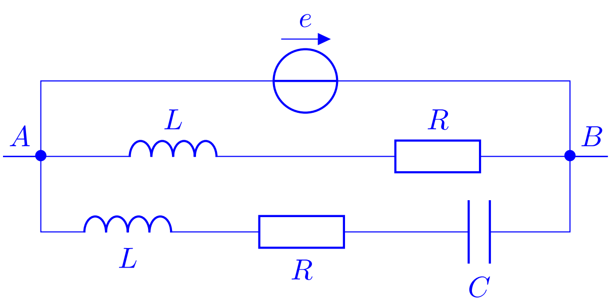
$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$$

Exercice I.7. Calculs de déphasage ★ ★

On branche en parallèle entre deux points A et B :

- un générateur de tension imposant la tension $u_{AB}(t) = e(t) = E_0 \cos(\omega t)$
- une bobine équivalente à une inductance L et une résistance R en série
- une bobine identique montée en série avec un condensateur de capacité C.

1. L'intensité du courant passant de A vers B dans la branche comportant seulement une bobine est $i(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi)$. **Déterminer** I_0 et $\tan\varphi$.



L'intensité dans une branche est proportionnelle à la tension aux bornes de la résistance équivalente de la branche. Icila résistance équivalente correspond à la résistance du seul résistor. Ainsi

$$i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$$

et on obtient $u_R(t)$ à l'aide d'un diviseur de tension sur la tension complexe

$$\underline{u}_R(t) = \underline{e}(t)\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} = \underline{e}(t)\frac{R}{R + jL\omega}$$

ainsi

$$\underline{i}(t) = \underline{e}(t)\frac{1}{R + jL\omega}.$$

La norme de $\underline{i}(t)$ est I_0 soit

$$I_0 = \left|\underline{e}(t)\frac{1}{R + jL\omega}\right| = |\underline{e}(t)|\frac{1}{|R + jL\omega|}$$

$$\boxed{I_0 = E_0\frac{1}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}.}$$

Le déphasage φ est défini tel que

$$\varphi = \arg(\underline{e}(t)) - \arg(\underline{i}(t)) = \arg(\underline{e}(t)) - \arg\left(\underline{e}(t)\frac{1}{R + jL\omega}\right) = \arg(\underline{e}(t)) - (\arg(\underline{e}(t)) - \arg(R + jL\omega))$$

$$\varphi = \arg(R + jL\omega) = \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right).$$

Ainsi il vient que

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega}{R}.}$$

2. Même question pour le courant $i(t) = I_0' \cos(\omega t + \varphi')$ passant de A vers B dans la branche comportant une bobine et une capacité (on supposera $\frac{1}{C\omega} > L\omega$).
   On peut effectuer le même travail avec la branche inférieure, il vient alors que

$$\underline{i}'(t) = \frac{1}{\underline{Z}_R}\underline{e}(t)\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C}$$

$$\underline{i}'(t) = \underline{e}(t)\frac{1}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

$$\underline{i}'(t) = \underline{e}(t)\frac{1}{R + j\left(L\omega + -\frac{1}{C\omega}\right)}.$$

   La norme de $\underline{i}(t)$ est I_0 soit

$$I_0' = \left|\underline{e}(t)\frac{1}{R + j\left(L\omega + -\frac{1}{C\omega}\right)}\right| = |\underline{e}(t)|\frac{1}{\left|R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right|}$$

$$\boxed{I_0' = E_0\frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)^2}}.}$$

   Le déphasage φ est défini tel que

$$\varphi = \arg(\underline{e}(t)) - \arg(\underline{i}'(t)) = \arg(\underline{e}(t)) - \arg\left(\underline{e}(t)\frac{1}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}\right)$$

$$\varphi = \arg(\underline{e}(t)) - \left(\arg(\underline{e}(t)) - \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right)\right)$$

$$\varphi = \arg\left(R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)\right) = \arctan\left(\frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}\right).$$

   Ainsi il vient que

$$\boxed{\tan\varphi = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R}.}$$

Exercice I.8. Conditions de résonance ★ ★

Le circuit ci-dessous est alimeté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du résistor et de la capacité montés en parlallèle.

On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

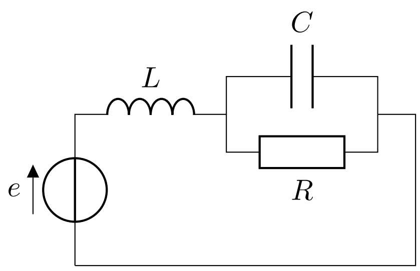


Figure 1.4 – Schéma du circuit électrique

1. **Établir** l'expression $\underline{u}$ en fonction de E_0, jx et ξ.
Pour obtenir la tension aux bornes du condensateur et du résistor il faut d'abord calculer l'impédance complexe $\underline{Z}_{eq}$ équivalente de l'association en parallèle des deux éléments

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_R} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}.$$

On peut alors utiliser le diviseur de tension pour obtenir $\underline{u}(t)$

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_L}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{1 + jRC\omega}\frac{1}{\frac{R}{1+jRC\omega} + jL\omega}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{1 + jRC\omega}\frac{1}{\frac{R}{1+jRC\omega} + \frac{jL\omega - RLC\omega^2}{1+jRC\omega}} = \underline{e}(t)\frac{R}{1 + jRC\omega}\frac{1 + jRC\omega}{R - RLC\omega^2 + jL\omega}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{R}{R - RLC\omega^2 + jL\omega}$$

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega} = \underline{e}(t)\frac{1}{1 - LC\omega^2 + j\frac{2\sqrt{L}\sqrt{LC}}{2R\sqrt{C}}\omega}$$

or $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $\frac{1}{\xi} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ donc

$$\underline{u}(t) = \underline{e}(t)\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{2\xi}\frac{\omega}{\omega_0}} = \underline{e}(t)\frac{1}{1 - x^2 + j\frac{1}{2\xi}x}$$

$$\boxed{\underline{u}(t) = \frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - x^2 + j\frac{1}{2\xi}x}.}$$

2. **Étudier** l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension $u(t)$.
Pour estimer l'existence d'une résonance il faut établir la norme U_0 de $\underline{u}(t)$ soit

$$U_0 = \left|\frac{E_0 e^{j\omega t}}{1 - x^2 + j\frac{1}{2\xi}x}\right| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{1}{4\xi^2}x^2}}.$$

La résonance apparaît pour un maximum de U_0, soit un minimum du dénominateur, soit un minimum du terme

$$g(x) = \left(1 - x^2\right)^2 + \frac{1}{4\xi^2}x^2.$$

Pour déterminer si ce terme admet un minimum, il faut le dériver par rapport à ω

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}\omega} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\omega_0}\left(-4x\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2\xi^2}x\right).$$

Si cette dérivée s'annule alors il existe un extremum pour $g(x)$. On cherche la valeur de x pour cette annulation

$$-4x\left(1 - x^2\right) + \frac{1}{2\xi^2}x = 0$$

$$4x^3 = \left(4 - \frac{1}{2\xi^2}\right) x$$

$$x = \sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\frac{1}{(2\xi)^2}\right)}$$

soit

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{\left(1 - \frac{1}{8\xi^2}\right)}.$$

On constate que cette pulsation de résonance ω_r ne peut exister que si

$$1 - \frac{1}{8\xi^2} > 0$$

donc

$$\frac{1}{(2\xi)^2} < 2$$

soit

$$\boxed{\xi > \frac{1}{2\sqrt{2}}.}$$

Exercice I.9. Impédance et déphasage ★ ★

Le générateur délivre une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Trouver la condition sur R_2, L, C et ω pour que l'intensité $i(t)$ fournie par le générateur soit en phase avec la tension $e(t)$.

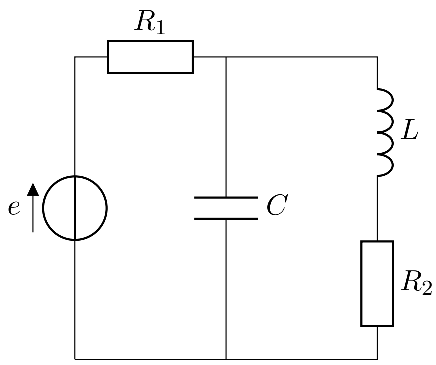


Figure 1.5 – Schéma du circuit électrique

Le générateur délivre une tension $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

Pour obtenir l'expression de $i(t)$ il faut obtenir l'impédance équivalente de tout le circuit, soit

$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

avec $\underline{Z}_1 = \underline{Z}_{R_1}$ et $\underline{Z}_2$ de l'ensemble R_2, L et C telle que

$$\underline{Z}_2 = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_3}}$$

avec $\underline{Z}_3$ l'impédance de l'ensemble L et R_2, soit

$$\underline{Z}_3 = R_2 + jL\omega.$$

Ainsi

$$\underline{Z}_{eq} = R_1 + \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R_2 + jL\omega}} = R_1 + \frac{R_2 + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jR_2C\omega}$$

$$\underline{Z}_{eq} = R_1 + \frac{R_2 + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jR_2C\omega}\frac{1 - LC\omega^2 - jR_2C\omega}{1 - LC\omega^2 - jR_2C\omega} = R_1 + \frac{R_2 - R_2LC\omega^2 + R_2LC\omega^2 + j\left(L\omega - L^2C\omega^3 - R_2^2C\omega\right)}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 - (R_2C\omega)^2}}.$$

D'après la loi d'Ohm

$$\underline{e}(t) = \underline{Z}_{eq}\underline{i}(t).$$

$\underline{e}(t)$ et $\underline{i}(t)$ sont en phase lorsque l'impédance est réelle, donc lorsque la partie imaginaire est nulle, soit

$$L\omega - L^2C\omega^3 - R_2^2C\omega = 0$$

$$L - L^2C\omega^2 - R_2^2C = 0$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{L - R_2^2C}{L^2C}}.}$$

Exercice I.10. Résonance d'un circuit RLC parallèle ★ ★ ★

On considère le circuit suivant, où $e(t)$ est une tension sinusoïdale de pulsation ω.

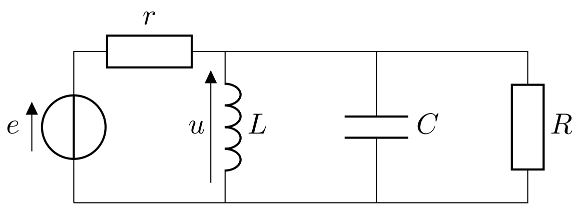


Figure 1.6 – Schéma du circuit électrique

1. **Donner** l'expression de $\underline{u}$, grandeur complexe associée à la tension $u(t)$.
Pour obtenir $\underline{u}$ il faut exprimer l'impédance complexe de la bobine, du condensateur et du résistor en parlallèle, soit

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} = \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

La tension aux bornes du système RLC peut alors être exprimée à l'aide d'un diviseur de tension

$$\underline{u} = \underline{e}\frac{\underline{Z}_{eq}}{r + \underline{Z}_{eq}}$$

$$\underline{u} = \underline{e}\frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}\frac{1}{r + \frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}}$$

$$\underline{u} = \underline{e}\frac{1}{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}\frac{\frac{1}{R} + j\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

$$\underline{u} = \underline{e}\frac{1}{1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.$$

2. **Établir** qu'il y a un phénomène de résonance pour la tension u et **exprimer** la pulsation à laquelle ce phénomène se produit.
   Il y a résonance si le module de la tension atteint un maximum, le module U_0 est

$$U_0 = |\underline{u}| = \left| \underline{e} \frac{1}{1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} \right| = |\underline{e}| \frac{1}{\left|1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right|} = E_0 \frac{1}{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 + r^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}.$$

   On constate que U_0 est maximal si le dénominateur est minimal donc

$$C\omega - \frac{1}{L\omega} = 0$$

   soit

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}.}$$

   Il y toujours résonance si $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.
3. **Décrire** le déphasage entre la tension u et la tension e à la résonance.
   Le déphasage φ entre la tension u et la tension e est défini telle que

$$\varphi = \arg\left(\underline{e}\right) - \arg\left(\underline{u}\right)$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{e}\right) - \arg\left(\underline{e}\frac{1}{1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}\right)$$

$$\varphi = \arg\left(\underline{e}\right) - \left(\arg\left(\underline{e}\right) - \arg\left(1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right)\right)$$

$$\varphi = \arg\left(1 + \frac{r}{R} + jr\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)\right) = \arctan\left(\frac{r\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}{1 + \frac{r}{R}}\right).$$

   Pour $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{r\left(\frac{C}{\sqrt{LC}} - \frac{\sqrt{LC}}{L\omega}\right)}{1 + \frac{r}{R}}\right) = \arctan\left(\frac{r\left(\sqrt{\frac{C}{L}} - \sqrt{\frac{C}{L}}\right)}{1 + \frac{r}{R}}\right) = \arctan\left(0\right) = 0.$$

   Il n'y a pas de déphasage à la résonance.
4. **Comparer** cette résonance avec la résonance en intensité d'un circuit RLC série.
   La résonance en intensité d'un circuit RLC en série est la même que la résonance en charge d'un circuit RLC en parallèle.

Exercice I.11. Étude d'une résonance ★ ★ ★

Soit le circuit suivant, où $e(t)$ est une tension sinusoïdale de pulsation ω. On étudie l'intensité parcourant le générateur.

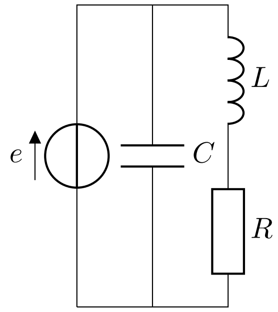


Figure 1.7 – Schéma du circuit électrique

1. **Exprimer** l'impédance complexe du circuit.
   L'impédance complexe du circuit $\underline{Z}_{eq}$ est

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_1}}$$

avec $\underline{Z}_1$ l'impédance équivalente de la branche contenant la bobine et le résistor

$$\underline{Z}_1 = R + jL\omega.$$

Ainsi

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R+jL\omega}} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega}.$$

2. On pose $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. **Donner** l'expression de l'impédance en fonction de x, Q et R.
   Il vient que

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R+jL\omega}{1-LC\omega^2+jRC\omega} = \frac{R\left(1+j\frac{L}{R}\omega\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+jR\frac{\sqrt{C}\sqrt{LC}}{\sqrt{L}}\omega}$$

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{R\left(1+j\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC}\omega\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{R\left(1+jQ\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = R\frac{1+jQx}{1-x^2+j\frac{1}{Q}x}.}$$

3. **Établir** l'existence d'un extremum du module de l'impédance pour certaines valeurs de Q qu'on précisera.
   Étudions le module de l'impédance, soit

$$\left|\underline{Z}_{eq}\right| = R\frac{|1+jQx|}{\left|1-x^2+j\frac{1}{Q}x\right|} = R\frac{\sqrt{1+Q^2x^2}}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}} = R\sqrt{\frac{1+Q^2x^2}{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}}.$$

Étudions la variation de l'argument de la racine en fonction de x, soit

$$g(x) = \frac{1+Q^2x^2}{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}.$$

On pose $u = x^2$ et on étudie les variations de $g(x)$ par rapport à u

$$g(u) = \frac{1+Q^2u}{(1-u)^2 + \frac{1}{Q^2}u}$$

$$\frac{\mathrm{d}g(u)}{\mathrm{d}u} = \frac{Q^2\left((1-u)^2 + \frac{1}{Q^2}u\right) - (1+Q^2u)\left(-2(1-u) + \frac{1}{Q^2}\right)}{\left((1-u)^2 + \frac{1}{Q^2}u\right)^2}.$$

Le dénominateur étant toujours positif, il faut étudier les conditions sur u pour que le numérateur s'annule soit,

$$g'(u) = Q^2\left((1-u)^2 + \frac{1}{Q^2}u\right) - \left(1+Q^2u\right)\left(-2(1-u) + \frac{1}{Q^2}\right) = 0$$

$$g'(u) = Q^2 - 2Q^2u + Q^2u^2 + u + 2 - 2u - \frac{1}{Q^2} + 2Q^2u - 2Q^2u^2 - u = 0$$

$$g'(u) = Q^2u^2 - 2Q^2u^2 - 2Q^2u + u - 2u + 2Q^2u - u + Q^2 + 2 - \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$g'(u) = -Q^2u^2 - 2u + \left(2 + Q^2 - \frac{1}{Q^2}\right) = 0.$$

Le discriminant de cette équation du deuxième ordre est

$$\Delta = 4 + 4Q^2\left(2 + Q^2 - \frac{1}{Q^2}\right) = 4 + 8Q^2 + 4Q^4 - 4 = 4Q^2\left(2+Q^2\right)$$

et les solutions sont

$$u_{+,-} = \frac{2 \pm 2Q\sqrt{2+Q^2}}{-2Q^2} = \frac{\mp Q\sqrt{2+Q^2} - 1}{Q^2}.$$

Comme u doit être positif car $u = x^2$, seule la solution u_+ est acceptable

$$u_+ = \frac{Q\sqrt{2+Q^2} - 1}{Q^2}$$

mais elle nécessite une condition sur Q, en effet le terme $Q\sqrt{2+Q^2} - 1$ doit être positif donc

$$Q\sqrt{2+Q^2} > 1 \qquad \text{soit} \qquad Q^4 + 2Q^2 - 1 > 0.$$

Le déterminant de cette nouvelle équation du deuxième ordre pour Q est

$$\Delta = 4 + 4 = 8$$

donc l'équation précédente s'annule pour

$$Q_{+,-} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}.$$

L'équation est-elle négative entre $Q_- = -1 - \sqrt{2} < 0$ et entre $Q_+ = -1 + \sqrt{2} > 0$? Pour le vérifier, prenons $Q = 0$, dans ce cas il vient que

$$Q^4 + 2Q^2 - 1 = -1 < 0$$

donc l'équation est positive pour $Q < Q_- = -1 - \sqrt{2}$, négative entre Q_- et $Q_+ = -1 + \sqrt{2}$, et positive pour $Q > Q_+$.
Nous voulons $Q > 0$ et une valeur d'équation positive, **la condition est donc $Q > 1 + \sqrt{2}$, pour que l'impédance ait un extremum.**

4. **Donner** l'expression de la pulsation correspondant à l'extremum.
On a montré que l'extremum de l'impédance était atteint pour

$$u_+ = \frac{Q\sqrt{2+Q^2}-1}{Q^2}$$

soit

$$x = \sqrt{\frac{1}{Q}\sqrt{2+Q^2}-\frac{1}{Q^2}} = \sqrt{\sqrt{\frac{2}{Q^2}+1}-\frac{1}{Q^2}}$$

soit

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{\sqrt{\frac{2}{Q^2}+1}-\frac{1}{Q^2}}.}$$

5. En étudiant les limites du module de l'impédance, **en déduire** qu'il s'agit d'un maximum.
Étudions le module de l'impédance

$$\left|\underline{Z}_{eq}\right| = R\sqrt{\frac{1+Q^2x^2}{(1-x^2)^2+\frac{1}{Q^2}x^2}}.$$

Pour $\omega \ll \omega_0$, soit $x \ll 1$, il vient que

$$\left|\underline{Z}_{eq}\right| \approx R\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{Q^2}x^2}} \approx R\sqrt{\frac{1}{1}} = R.$$

Pour $\omega = \omega_0$, soit $x = 1$, il vient que

$$\left|\underline{Z}_{eq}\right| = R\sqrt{\frac{1+Q^2}{\frac{1}{Q^2}}} = R\sqrt{Q^2+Q^4} = RQ\sqrt{1+Q^2}$$

avec $Q > 1+\sqrt{2}$, donc $RQ\sqrt{1+Q^2} > R$.
Pour $\omega \gg \omega_0$, soit $x \gg 1$, il vient que

$$\left|\underline{Z}_{eq}\right| \approx R\sqrt{\frac{Q^2x^2}{x^4+\frac{1}{Q^2}x^2}} \approx R\sqrt{\frac{Q^2x^2}{x^4}} = R\sqrt{\frac{Q^2}{x^2}} \approx 0.$$

On constate que lorsque ω augmente le module de l'impédance voit sa valeur varier de R à $RQ\sqrt{1+Q^2} > R$ puis vers 0 : **le module de l'impédance est croissant puis décroissant, il y a bien passage par un maximum.**

6. **Décrire** l'intensité du courant parcourant le générateur.
D'après la loi d'Ohm l'intensité du courant est telle que

$$\underline{e} = \underline{Z}_{eq}\underline{i}$$

donc

$$\underline{i} = \frac{\underline{e}}{\underline{Z}_{eq}}.$$

En module il vient que

$$I_0 = \frac{E_0}{\left|\underline{Z}_{eq}\right|}$$

donc le module de l'intensité évolue de manière opposée au module de l'impédance : lorsque ω augmente, I_0 diminue jusqu'à un minimum puis est de nouveau croissant : **il y a antirésonance pour l'intensité parcourant le générateur**.

7. Dans le cas où le facteur de qualité Q est grand, **donner** les expressions approchées de la pulsation de résonance en impédance et de la valeur correspondante du maximum de $|\underline{Z}|$.
   On a montré que
$$\omega = \omega_0 \sqrt{\sqrt{\frac{2}{Q^2}+1}-\frac{1}{Q^2}}$$
   pour $Q \gg 1$ il vient que
$$\omega \approx \omega_0 \sqrt{\sqrt{1}-\frac{1}{Q^2}}$$
$$\boxed{\omega \approx \omega_0.}$$
   On a montré plus tôt que pour $\omega = \omega_0$ il vient que
$$\left|\underline{Z}_{eq}\right| = RQ\sqrt{1+Q^2}$$
   donc pour $Q \gg 1$
$$\boxed{\left|\underline{Z}_{eq}\right| \approx RQ^2.}$$

Exercice I.12. Adaptation d'impédance ★ ★ ★

Un dipôle électrocinétique linéaire passif est, en régime sinusoïdal permanent, caractérisé par son impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$.

Le système étudié (réacteur à plasma) est modélisé par un circuit série R$_p$C$_p$. On veut diminer au maximum la partie imaginaire (appelée partie réactive) de cette impédance $\underline{Z}_p$. Pour cela, on réalise le circuit de la figure ci-contre.

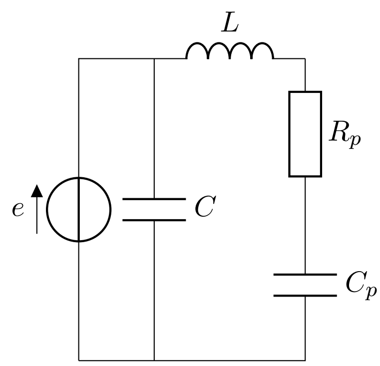


Figure 1.8 – Schéma du circuit électrique

1. **Exprimer** l'admittance totale $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}$ de la figure ci-dessus. **Déterminer** l'expression de C qui annule la partie réactive de $\underline{Z}_p$.
   L'admitance du circuit est
$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_1}$$
   avec $\underline{Z}_1$ l'impédance équivalent à celle de la branche contenant le résistor de résistance R_p, le condensateur de capacité C_p et la bobine d'inductance L soit
$$\underline{Z}_1 = R_p + jL\omega + \frac{1}{jC_p\omega} = R_p + j\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right).$$
   Ainsi
$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{1}{R_p + j\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)} = jC\omega + \frac{1}{R_p + j\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)} \times \frac{R_p - j\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)}{R_p - j\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)}$$

$$\underline{Y} = jC\omega + \frac{R_p - j\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)}{R_p^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)^2}.$$

Pour que la partir réactive s'annule il faut que la partie imaginaire de l'admittance complexe s'annule, soit

$$C\omega - \frac{L\omega - \frac{1}{C_p\omega}}{R_p^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)^2} = 0$$

soit

$$\boxed{C = \frac{L - \frac{1}{C_p\omega^2}}{R_p^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)^2}.}$$

2. La condition précédente étant réalisée, **déterminer** l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ totale du dipôle, notée alors R_1.
   Si la condition précédente est réalisée alors l'admittance est réelle et est telle que

$$Y = \frac{R_p}{R_p^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)^2}$$

donc

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{Y} = R_p + \frac{1}{R_p}\left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)^2.}$$

Correction

Exercice I.1. Conditions de résonance ★ ★

1.
2.

Exercice I.2. Impédance et déphasage ★ ★

Exercice I.3. Résonance d'un circuit RLC parallèle ★ ★ ★

1.
2.
3.
4.

Exercice I.4. Étude d'une résonance ★ ★ ★

1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.

Exercice I.5. Adaptation d'impédance ★ ★ ★

1.
2.