Matrices et applications linéaires

- Définitions de matrice associée à un vecteur, une famille de vecteurs, une application linéaire relativement à des bases. Méthode de construction de la matrice associée.
- Pour E, F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension fini n et p, les espaces $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes. Isomorphisme d'anneaux entre $\mathcal{L}(E)$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Opérations et matrices associées : matrice d'une composée d'applications linéaires, d'une combinaison linéaire d'application linéaire, matrice inverse d'un isomorphisme.
- Application linéaire canoniquement associée à une matrice.
- Noyau, image, rang d'une matrice.
- Une matrice est inversible ssi son noyau est réduit au vecteur nul. Les opérations élémentaires sur les lignes conservent l'image et le rang.
- Rappels du premier semestre sur la résolution de systèmes linéaires. Rang d'un système linéaire, structure de l'espace des solutions. Un système $(S) : AX = B$ admet une solution ssi B appartient à $Im(A)$. Système de Cramer.

Question de cours

Question :
Donner la définition de matrice associée à une application linéaire relativement à deux bases.:

Question :
Démontrer qu'une matrice est inversible ssi elle est inversible à gauche ou à droite.:

Question :
Définition de l'image, du noyau et du rang d'une matrice. :

Question :
Énoncer le théorème décrivant la matrice associée à une composée d'applications linéaires :
Si E,F et G sont trois $\mathbb{K}$-ev munis respectivement des bases β,β' et β'', pour $f \in \mathcal{L}(E,F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,G)$ on a :

$$Mat_{\beta,\beta''}(g \circ f) = Mat_{\beta',\beta''}(g) \times Mat_{\beta,\beta'}(f).$$

: