Leçon II. Fonction de transfert et filtres

Dans cette leçon nous allons étudier les circuits électroniques de manière générale, plus précisément, nous allons caractériser la manière dont ils transforme un signal d'entrée $\underline{e}$ (le plus souvent un signal de tension) en un signal de sortie $\underline{s}$ (le plus souvent un signal de tension aux bornes d'un dipôle ou d'une association de dipôle composant le circuit). Nous pouvons dire que nous étudierons la manière dont un circuit filtre un signal.

II.1. Fonction de transfert

Considérons un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal tel que

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \varphi_e)$$

ou en complexe

$$\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi_e} = \underline{E_0} e^{j\omega t}$$

avec E_0, ω et φ_e des constantes qui caractérisent le signal d'entrée.

Ce signal d'entrée est fourni à un système, par exemple un circuit électronique. En régime sinusoïdal, ou régime permanent, le système fourni un signal de sortie $s(t)$ qui oscille à la même pulsation que le signal d'entrée excitateur (donc même fréquence et même période) tel que

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi_s).$$

ou en complexe

$$\underline{s}(t) = S_0 e^{j\omega t} e^{j\varphi_s(\omega)} = \underline{S_0} e^{j\omega t}$$

avec S_0, ω des constantes et $\varphi_s(\omega)$ une phase à l'origine dépendant de la pulsation excitatrice qui caractérisent le signal d'entrée.

À partir de la connaissance des grandeurs E_0, ω et φ_e caractérisant un signal d'entrée, nous souhaitons obtenir les grandeur S_0 et φ_s du signal de sortie produit par un système linéaire.

♥ Définition

Un système linéaire est un système dont la pulsation du signal de sortie $s(t)$ correspond à la pulsation du signal d'entrée $e(t)$ en régime permanent.

Un système non linéaire est un système dont la ou des pulsations du signal de sortie $e(t)$ ne correspondent pas à la pulsation du signal d'entrée $e(t)$ en régime permanent : on dit qu'il y a création de nouvelles fréquences.

II.1.a Définition

Les circuits électroniques sont des systèmes linéaires lorsqu'ils sont réalisés avec des composants linéaires (résistors, condensateur, bobines, etc.). Dans ce cas, on peut obtenir une relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie tel que

$$\boxed{\underline{s} = \underline{H} \times \underline{e}}$$

avec $\underline{H}$ un nombre complexe dépendant des caractéristiques des composants du circuit (résistance, capacité, inductance, etc.) et de $j\omega$, donc de la pulsation à la puissance 1 au maximum. On a donc bien affaire à une **relation linéaire**.

♥ Définition

La **fonction de transfert** d'un circuit linéaire est la fonction de la variable complexe $j\omega$ telle que, pour un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω, le signal de sortie $s(t)$ en régime sinusoïdal forcé est donné par

$$\underline{s}(t) = \underline{H}(j\omega) \times \underline{e}(t).$$

Dans le domaine du traitement du signal, le circuit linéaire est appelé **filtre** et la fonction de transfert caractérise le filtrage.

Exemple

Prenons un circuit RC série et prenons comme signal de sortie la tension aux bornes du condensateur comme illustré ci-dessous

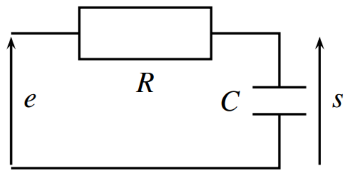

FIGURE 1 – Schéma du circuit.

il vient que

$$\underline{s}(t) = \underline{e}(t)\frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \underline{e}(t)\frac{1}{1+jRC\omega}.$$

La fonction de transfert de ce filtre est donc

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{1}{1+jRC\omega}.$$

Pour les basses fréquences $\omega \ll \frac{1}{RC}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} \rightarrow = 1.$$

Le signal de sortie est identique au signal d'entrée.

Pour $\omega = \frac{1}{RC}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} = \frac{1}{1+j}.$$

Pour les hautes fréquences $\omega \gg \frac{1}{RC}$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega} \rightarrow \frac{1}{jRC\omega}.$$

Le signal de sortie et le signal d'entrée sont liés par le facteur $\frac{1}{j\omega}$: on voit que **le signal de sortie est l'intégrale du signal d'entrée** à un facteur $\frac{1}{RC}$ près.

☛ Nota bene

On se rappelle que **la dérivation par rapport au temps** d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω en mode complexe se résume à la multiplication de la fonction complexe par $j\omega$.
De plus, **l'intégration par rapport au temps** d'une fonction sinusoïdale de pulsation ω en mode complexe se résume à la multiplication de la fonction complexe par $\frac{1}{j\omega}$.

À partir de l'exemple du circuit RC on voit que le signal de sortie d'un filtre est le plus souvent sous la forme d'un diviseur de tension ou de courant complexe tel que

$$\underline{s}(t) = \underline{e}(t)\frac{\sum_{i=1}^{N} a_i(j\omega)^i}{\sum_{i=1}^{M} b_i(j\omega)^i}$$

avec les coefficient a_i et b_i des réels, $N \leq M$ et $a_N \neq 0$ et $b_M \neq 0$.

La fonction de transfert d'un filtre est donc le plus souvent une faction rationnelle en $j\omega$ telle que

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i(j\omega)^i}{\sum_{i=1}^{M} b_i(j\omega)^i}.$$

On constate également qu'il existe une relation entre le signal d'entrée et le signal de sortie

$$\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)} = \frac{\sum_{i=1}^{N} a_i(j\omega)^i}{\sum_{i=1}^{M} b_i(j\omega)^i}$$

soit

$$\sum_{i=1}^{M} b_i(j\omega)^i \underline{s}(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i(j\omega)^i \underline{e}(t).$$

Or nous savons que le terme $(j\omega)^i \underline{f}(t)$, avec $\underline{f}(t)$ une fonction complexe, correspond à la dérivée à l'ordre i de la fonction réelle $f(t)$, donc

$$\boxed{\sum_{i=1}^{M} b_i \frac{\mathrm{d}^i s(t)}{\mathrm{d}t^i} = \sum_{i=1}^{N} a_i \frac{\mathrm{d}^i e(t)}{\mathrm{d}t^i}.}$$

Cette équation liant le signal de sortie $s(t)$ au signal d'entrée $e(t)$ est l'**équation différentielle caractéristique du filtre**.

II.1.b Fonctions de gain et de phase

- Le **gain** d'un filtre

$$\boxed{G(\omega) = |\underline{H}(\omega)|}$$

soit

$$G(\omega) = \left|\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}\right| = \frac{|\underline{s}(t)|}{|\underline{e}(t)|} = \frac{S_0}{E_0}.$$

Exemple
Si on continue l'étude du circuit RC précédent, le gain de ce filtre est

$$G(\omega) = \left|\frac{1}{1 + jRC\omega}\right| = \frac{1}{|1 + jRC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}.$$

Pour les basses fréquences $\omega \ll \frac{1}{RC}$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \rightarrow = 1.$$

Le signal de sortie a la même amplitude que le signal d'entrée.
Pour $\omega = \frac{1}{RC}$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Le signal de sortie a une amplitude $S_0 = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$.
Pour les hautes fréquences $\omega \gg \frac{1}{RC}$

$$G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} \rightarrow \frac{1}{RC\omega} \rightarrow 0.$$

Le signal de sortie est fortement atténué.

- La **phase** d'un filtre

$$\boxed{\varphi(\omega) = \arg\left(\underline{H}(\omega)\right)}$$

soit

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{\underline{s}(t)}{\underline{e}(t)}\right) = \arg\left(\underline{s}(t)\right) - \arg\left(\underline{e}(t)\right) = \omega t + \varphi_s(\omega) - \omega t - \varphi_e$$
$$\varphi(\omega) = \varphi_s(\omega) - \varphi_e.$$

Exemple
Si on continue l'étude du circuit RC précédent, la phase de ce filtre est

$$\varphi(\omega) = -\arg\left(1 + jRC\omega\right) = -\arctan\left(RC\omega\right).$$

- L'amplitude X_0 d'un signal $x(t)$ peut s'exprimer en décibel tel que

$$X_{0,dB} = 20\log\left(\frac{X_0}{X_{ref}}\right)$$

avec $X_{0,dB}$ l'amplitude en décibel et X_{ref} une valeur de référence arbitraire.

L'amplitude du signal de sortie en décibel est

$$S_{0,dB} = 20\log\left(\frac{S_0}{U_{ref}}\right)$$

avec U_{ref} une valeur (le plus souvent de tension) arbitraire. Comme

$$G(\omega) = \frac{S_0}{E_0}$$

il vient que

$$S_{0,dB} = 20\log\left(\frac{G(\omega)E_0}{U_{ref}}\right) = 20\log\left(\frac{E_0}{U_{ref}}\right) + 20\log\left(G(\omega)\right)$$

soit

$$S_{0,dB} = E_{0,dB} + 20\log\left(G(\omega)\right).$$

On définit **le gain en décibel** $G_{dB}(\omega)$ tel que

$$\boxed{G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega))}$$

soit

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(|\underline{H}(\omega)|) = 20\log\left(\frac{S_0}{E_0}\right) = S_{0,dB} - E_{0,dB}.$$

Exemple
Si on continue l'étude du circuit RC précédent, le gain en décibel de ce filtre est

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(G(\omega)) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}\right) = 20\log 1 - 20\log\left(\sqrt{1+(RC\omega)^2}\right)$$

$$G_{dB}(\omega) = -10\log\left(1+(RC\omega)^2\right).$$

Pour les basses fréquences, soit $\omega \to 0$, $G_{dB}(\omega) \to -10\log(1) = 0$, le gain en dB est nul donc

$$S_{0,dB} = E_{0,dB}.$$

Pour les hautes fréquences, $\omega \gg 1$

$$G_{dB}(\omega) \to -10\log\left((RC\omega)^2\right) = -20\log(RC\omega).$$

II.2. Diagramme de Bode

♥ Définition

Le **diagramme de Bode** d'un filtre comporte deux courbes
- la **courbe d'amplitude** qui donne le gain en décibel $G_{dB,0}$ du filtre
- la **courbe de phase** qui donne la phase $G_{dB,0}$ du filtre.

  Les deux courbes sont toutes deux tracées en fonction d'un rapport $\log\left(\frac{\omega}{\omega_{ref}}\right)$ avec ω_{ref} une pulsation de référence, ou en fonction de ω mais selon une échelle logarithmique.

II.2.a Courbe en amplitude du diagramme de Bode

Prenons l'exemple du circuit RC, on a vu que le gain en décibel de ce filtre est

$$G_{dB}(\omega) = -10\log\left(1+(RC\omega)^2\right).$$

Ici la pulsation de référence ω_{ref} est la pulsation propre du système $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, on peut récrire le gain en décibel

$$G_{dB}(\omega) = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right).$$

La courbe du gain en décibel est donnée Figure 2. Elle utilise une échelle logarithmique pour l'axe des abscisse.

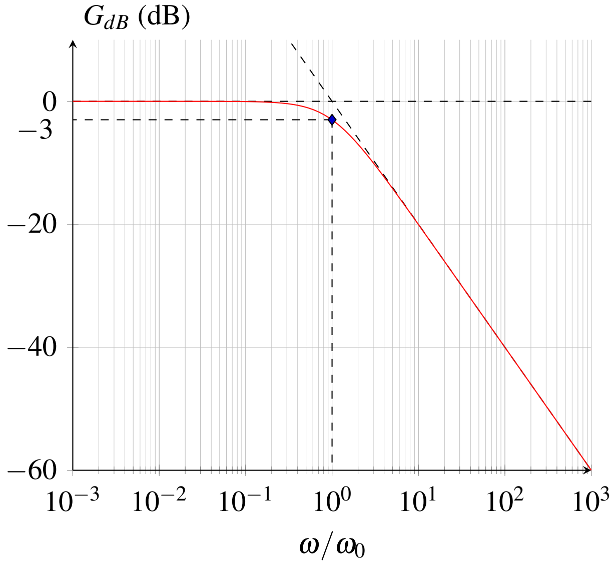

FIGURE 2 – Diagramme de Bode : courbe de gain du filtre RC, réponse en charge.

Pour les basse fréquences, on voit apparaître une asymptote telle que

$$G_{dB}(\omega) = 0.$$

Pour une pulsation de l'excitation égale à la pulsation propre du système, soit $\omega = \omega_0$, il vient que

$$G_{dB}(\omega) = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = -10\log 2 = -3 \text{ dB}.$$

Pour les hautes fréquences, on voit apparaître une asymptote telle que

$$G_{dB}(\omega) = -20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

soit une droite de pente -20 dB : **à chaque fois que la pulsation est multipliée par 10, le gain $G(\omega)$ est divisé par 10**.

II.2.b Courbe en phase du diagramme de Bode

Toujours en se basant sur l'exemple du circuit RC, on a vu que la phase en décibel de ce filtre est

$$\varphi(\omega) = -\arctan(RC\omega).$$

En utilisant la pulsation propre du système $\omega_0 = \frac{1}{RC}$, on peut récrire la phase de ce filtre telle que

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

La courbe de la phase est donnée Figure 3. Cette figure utilise une échelle logarithmique pour l'axe des abscisse.

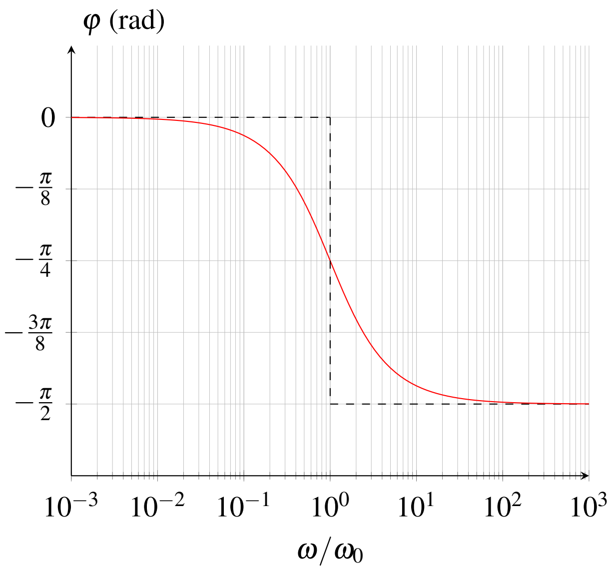

FIGURE 3 – Diagramme de Bode : courbe de phase du filtre RC, réponse en charge.

Pour les basse fréquences, on voit apparaître une asymptote telle que

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\arctan(0) = 0.$$

Pour une pulsation de l'excitation égale à la pulsation propre du système, soit $\omega = \omega_0$, il vient que

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

Pour les hautes fréquences, on voit apparaître une asymptote telle que

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

II.3. Exemple de filtre

En première année, nous allons nous restreindre au filtre du premier ordre, c'est-à-dire les filtres qui impliquent des dérivées par rapport à ω jusqu'à l'ordre 1 au maximum.

II.3.a Filtre passe-bas du premier ordre

♥ Définition

Un filtre passe-bas du premier ordre a une fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ telle que

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec H_0 un nombre réel, et ω_0 la pulsation caractéristique du filtre.

Le gain $G(\omega)$ pour un filtre passe-bas du premier ordre est donc

$$G(\omega) = \left|\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}\right| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

A basses fréquences, soit $\omega \ll \omega_0$

$$G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \to H_0$$

et

$$G_{dB}(\omega) = 20\log H_0.$$

Pour $\omega = \omega_0$

$$G(\omega_0) = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

et

$$G_{dB}(\omega_0) = 20\log\left(\frac{H_0}{\sqrt{2}}\right) = 20\log(H_0) - 20\log\left(\sqrt{2}\right) = 20\log(H_0) - 10\log(2)$$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20\log H_0 - 3 \text{ dB}.$$

A hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$

$$G(\omega) = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \to H_0\frac{\omega_0}{\omega} \to 0$$

et

$$G_{dB}(\omega) = 20\log(0) \to -\infty.$$

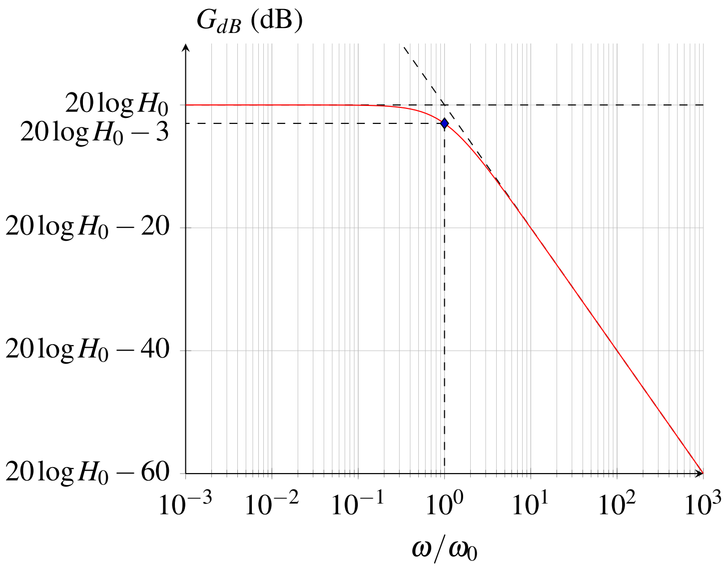

FIGURE 4 – Diagramme de Bode : courbe de gain du filtre passe-bas du premier ordre.

On constate que pour les hautes fréquences, le gain du filtre passe-bas tend vers 0 : il filtre les hautes fréquences. Pour les basses fréquences, le gain du filtre passe-bas est constant et vaut H_0 : il amplifie d'un facteur H_0 les excitations avec des fréquences basses. **C'est pour cela qu'on le nomme filtre passe-bas.**

☛ ***Nota bene***

On a vu que pour les hautes fréquences la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ faisait correspondre le signal de sortie $\underline{s}(t)$ à l'intégrale du signal d'entrée à un facteur $\frac{1}{RC}$ près. On peut dire qu'**une pente de -20 dB sur un diagramme de Bode correspond à un comportement intégrateur du filtre**.

La phase $\varphi(\omega)$ pour un filtre passe-bas du premier ordre est donc

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \arg(H_0) - \arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{0}{H_0}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

A basses fréquences, soit $\omega \ll \omega_0$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\arctan(0) = 0.$$

Pour $\omega = \omega_0$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}.$$

A hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$

$$\varphi(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to -\arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}.$$

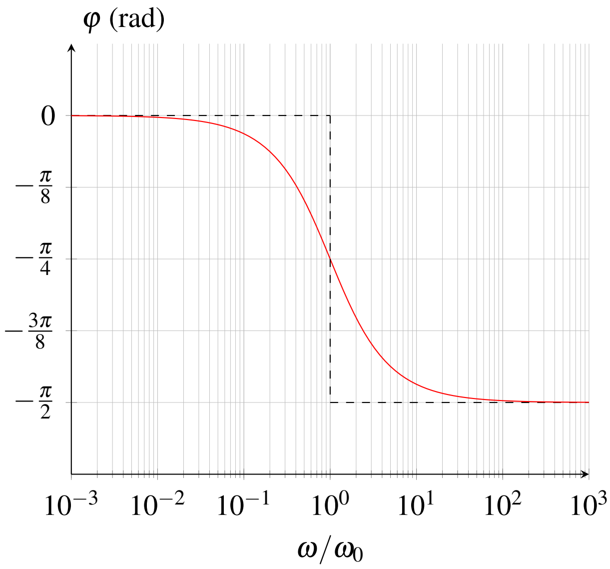

FIGURE 5 – Diagramme de Bode : courbe de phase du filtre passe-bas du premier ordre.

On constate que pour les basses fréquences, la phase du filtre passe-bas tend vers 0 : la réponse est en phase avec l'excitation. Le filtre passe-bas amplifie les excitations de fréquences basses d'un facteur H_0 sans introduire de déphasage.

♥ Définition

Un filtre passe-bas du premier ordre est un filtre dont **la fonction de gain** a les propriété suivantes :

- $G(0) = H_0$ avc H_0 un réel strictement positif
- $G(\omega_0) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$
- $G(\omega)$ tend vers 0 quand ω tend vers l'infini.

La fonction de gain en décibel a les propriétés suivantes :

- $G_{dB}(0) = 20\log H_0$ avec H_0 un réel strictement positif
- $G_{dB}(\omega_0) = 20\log H_0 - 3$ dB
- $G_{dB}(\omega)$ tend vers $-\infty$ quand ω tend vers l'infini ; dans ce domaine le gain en dB suit une asymptote de $-20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ qui correspond à un comportement intégrateur.

La fonction de phase en décibel a les propriétés suivantes :

- $\varphi(0) = 0$: les signaux de sortie et d'entrée sont en phase
- $\varphi(\omega_0) = -\frac{\pi}{4}$
- $\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2}$ quand ω tend vers l'infini ; le signal de sortie est en retard sur le signal d'entrée, et les signaux sont en quadrature de phase.

Exemple de filtre passe-bas du premier ordre

On constate que la réponse en charge u_C du circuit RC série correspond à un filtre passe-bas. On se souvient que la fonction de transfert d'un tel filtre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$

soit

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

si on identifie $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

On a déjà tracé les courbes de gain en décibel et en phase du diagramme de Bode d'un tel filtre.

La réponse en charge du circuit RC est donc bien un filtre passe bas : à partir de la pulsation propre du filtre, les pulsations plus importantes sont filtrées : atténuées et déphasées.

II.3.b Filtre passe-haut du premier ordre

♥ Définition

Un filtre passe-haut du premier ordre a une fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ telle que

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

avec H_0 un nombre réel, et ω_0 la pulsation caractéristique du filtre.

Pour les basses fréquences $\omega \ll \omega_0$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \rightarrow = H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}.$$

Le signal de sortie correspond au signal d'entrée à un facteur $j\frac{\omega}{\omega_0}$ près : on voit que **le signal de sortie est la dérivée du signal d'entrée** à un facteur $\frac{1}{\omega_0}$ près.

Pour $\omega = \omega_0$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{jH_0}{1+j\omega}.$$

Pour les hautes fréquences $\omega \gg \omega_0$

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \to H_0.$$

Le gain $G(\omega)$ pour un filtre passe-haut du premier ordre est donc

$$G(\omega) = \left|\frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right| = \frac{\left|H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}\right|}{\left|1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right|} = \frac{H_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}.$$

A basses fréquences, soit $\omega \ll \omega_0$

$$G(\omega) = \frac{H_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \to H_0\frac{\omega}{\omega_0} \to 0$$

et

$$G_{dB}(\omega) \to 20\log 0 \to -\infty.$$

Pour $\omega = \omega_0$

$$G(\omega_0) = \frac{H_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{H_0}{\sqrt{2}}.$$

et

$$G_{dB}(\omega_0) = 20\log\left(\frac{H_0}{\sqrt{2}}\right) = 20\log(H_0) - 20\log\left(\sqrt{2}\right) = 20\log(H_0) - 10\log(2)$$

$$G_{dB}(\omega_0) = 20\log H_0 - 3 \text{ dB}.$$

A hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$

$$G(\omega) = \frac{H_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \to \frac{H_0\frac{\omega}{\omega_0}}{\frac{\omega}{\omega_0}} = H_0$$

et

$$G_{dB}(\omega) = 20\log H_0.$$

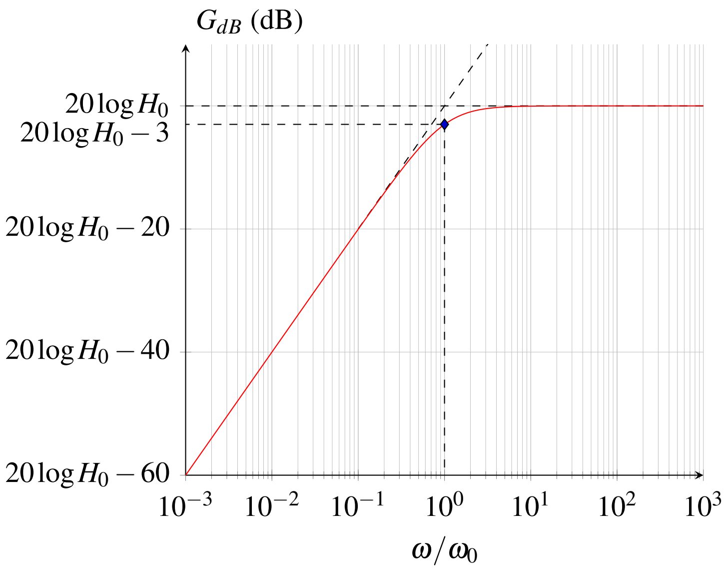

FIGURE 6 – Diagramme de Bode : courbe de gain du filtre passe-haut du premier ordre.

On constate que pour les basses fréquences, le gain du filtre passe-bas tend vers 0 : il filtre les basses fréquences. Pour les hautes fréquences, le gain du filtre passe-bas est constant et vaut H_0 : il amplifie d'un facteur H_0 les excitations avec des fréquences hautes. **C'est pour cela qu'on le nomme filtre passe-haut.**

Nota bene

On a vu que pour les basses fréquences la fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ faisait correspondre le signal de sortie $\underline{s}(t)$ à la dérivée du signal d'entrée à un facteur $\frac{1}{\omega_0}$ près. On peut dire qu'**une pente de +20 dB sur un diagramme de Bode correspond à un comportement dérivateur du filtre**.

La phase $\varphi(\omega)$ pour un filtre passe-haut du premier ordre est donc

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \arg\left(H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \arctan\left(\frac{H_0\frac{\omega}{\omega_0}}{0}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right).$$

A basses fréquences, soit $\omega \ll \omega_0$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to \frac{\pi}{2} - \arctan(0) = \frac{\pi}{2}.$$

Pour $\omega = \omega_0$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan(1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

A hautes fréquences, soit $\omega \gg \omega_0$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \to \frac{\pi}{2} - \arctan(\infty) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0.$$

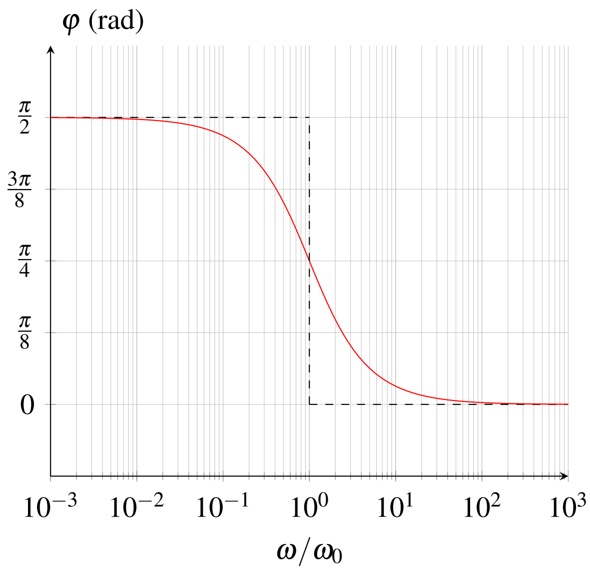

FIGURE 7 – Diagramme de Bode : courbe de phase du filtre passe-haut du premier ordre.

On constate que pour les hautes fréquences, la phase du filtre passe-bas tend vers 0 : la réponse est en phase avec l'excitation. Le filtre passe-haut amplifie les excitations de fréquences hautes d'un facteur H_0 sans introduire de déphasage.

♥ Définition

Un filtre passe-haut du premier ordre est un filtre dont **la fonction de gain** a les propriété suivantes :

- $G(0) = 0$
- $G(\omega_0) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$
- $G(\omega)$ tend vers un réel positif H_0 quand ω tend vers l'infini.

La fonction de gain en décibel a les propriétés suivantes :

- $G_{dB}(0)$ tend vers $-\infty$ quand ω tend vers 0; dans ce domaine le gain en dB suit une asymptote de $+20\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ qui correspond à un comportement dérivateur
- $G_{dB}(\omega_0) = 20\log H_0 - 3$ dB
- $G_{dB}(\omega)$ tend vers $20\log H_0$ avec H_0 un réel strictement positif.

La fonction de phase en décibel a les propriétés suivantes :

- $\varphi(0) = \frac{\pi}{2}$: le signal de sortie est en avance sur le signal d'entrée, et les signaux sont en quadrature de phase
- $\varphi(\omega_0) = \frac{\pi}{4}$
- $\varphi(\omega) = 0$ quand ω tend vers l'infini : les signaux de sortie et d'entrée sont en phase.

Exemples de filtre passe-haut du premier ordre

On peut donner deux exemples de filtres passe-haut : la réponse en intensité du circuit RC série, et la tension aux bornes de la bobine du circuit RL série.

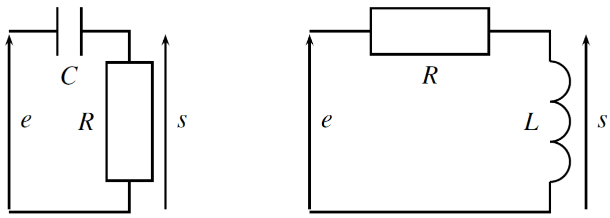

FIGURE 8 – Schéma des circuits RC et RL série.

Dans le cas de la réponse en intensité du circuit RC série, la fonction de transfert est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} \qquad \text{soit} \qquad \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

en identifiant $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.

Dans le cas de la tension aux bornes de la bobine du circuit RL série, la fonction de transfert est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{jL\omega}{R+jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R}\omega} \qquad \text{soit} \qquad \frac{H_0 j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

en identifiant $H_0 = 1$ et $\omega_0 = \frac{R}{L}$.

Synthèse

Connaissances

- Fonction de transfert harmonique.
- Diagramme de Bode.
- Modèles de filtres passifs d'ordre 1 : passe-bas et passe-haut.

Savoir-faire

- **Tracer** le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- **Utiliser** les échelles logarithmiques et interpréter les comportements asymptotiques des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- **Choisir** un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.