Chapitre 1 : Fonctions d'une variable réelle

Table des matières

1 Objectifs principaux

Le point de vue adopté dans ce chapitre est pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en oeuvre les techniques de base de l'analyse. La mise en place rigoureuse des notions abordées fera l'objet de chapitres ultérieurs.

On se donne pour objectifs principaux dans ce chapitre :

1. l'introduction de fonctions pour établir des inégalités et résoudre des problèmes d'optimisation.
2. la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu par rapport à celui de la classe de Terminale.
3. le calcul de dérivées.

2 Généralités sur les fonctions

Définition: Fonction de la variable réelle à valeurs réelles

Une fonction f d'une variable réelle à valeurs réelles associe à tout élément x d'un certain ensemble $D \subset \mathbb{R}$ un unique nombre réel que l'on note $f(x)$.

- l'ensemble D des x pour lesquels $f(x)$ est défini se nomme **l'ensemble de définition de** f. On note alors :

$$f : D \to \mathbb{R} \quad ou \quad \begin{array}{rccc} f: & D & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array} \quad ou \quad D \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

- soit $y \in \mathbb{R}$, s'il existe $x \in D$ tel que $y = f(x)$ on dit que y est **l'image** de f par x et x est un **antécédent** de y par f.
- soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé du plan. Le **graphe** ou encore la **courbe représentative** de la fonction f, noté $\mathcal{G}_f$, est l'ensemble

$$\mathcal{G}_f = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

Vous connaissez un grand nombre de fonctions. En voici quelques exemples classiques :

Exemple

- la fonction inverse $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.
- la fonction racine carrée $\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$.
- les fonctions polynomiales. Une fonction P est polynomiale s'il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{array}{rccc} P: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \end{array}$$

Méthode

Graphiquement, pour une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ donnée et $\lambda \in \mathbb{R}$, on peut déterminer l'ensemble des antécédents vérifiant les équations $f(x) = \lambda$ ou $f(x) \leq \lambda$ de la manière suivante :
On note toujours $\mathcal{G}_f$ la courbe représentative de f ainsi que $\mathcal{H}_\lambda$ la droite d'équation $y = \lambda$.

1. Pour résoudre l'équation $f(x) = \lambda$ on détermine l'intersection $\mathcal{A} = \mathcal{G}_f \cap \mathcal{H}_\lambda$. L'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ s'obtient comme l'ensemble des points d'intersection de l'axe des abscisses avec les droites verticales d'équation $x = \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$
2. Pour résoudre graphiquement l'inéquation $f(x) \leq \lambda$ on peut considère l'ensemble des points de coordonnées $(x, 0)$ sur l'axe des abscisses tels que le point sur la courbe représentative de coordonnée $(x, f(x))$ se situe en dessous de la droite $\mathcal{H}_\lambda$.

Exercice 1 *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_\alpha : x \mapsto \dfrac{x+\alpha}{1+\alpha x}$.*

2.1 Domaine d'étude

Il est souvent très commode pour étudier une fonction de restreindre son domaine d'étude. Nous allons rencontrer diverses situations où l'on peut étudier une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ sur un sous-ensemble $X \subset D$ pour connaître le comportement de la fonction sur tout son ensemble de définition.

2.2 Symétries

Proposition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- La fonction $u_a : x \mapsto f(x) + a$ est définie sur D et son graphe se déduit de $\mathcal{G}_f$ par la translation de vecteur $a.\vec{j}$.
- La fonction $v_a : x \mapsto f(x+a)$ est définie sur $D_a = \{x - a \mid x \in D\}$ et son graphe se déduit de celui de $\mathcal{G}_f$ par la translation de vecteur $-a.\vec{i}$.
- La fonction $u_a : x \mapsto f(a-x)$ est définie sur $D_a = \{a - x \mid x \in D\}$ et son graphe se déduit de $\mathcal{G}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $x = \dfrac{a}{2}$.
- La fonction $u_a : x \mapsto a - f(x)$ est définie sur D et son graphe se déduit de $\mathcal{G}_f$ par symétrie par rapport à la droite d'équation $y = \dfrac{a}{2}$.

Démonstration :admise.

Exemple

- Le graphe de $f : x \mapsto (4-x)^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ par la symétrie par rapport à la droite d'équation $x = 2$
- Le graphe de $g : x \mapsto x^2 + 4$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur $4\vec{j}$.
- Le graphe de $h : x \mapsto (x+4)^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ par la translation de vecteur $-4\vec{i}$.
- Le graphe de $k : x \mapsto 4 - x^2$ se déduit de celui de $x \mapsto x^2$ par la symétrie par rapport à la droite d'équation $y = 2$.

Dessin :

Définition: Parité/Imparité

Soit $f : D \mapsto \mathbb{R}$ une fonction où l'ensemble D est symétrique par rapport à 0. On dit que :

- f est **paire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = f(x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'axe $(O, \vec{j})$.
- f est **impaire** si pour tout $x \in D$, $f(-x) = -f(-x)$. Son graphe est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

Exemple

— la fonction inverse est impaire.
— la fonction carrée est paire.

Exercice 2 *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \sqrt{1+x^2}$ est paire.*

Définition: Fonction périodique

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction.

— Le réel $T \in \mathbb{R}^\star$ est une **période** de f si :
  — pour tout $x \in D$, $x + T \in D$ et $x - T \in D$
  — pour tout $x \in D$, $f(x+T) = f(x)$.
— On dit que f est périodique s'il existe $T \in \mathbb{R}$ tel que f soit une période de f. On dit alors que f est T-périodique.

Remarque 1 *Si T est une période d'une fonction f elle n'est pas unique. En effet tout multiple entier $k.T$ où $k \in \mathbb{Z}$ est une période de f.*

Exemple

Les fonction sinus et cosinus sont périodiques toutes deux de période $T = 2\pi$.

Exercice 3 *Traduire uniquement en écriture mathématique l'assertion "f est périodique".*

Méthode

Pour tracer le graphe d'une fonction périodique de période $T > 0$, il suffit de translater le graphe partiel $\{(x, f(x)) \mid x \in [0, T[\}$ d'un vecteur $kT.\vec{i}$ pour obtenir le graphe de f sur $[kT, (k+1)T[$.

Exercice 4 *Tracer le graphe de la fonction f périodique de période $T = 2$ telle que pour tout $x \in [0; 2[$, $f(x) = x^2 + 1$.*

2.3 Autres transformations

2.4 Opérations sur les fonctions

Les opérations de base $+, -, \times;$ sur les nombres réels s'appliquent naturellement au fonctions à valeurs réelles. On étudie ici une opération supplémentaire qui est propre aux fonctions : la composition de deux fonctions.

Définition: Opérations arithmétiques sur les fonctions

Soient $f : D_1 \to \mathbb{R}$ et $g : D_2 \to \mathbb{R}$ deux fonctions de la variable réelle. Alors la fonction :

- **somme** est définie par $\begin{array}{rccl} f+g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)+g(x) \end{array}$
- **différence** est définie par $\begin{array}{rccl} f-g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)-g(x) \end{array}$
- **produit** est définie par $\begin{array}{rccl} f\times g: & D_1 \cap D_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & f(x)\times g(x) \end{array}$.
- **quotient** est définie, si l'on note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions dans D_2 de l'équation $g(x) = 0$, par $\begin{array}{rccl} \dfrac{f}{g}: & (D_1 \cap D_2)\setminus\mathcal{S} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$

Remarque 2 *Pour le quotient de deux fonctions, il est possible que l'ensemble de définition soit plus grand que $(D_1 \cap D_2) \setminus \mathcal{S}$ car des termes peuvent se simplifier dans le quotient $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ comme dans l'exemple qui suit.*

Exemple

Soient $f : x \mapsto 1+x$ et $g : x \mapsto 1-x^2 = (1-x)(1+x)$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Les fonctions somme, différence, produit et quotient sont respectivement :

- $f + g : x \mapsto 2 + x - x^2$ définie sur $\mathbb{R}$
- $f - g : x \mapsto x^2 + x$ définie sur $\mathbb{R}$
- $f \times g : x \mapsto (1+x)^2(1-x)$ définie sur $\mathbb{R}$
- $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{1+x}{1-x^2}$ définie sur $D = \mathbb{R}\setminus\{-1; 1\}$ mais comme pour tout $x \in D$, $\dfrac{1+x}{1-x^2} = \dfrac{1}{1-x}$ on en déduit que la fonction quotient peut se prolonger sur $D' = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et a pour expression $\dfrac{f}{g} : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Exercice 5 *Montrer que la somme de deux fonctions impaires est une fonction impaire. Qu'en est-il du produit et du quotient si ces deux fonctions sont bien définies ?*

Dans la première partie de ce chapitre nous avions défini la relation d'ordre naturelle $\leq$ sur $\mathbb{R}$. Cette dernière s'étend à l'ensemble des fonctions de D dans $\mathbb{R}$ de la manière suivante.

Définition: Relation d'ordre sur les fonctions à valeurs réelles

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$. On dit que f **est inférieure à** g et on note $f \leq g$ si : pour tout $x \in D$, $f(x) \geq g(x)$.

Exemple

Pour tout $x > 1$, $\dfrac{1}{x} < |x|$ donc la fonction inverse est strictement inférieure à la fonction valeur absolue sur l'ensemble $D =]1; +\infty[$.

Définition: Composition de fonctions

Soient $f : D_2 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ et on suppose que pour tout $x \in D_1$, $g(x) \in D_2$. On appelle **fonction composée de f par g** l'application notée $f \circ g$ définie par :

$$f \circ g : \begin{array}{ccc} D_1 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(g(x)) \end{array}$$

Exemple

Soient $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$ et $g : x \mapsto 1 + x^2$ définie sur R. La composée de f par g est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f \circ g(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Risque d'erreur

Avant de se lancer dans le calcul de l'expression d'une composée il faut bien s'assurer que l'ensemble des images de g appartiennent à l'ensemble de définition de la fonction f. Par exemple la composée de $x \mapsto \sqrt{x}$ par la fonction sinus n'est pas définie car cette dernière prend des valeurs strictement négatives.

Exercice 6 *En reprenant les notations de l'exemple précédent, déterminer l'ensemble de définition et l'expression de la composée $g \circ f$.*

2.5 Monotonie

Définition: Fonctions monotones

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est :

- **croissante** (respectivement strictement croissante) sur D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x \leq y$ (respectivement $x < y$) on a $f(x) \leq f(y)$ (respectivement $f(x) < f(y)$).
- **décroissante** (respectivement strictement décroissante) sur D si pour tout $x, y \in D$ tels que $x \leq y$ (respectivement $x < y$) on a $f(x) \geq f(y)$ (respectivement $f(x) > f(y)$).
- **monotone** (respectivement strictement monotone) si f est décroissante ou croissante (respectivement strictement croissante ou strictement décroissante).

Remarque 3 *La négation de la proposition "f n'est pas monotone" est :*
il existe $x, y, z \in D$ tels que $x \leq y \leq z$ vérifiant la relation $(f(x) < f(y)$ et $f(y) > f(z))$ ou $(f(x) > f(y)$ et $f(y) < f(z))$.

Exercice 7 *Soient f et g deux fonctions croissantes sur un ensemble D. Montrer que :*

1. *$f + g$ est croissante sur D*
2. *$f \times g$ n'est pas nécessairement croissante. (Donner deux exemples).*

Proposition

Soient $f : D_2 \to \mathbb{R}$ et $g : D_1 \to \mathbb{R}$ telle que la composée $f \circ g : D_1 \to \mathbb{R}$ soit bien définie. Si f et g sont monotones (respectivement strictement monotones), alors la composée est monotone (respectivement strictement monotone).

Démonstration :

Exemple

Soient $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $g : x \mapsto x^3$ qui sont respectivement croissantes sur $[-1;+\infty[$ et $[0;+\infty[$. On a donc la composée $f \circ g$ qui est croissante sur $[0;+\infty[$ et admet pour expression $f \circ g : x \mapsto \sqrt{1+x^3}$.

Exercice 8 *Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction monotone telle que pour tout $x \in D$, $f(x) \neq 0$.*

1. *Si $f > 0$ sur D montrer que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D.*
2. *Si $f < 0$ sur D montrer que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D est-ce que $\dfrac{1}{f}$ est monotone sur D ?*
3. *Dans le cas général est-ce que $\dfrac{1}{f}$ est une fonction monotone ?*

On peut représenter simplement la monotonie d'une fonction f à l'aide d'un tableau de variation. Il s'agit d'un tableau représentant les intervalles où f est décroissante à l'aide d'une flèche descendante et les intervalles où f est croissante à l'aide d'une flèche ascendante comme dans l'exemple suivant

x	0		1		$+\infty$
$f(x) = (x-1)^2$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2.6 Fonctions Majorées, minorées, bornées

Définition *Fonctions majorées, minorées, bornées*

Soit $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est sur D :

- **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $f(x) \leq M$.
- **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x)$.
- **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple

- les fonctions de la forme $x \longmapsto ax+b$ où $a \neq 0$ ne sont pas majorées ou minorées sur $\mathbb{R}$.
- la fonction exponentielle est minorée par 0 mais non majorée.
- les fonctions constantes $x \longmapsto k$ sont bornées sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 *Montrer que la fonction* $f : x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$ *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Remarque 4 *La fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *n'est pas majorée si pour tout* $M \in \mathbb{R}$, *il existe* $x_M \in D$ *tel que* $f(x_M) > M$.

Exercice 10 *Exprimer mathématiquement le fait que la fonction* $f : D \to \mathbb{R}$ *n'est pas minorée puis montrer que la fonction inverse n'est pas minorée sur* $\mathbb{R}^\star$.

Méthode

Pour reconnaître graphiquement une fonction majorée (respectivement minorée) il faut et il suffit qu'il existe une droite horizontale $\mathcal{H}$ telle que la courbe représentative $\mathcal{G}_f$ se situe sous (respectivement au-dessus) de la droite $\mathcal{H}$.

Définition: Maximum/minimum d'une fonction

Soit $f : D \to \mathbb{R}$.

- f admet un **maximum** en $a \in D$ si pour tout $x \in D$, $f(x) \leq f(a)$.
- f admet un **minimum** en $a \in D$ si pour tout $x \in D$, $f(x) \geq f(a)$.
- f admet un **extremum** en $a \in D$ si le point a est un maximum ou un minimum.

Risque d'erreur

Une fontion peut être majorée (respectivement minorée) sans admettre de maximum (respectivement minimum). Par exemple,

$$f : \begin{array}{rcl} [1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1 - \frac{1}{x} \end{array}$$

est majorée mais n'admet pas de maximum.

On peut se servir de la valeur absolue d'une fonction pour déterminer si une fonction est bornée à l'aide de la proposition suivante :

Proposition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors f est bornée si et seulement si $|f|$ est majorée.

Démonstration :

2.7 Bijections

On s'interesse aux fonctions bijectives (cf Chapitre 0) de la variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui se caractérisent simplement.

Définition: Fonction bijective

Une fonction $f : D \to E$ est **bijective** si pour tout $y \in E$, l'équation $y = f(x)$ possède une unique solution dans D. Cela revient à dire que tout élément de E admet un antècedant par f dans D.

Exemple

Soit

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

Cette application est bijective. En effet :

1. f est injective : soient x et x' deux réels positifs tels que $f(x) = f(x')$, alors :
$$x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow x^2 - (x')^2 = 0 \Leftrightarrow (x - x') \times (x + x') = 0 \Rightarrow x = x'.$$
2. f est surjective : soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.

Proposition

Soit $f : I \to f(I)$ une application entre un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $f(I)$. Si f est strictement monotone alors f est bijective.

Démonstration

Exercice 11 *Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^3 - 1$ est bijective.*

Définition: Bijection réciproque

Soient D et E deux ensembles et $f : D \to E$ une application bijective. On note maintenant f^{-1} la réciproque de f, c'est-à-dire l'application $g : E \to D$, qui satisfait la condition $f \circ g = Id_E$ et $g \circ f = Id_D$.

Exercice 12 *Soient $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $f(x) = \ln(x + 1) - 2$.*

1. *Montrer qu'il existe une application $g : \mathbb{R} \to]-1, +\infty[$ telle que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, $g \circ f(x) = x$.*
2. *Est-ce que f est bijective ?*

On reconnaît sur ce graphe que le graphe de la fonction exponentielle est le symétrique du graphe de la fonction logarithme par rapport à la première bissectrice. C'est le cas en général pour toute application bijective et sa réciproque.

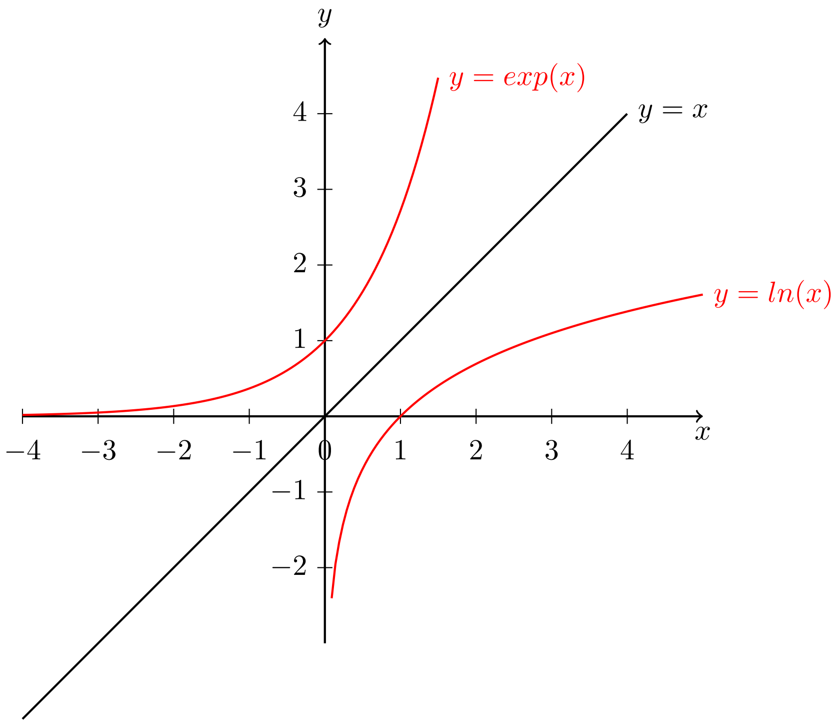

Figure 1 – Graphe de la fonction exponentielle et de sa réciproque, le logarithme

Proposition

Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, $f : I \to J$ une application bijective et $f^{-1} : J \to I$ son application réciproque.
Alors le graphe $\mathcal{C}_f$ est le symétrique de $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ par rapport à l'axe d'équation $y = x$.

Démonstration : admise

3 Dérivation

On considère dans tout le chapitre I un intervalle.

Définition : taux d'accroissement

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$ et $h \neq 0$ tel que $a + h \in I$. On appelle **taux d'accroissement de f en a d'amplitude h** le réel $\Delta_f(a,h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Remarque 5 *On note parfois le taux d'accroisement $\Delta(a,h)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la fonction en question.*

Exemple de taux d'accroissement

Soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, son taux d'accroissement est

$$\Delta_f(a,h) = \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \frac{h^2 + 2ah}{h} = h + 2a$$

Définition : dérivabilité en un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction, $a \in I$. On dit que f est **dérivable en a** si le taux d'accroissement $h \mapsto \Delta_f(a,h)$ admet une limite en 0, c'est à dire

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

existe et est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite ou encore $\frac{d}{dx}(f(a))$.

Remarque 6 *Une version alternative de cette définition est de demander que l'application $h \mapsto \Delta_f(a,h)$ admette un prolongement continue en* 0*.*

Exemple : dérivée en un point

Reprenons l'exemple précédent. La fonction carrée est dérivable en tout point $a \in \mathbb{R}$ car $\lim_{h\to 0} \Delta_f(a,h) = \lim_{h\to 0} h + 2a = 2a$. Ainsi $f'(a) = 2a$.

Méthode : Montrer qu'une application est dérivable en un point

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en un point a, on suit en général les étapes suivantes :

1. On forme le taux d'accroissement $\Delta(a,h)$
2. Simplifie au maximum son expression en essayant de simplifier la partie en "h" au dénominateur.
3. On fait tendre h vers 0 et on détermine la valeur de la limite.
4. Cette limite vaut $f'(a)$.

Exercice 13 *Montrer que la fonction $g : x \mapsto x^3 - x - 1$ est dérivable en $a = 1$ et calculer $g'(1)$.*

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable en un point $a \in I$, notons $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f. Alors, la **tangente à $\mathcal{C}_f$ en** $(a, f(a))$ est la droite d'équation cartésienne $y = f(a) + f'(a) \times (x - a)$.

Exemple

Soit $f : x \mapsto x^3 - x - 1$. On a $f(1) = -1$ et f dérivable en 1 de dérivée $f'(1) = 2$. On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en $(1, -1)$ d'équation $y = 2x - 3$.

Exercice 14 *Déterminer l'équation de la tangente en $x = 0$ de l'application $f : x \mapsto (x+1)^2 + 1$. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ ainsi que $T_0(f)$.*

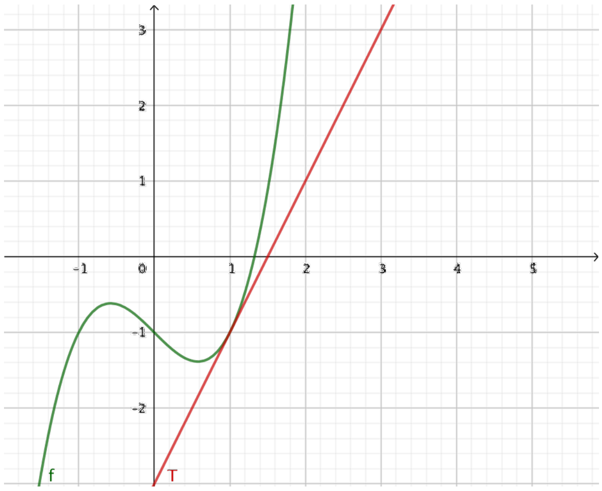

FIGURE 2 – courbe $\mathcal{C}_f$ et sa tangente $T_1(f)$

Définition : Dérivabilité

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est **dérivable sur I** si pour tout $a \in I$ l'application f est dérivable au point a. L'application qui à $x \in I$ associe le nombre dérivé $f'(x)$ est appelée **la dérivée de f** et est notée f'.

Remarque 7 *Lorsqu'il n'y aura pas d'ambigüité sur l'ensemble de définition on dira que f est dérivable sans faire référence à son ensemble de départ.*

Exemple

La fonction $f : x \mapsto x^2$ est dérivable de dérivée $f'(a) = 2a$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, nous avons déjà vu que $\lim\limits_{h\to 0} \Delta(a,h) = 2a$.

3.1 Opérations sur les dérivées usuelles

Les fonctions dérivables le restent par certaines opérations tout comme la continuité. On a le théorème suivant :

Théorème : stabilité par opérations algébriques

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Alors les fonctions suivantes sont dérivables sur I et leur nombre dérivé en $x \in I$ vaut :

1. $f + g$ et $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
2. $f \times g$ et $(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$
3. $\dfrac{f}{g}$ si g ne s'annule pas et $(\dfrac{f}{g})'(x) = \dfrac{f'(x) \times g(x) - g'(x) \times f(x)}{(g(x))^2}$.

Exercice 15 *Soient $f : x \mapsto (x+2)e^{x^2}$ et $g : x \mapsto |x-2| + \ln(x)$.*

1. *Déterminer les ensembles de définition de f et g.*
2. *Calculer les dérivées de f et g.*
3. *En déduire l'expression des dérivées de $f+g$, $f \times g$ et $\dfrac{f}{g}$ sur les intervalles où ces fonctions sont dérivables.*

3.2 Dérivée d'une composée de fonctions

Théorème

Soient I, J deux intervalles et $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors l'application $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable et pour tout $x \in I$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x))$$

Exemple

Soient $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto e^x + \ln(x)$ dérivables toutes deux sur $]0, +\infty[$.

Remarquons que f est à valeurs strictement positives donc $g \circ f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

On a pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x$ et $g'(x) = e^x + \dfrac{1}{x}$. On en déduit que pour tout $x > 0$,

$$(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'(f(x)) = 2x \times (e^{1+x^2} + \frac{1}{1+x^2})$$

À l'aide du théorème des dérivées de fonctions composées et de la définition de fonction puissance $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(x)}$ pour deux fonctions f et g à valeurs strictement positives, on peut obtenir que f^g est dérivable.

Corollaire

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs strictement positives. Alors $x \mapsto f(x)^{g(x)}$ est dérivable sur I.

Méthode

Soient $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications dérivables. Pour calculer la dérivée de $g \circ f$ en $x \in I$:

1. on calcule d'abord les dérivées f' et g'.
2. on calcule $g'(f(x))$.
3. on réalise le produit $f'(x) \times g'(f(x))$ qui est la dérivée $(g \circ f)'(x)$.

Exercice 16 *Calculer la dérivée de* $x \mapsto 3^{x^2+2}$ *sur* $\mathbb{R}$.

3.3 Dérivées de fonctions réciproques

On sait qu'une fonction strictement monotone $f : I \to f(I)$ est bijective on peut donc s'intéresser à la dérivabilité de sa réciproque.

Théorème : dérivabilité de l'application réciproque
Soit $f : I \to J$ une application bijective dérivable telle que pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$ (ou $f'(x) < 0$). Alors $f^{-1} : J \to I$ est dérivable et pour tout $x \in J$,

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Démonstration :

Exemple
Soit $f : x \mapsto x^3 + 2x + 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Montrons que f est bijective et déterminons $(f^{-1})'(1)$

1. La fonction f est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ donc f est strictement monotone. De plus $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est bijective.
2. Déterminons $f^{-1}(1)$. On a

$$\begin{aligned} & f(x) = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3 + 2x + 1 = 1 \\ \Leftrightarrow\quad & x^3 + 2x = 0 \quad \text{ainsi } f^{-1}(1) = 0. \\ \Leftrightarrow\quad & x \times (x^2 + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow\quad & x = 0 \end{aligned}$$

3. Par application de la formule de dérivée d'une fonction réciproque, on en déduit que $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \dfrac{1}{3 \times 0^2 + 2} = \dfrac{1}{2}$.

Exercice 17 *Montrer à partir de la formule de dérivation des fonctions réciproques que que la dérivée de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$ est donnée pour tout $x > 0$ par $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.*

3.4 Lien entre dérivée et monotonie

Théorème
Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout $x \in I$:

1. $f'(x) = 0$, alors f est constante.
2. $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante.
3. $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante.

Démonstration : admise (elle sera donnée au chapitre sur la dérivabilité)

On peut affiner le théorème précédent on s'autorisant un nombre fini de point d'annulation de la dérivée tout en conservant le caractère strictement monotone de l'application.

Théorème

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable telle que $f' \geq 0$ ($f' \leq 0$) et f' ne s'annule que sur un nombre fini de points. Alors f est strictement croissante (décroissante) sur I.

Démonstration :admise

Exemple

La fonction cube $f : x \mapsto x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ de dérivée $f'(x) = 3x^2 \geq 0$. Elle ne s'annule qu'en $x = 0$ donc d'après le théorème précédent on obtient que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3.5 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

3.5.1 Dérivées $k$ième

On s'intéresse dans cette sous-section à la notion de dérivée successive d'une application car il est généralement possible de dériver plusieurs fois une application sur un intervalle ouvert I sur laquelle elle est définie.

Exemple

Soit l'application inverse $inv :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $inv(x) = \frac{1}{x}$. Il est possible de dériver inv sur $]0, +\infty[$ autant de fois que l'on souhaite. On a pour tout $x > 0$:

1. $inv'(x) = \frac{-1}{x^2}$
2. $inv''(x) = \frac{2}{x^3}$
3. $inv^{(3)} = \frac{-6}{x^4}$

Définition : dérivée n-ième

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application p fois dérivable en $x \in I$. On appelle **dérivée p-ième de f en x** le nombre noté $f^{(p)}(x)$.

Remarque 8 *La dérivée p-ème en un point x d'une fonction f vérifie la relation de récurrence suivante*

$$f^p(x) = \left(f^{(p-1)}\right)'(x) = \left(f'\right)^{(p-1)}(x)$$

Exercice 18 *Montrer par récurrence sur n que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^\star$, $inv^n(x) = \frac{n!(-1)^n}{x^{n+1}}$.*

Risque d'erreur

Il ne faut pas confondre $f^p(x)$ qui est la puissance p de $f(x)$ avec la dérivée p-ième évaluée en x.

3.5.2 Définitions

Définition

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f **est de classe $\mathcal{C}^1$ sur** I lorsque f est dérivable sur I et son application dérivée f' est continue sur I.

Exemple

Reprenons l'exemple de la fonction inverse sur $]0, +\infty[$. On remarque que sa dérivée $x \mapsto \dfrac{-1}{x^2}$ est continue sur $]0, +\infty[$, on en déduit que inv est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Proposition : Opérations sur les applications $\mathcal{C}^1$

Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux applications de classes $\mathcal{C}^1$ sur I un **intervalle ouvert**. Alors :

1. $f + g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
2. $f \times g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
3. $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si g ne s'annule pas sur I.
4. lorsque cela a un sens, la composée $f \circ g$ est de classe $\mathcal{C}^1$
5. l'application exp et les applications polynomiales sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
6. les applications racine carrée, ln et inverse sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Méthode : Montrer qu'une application est de classe $\mathcal{C}^1$

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application. Pour montrer que celle-ci est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I on suit les étapes suivantes :

1. on étudie la dérivabilité de f sur I
2. si cela est possible, on calcule la dérivée f' sur I
3. on montre la continuité de f' sur I à l'aide des théorèmes de continuité des fonctions classiques ou bien si d'éventuels points posent problème, on montre que $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$.

Exemple

Soit $\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}$. Montrons que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

1. Sur $]0, +\infty[$ l'application f est un produit d'applications dérivables puisqu'on sait que $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^\star$.
2. En $x = 0$ il faut vérifier que la fonction f est bien dérivable. On revient à la définition.

Pour tout $x > 0$, $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{x^2\ln(x)}{x} = x\ln(x)$ qui tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par croissances comparées ainsi $f'(0) = 0$.

3. Les applications carrées et ln sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ donc f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^\star$ et d'après la formule de dérivée d'un produit. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x.\ln(x) + x^2.\dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) + x$
On vérifie donc la continuité de f' en 0 en revenant à la définition. Par croissances comparées on sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0 = f'(0)$.
4. On en conclut que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 19 *Montrer que l'application* $\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} x^{x^2} & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases} \end{array}$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{R}_+$.

4 Asymptotes

Nous définissons ici les asymptotes à la courbe représentative d'une fonction en un point. Il s'agit d'une droite permettant de visualiser la limite d'une fonction en l'infini lorsqu'elle existe et que la fonction est suffisamment régulière.

4.1 Asymptotes verticales

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to a^+ (\text{ou } a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f.

Dessin

Exemple

La fonction inverse admet une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

4.2 Asymptotes horizontales

Définition

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$. Si $\lim\limits_{x\to+\infty (\text{ou } -\infty)} f(x) = a$, on dit que la droite d'équation $y = a$ est une **asymptote horizontale** à la courbe de f.

Exemple

La fonction inverse admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Dessin :

4.3 Asymptotes obliques

Définition

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y = ax + b$ ($a \neq 0$). On dit que la droite (d) est une **asymptote oblique** à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ lorsque

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

Dessin

Exemple

La courbe représentative associée à l'application $f : \begin{array}{ccc}]2, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x^2 - 2x + 2}{x - 2} \end{array}$ admet une asymptote oblique en $+\infty$ d'équation $y = x$.

Exercice 20 *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (et de $-\infty$ aussi).*

5 Étude d'une fonction

On détaille dans cette section le plan d'étude d'une fonction f de la variable réelle à valeurs réelles. On commence par tenter de restreindre le domaine de d'étude de la fonction f en suivant ces étapes.

Méthode

Restriction du domaine d'étude

1. si l'ensemble de définition D de f n'est pas donné on commence par le déterminer une fois connue l'expression $f(x)$.
2. si f est périodique de période T, c'est-à-dire qu'il existe $a \in D$ et $T \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = f(a+T)$ on peut restreindre l'étude de f à l'ensemble $D \cap [a, a+T]$ (pour T éventuellement le plus petit possible)
3. s'il existe $a \in D$ tel que pour tout $x \in D$, $f(b - x) = f(x)$ alors par symétrie il suffit d'étudier la fonction f sur $D \cap [\frac{b}{2}, +\infty[$

On détermine ensuite les variations de f.

Méthode

Tableau de variations de f

1. si la fonction possede des variations évidentes (règles de monotonie des fonctions usuelles, propriété sur les fonctions monotones, etc..) on peut directement indiquer à l'aide de flèches les variations de f
2. la plupart du temps, il est recommandé de dériver la fonction f en justifiant soigneusement qu'elle est dérivable puis en déterminant son signe.
3. on complète le tableau de variations avec les valeurs prises par cette dernière aux endroits où un changement de variations à lieu ou bien les limites aux bornes du domaine de définition.

Méthode

Représentation graphique

- on se sert du tableau de variations pour déterminer l'allure de la courbe ainsi que les extrema.
- Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites au borne de l'intervalle de définition :
  - Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim\limits_{x\to+\infty} f$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f$.
  - Si f est définie sur $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, a^+ et a^-.
- On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en a^+ ou a^-) sinon on détermine si $\mathcal{G}_f$ admet une asymptote oblique.

6 Fonctions usuelles

6.1 Fonctions circulaires réciproques

6.1.1 Fonction Arc sinus

Proposition

La restriction de la fonction sinus à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est strictement croissante, bijective et a pour image $[-1, 1]$.

On en déduit l'existence d'une bijection réciproque que l'on définit comme suit :

Définition: Fonction Arcsin

La bijection réciproque de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ est appelée **fonction Arcsinus**, notée *Arcsin*, définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} Arcsin: & [-1,1] & \longrightarrow & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \sin(y) = x \end{array}$$

Exemple

Voici quelques valeurs remarquables prises par la fonction *Arcin* :

- $Arcsin(1) = \dfrac{\pi}{2}$
- $Arcsin(0) = 0$
- $Arcsin(-1) = -\dfrac{\pi}{2}$
- $Arcsin(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 21 *Exprimer pour tout* $x \in [-1;1]$, $\cos(Arcsin(x))$ *seulement en fonction de* x.

Proposition

La fonction *Arcsin* est strictement croissante sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$Arcsin' : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

<u>Démonstration</u> :

6.1.2 Fonction Arc cosinus

Proposition

La restriction de la fonction cosinus à $[0, \pi]$ est strictement décroissante, bijective et a pour image $[-1, 1]$.

On en déduit l'existence d'une bijection réciproque que l'on définit comme suit :

Définition: Fonction Arcos

La bijection réciproque de la restriction de la fonction cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ est appelée **fonction Arcosinus**, notée *Arcos*, définie comme suit :

$$\begin{array}{rccl} Arcos: & [-1,1] & \longrightarrow & [0, \pi] \\ & x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [0, \pi] \text{ tel que } \cos(y) = x \end{array}$$

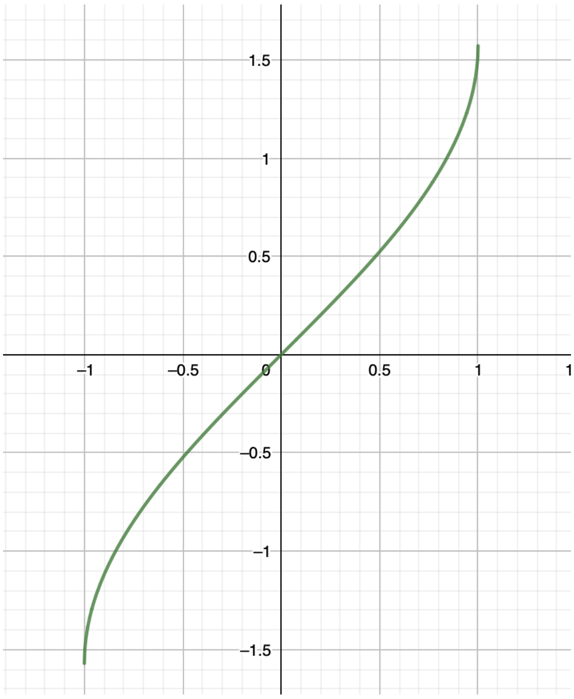

FIGURE 3 – Graphe de la fonction Arcsinus

Exemple

Voici quelques valeurs remarquables prises par la fonction $Arcos$:

- $Arcos(1) = 0$
- $Arcos(0) = \dfrac{\pi}{2}$
- $Arcos(-1) = \pi$
- $Arcos(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\pi}{4}$

Exercice 22 *Exprimer pour tout $x \in [-1;1]$, $\sin(Arcos(x))$ seulement en fonction de x.*

Proposition

La fonction $Arcos$ est strictement décroissante sur $[-1,1]$, dérivable sur $]-1,1[$ de dérivée :

$$Arcos' : x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Démonstration :

6.1.3 Fonction Arctangente

Nous terminons l'étude des fonctions circulaires réciproques par la fonction arctangente qu'il est légitime de définir grâce à cette proposition.

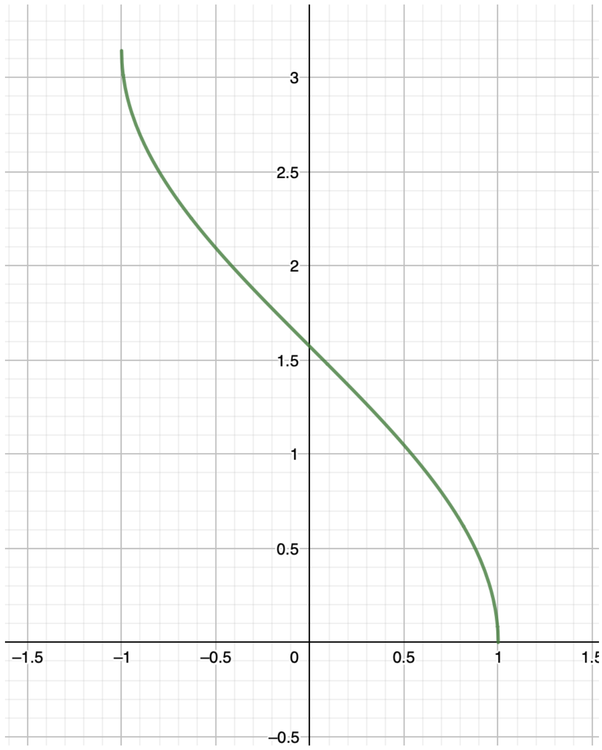

Figure 4 – Graphe de la fonction Arcosinus

Proposition

La restriction de fonction tangente à $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est strictement croissante, bijective et a pour image $\mathbb{R}$.

On en déduit l'existence d'une bijection réciproque que l'on définit comme suit :

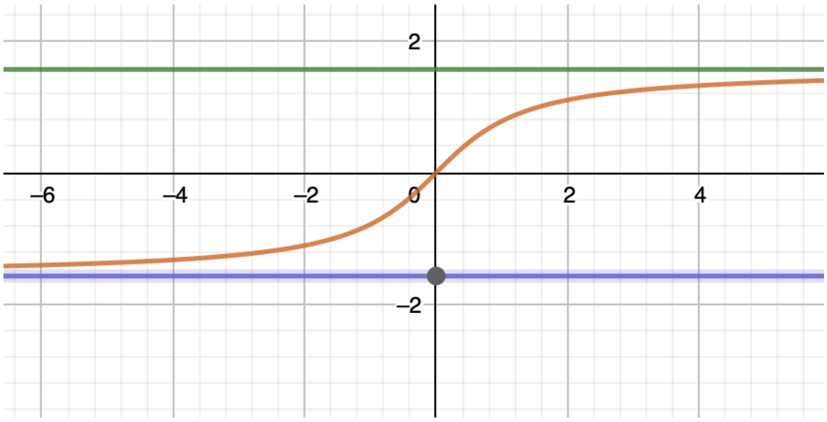

Figure 5 – Graphe de la fonction Arctangente

Définition: Fonction Arctan

La bijection réciproque de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ est appelée **fonction Arctangente**, notée *Arctan*, définie comme suit :

$$Arctan : \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow &]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[\\ x & \longmapsto & \text{l'unique } y \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}] \text{ tel que } \tan(y) = x \end{array}$$

Exemple

Voici quelques limites et valeurs remarquables prises par la fonction *Arctan* :

- $Arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$
- $Arctan(0) = 0$

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} Arctan(x) = \frac{\pi}{2}$
- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} Arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$

Proposition

La fonction *Arctan* est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et dérivable de dérivée :

$$Arctan' : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration :

Exercice 23 *Simplifier les nombres suivants :*

- $Arctan(tan(\frac{3\pi}{4}))$
- $Arctan(tan(\frac{5\pi}{4}))$
- $Arctan(tan(\frac{7\pi}{4}))$

6.2 Fonctions puissances entières

On définit les fonctions puissances entières sur $\mathbb{R}^\star$.

6.3 Fonction puissance entière

Définition *Puissance entière*

Soit $x \in \mathbb{R}^\star$ et $m \in \mathbb{Z}$. Alors on définit la **puissance de x par l'entier m**, qui se lit "x puissance m" la quantité suivante :

- si m est un entier positif : $x^m = \prod_{k=1}^{m} x$.
- si m est un entier strictement négatif et $x \neq 0$: $x^m = \prod_{k=1}^{-m} \frac{1}{x}$.

Proposition

Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^\star$. Alors :

1. $x^n \times x^m = x^{n+m}$
2. $(x \times y)^n = x^n \times y^n$
3. $(x^n)^m = x^{nm}$
4. $y^{-n} = \dfrac{1}{y^n}$
5. $\left(\dfrac{x}{y}\right)^n = \dfrac{x^n}{y^n}$
6. $\dfrac{y^n}{y^m} = y^{n-m}$

Démonstration Admise.

Définition *Fonction puissance entière*

Soit $m \in \mathbb{Z}$. On appelle **fonction puissance m** la fonction :

— si $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^m = \prod_{k=1}^{m} x \end{array}$$

— si m est un entier strictement négatif :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^m = \prod_{k=1}^{-m} \frac{1}{x} \end{array}$$

Remarque 9 *Les fonctions puissances m sont des fonctions polynomiales de degré m lorsque m est un entier naturel mais pas dans le cas d'un entier strictement négatif.*

Proposition
Soit $m \in \mathbb{Z}$. Alors :
- si m est pair, la fonction puissance m est paire.
- si m est impair, la fonction puissance m est impaire.

Démonstration :

6.4 Fonction partie entière

Définition *Partie entière*
Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle **partie entière** de x l'unique entier, noté $\lfloor x \rfloor$, tel que :

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$

Exemple
$\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor 3,1 \rfloor = 3$ et $\lfloor 3,9 \rfloor = 3$

Remarque 10 *Comme le montre l'exemple précédent, des nombres différents peuvent avoir des parties entières identiques.*

Risque d'erreur
La partie entière d'un nombre n'est pas l'entier le plus proche de ce nombre mais l'entier qui lui est le plus proche inférieurement.

Définition *Fonction partie entière*
La fonction partie entière est la fonction suivante :

$$\lfloor . \rfloor : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$$

Remarque 11 *On constate sur le graphe que la fonction partie entière n'est pas continue. La continuité d'une fonction est un concept que nous approfondirons plus tard dans l'année à l'intérieur d'un chapitre spécifique.*

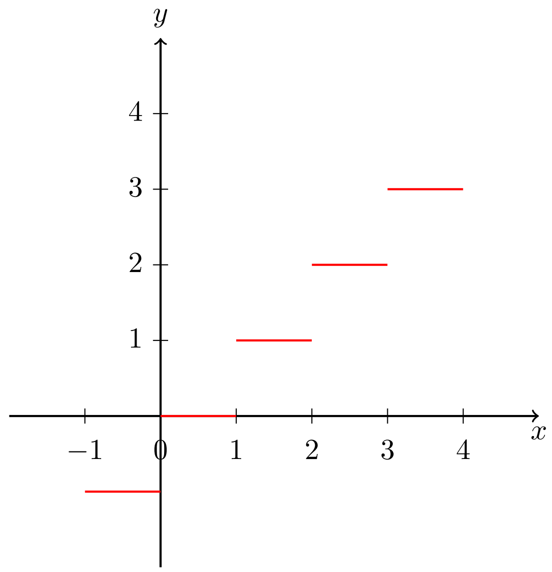

Figure 6 – Graphe de la fonction partie entière

Proposition

La fonction partie entière est croissante.

Démonstration.

Exercice 24

1. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{N}^\star$, $k\lfloor x \rfloor \leq \lfloor kx \rfloor$
2. *Montrer que pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *et* $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$, *l'équation* $\lfloor 3x + 1 \rfloor = 12$.
4. *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{N}^\star$, $\lfloor \frac{\lfloor kx \rfloor}{k} \rfloor = \lfloor x \rfloor$.

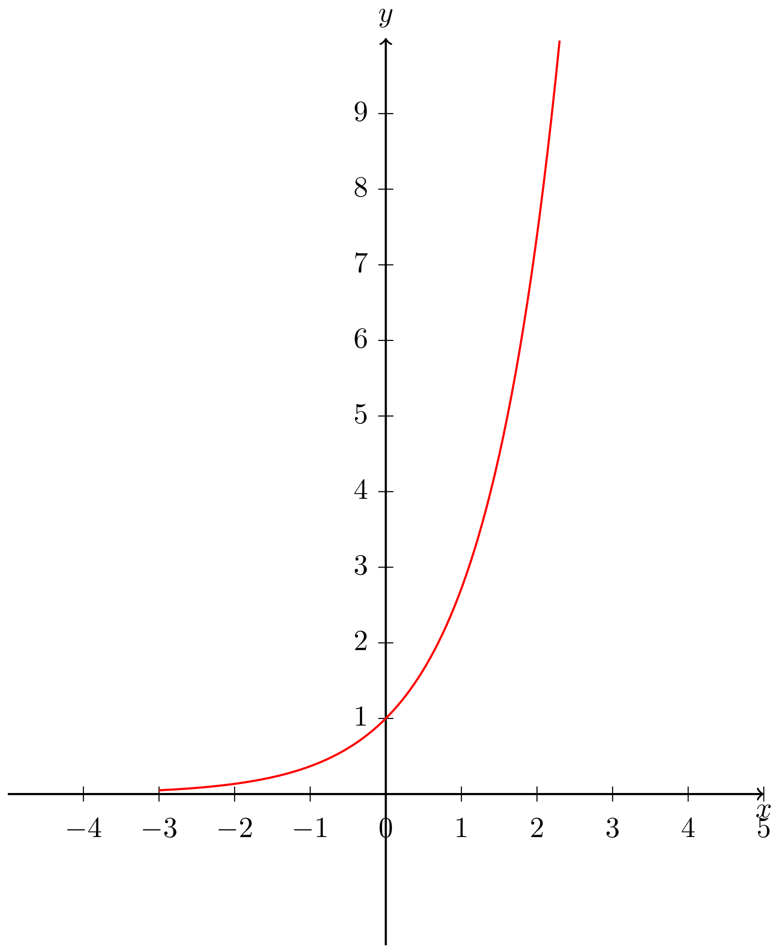

Figure 7 – Graphe de la fonction partie exponentielle

6.5 La fonction exponentielle

Définition *Fonction exponentielle*
La fonction exponentielle est l'unique fonction, notée exp, définie sur $\mathbb{R}$ telle que $\exp' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.

Proposition
Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

1. $\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y)$
2. pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$
3. $exp(-y) = \dfrac{1}{\exp(y)}$
4. $\exp(x - y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Démonstration.

Proposition

La fonction exponentielle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $1 + x \leq \exp(x)$.

6.5.1 La fonction logarithme

Définition *Logarithme*

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$. Le **logarithme népérien** de x est l'unique nombre réel, noté $\ln(x)$, tel que $\exp(\ln(x)) = x$.

Exemple

Comme $\exp(0) = 1$ on en déduit que $\ln(1) = 0$ car $\exp(\ln(1)) = 1$.

Proposition

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$:

1. $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln(\frac{1}{y}) = -\ln(y)$
3. $\ln(\frac{x}{y}) = \ln(x) - \ln(y)$
4. $\ln(x^n) = n\ln(x)$

Démonstration.

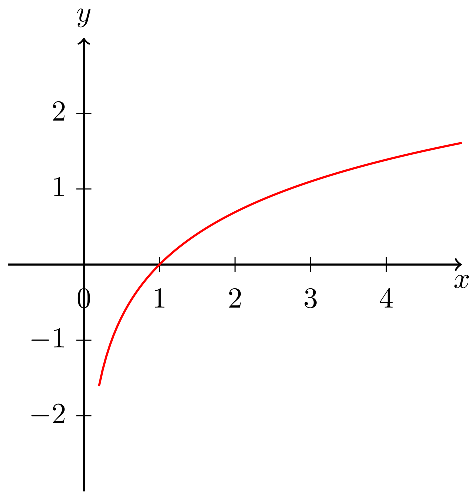

FIGURE 8 – Graphe de la fonction logarithme

Définition *Fonction logarithme*
La fonction logarithme est la fonction :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x) \end{array}$$

Proposition
La fonction logarithme est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^\star$.

Démonstration.

Définition: Fonction logarithme en base a
Soit $a > 0$ différent de 1. La **fonction logarithme en base a** est la fonction :

$$log_a : \begin{array}{ccc}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{lnx}{lna} \end{array}$$

Exemple
- Si $a = e$ on retrouve le logarithme népérien $log_e = ln$.
- Si $a = 10$ on obtient le **logarithme décimal** et pour $a = 2$ le **logarithme binaire** fort employé en informatique dans le calcul de complexité de certains algorithmes.

Proposition

Soit $a > 0$ différent de 1. On a :

1. log_a bijective de $\mathbb{R}_+^\star$ vers $\mathbb{R}$ qui est strictement croissante si $a > 1$ et strictement décroissante si $0 < a < 1$.
2. Pour tous $x, y > 0$, $log_a(xy) = log_a(x) - log_a(y)$.
3. Pour tout $x > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, $log_a(x^n) = n \times log_a(x)$.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\ln(1 + x) \leq x$.

6.6 Fonctions puissances générales

Définition *puissance*

Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors la **puissance de x par a**, qui se lit "x puissance a" est le nombre $x^a = \exp(a \ln(x))$.

Exemple

— $(2)^{\frac{1}{3}} = \exp(\dfrac{\ln(2)}{3})$ noté également $\sqrt[3]{2}$.

— pour tout $a \in \mathbb{R}$, $1^a = 1$. En effet :

$$1^a = \exp(a \ln(1)) = \exp(a \times 0) = \exp(0) = 1.$$

Proposition

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$:

1. $(xy)^a = x^a \times y^a$
2. $(x^a)^b = x^{ab}$

Définition *Fonction puissance*

Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction puissance est la fonction suivante :

$$\varphi_a : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^a \end{array}$$

Remarque 12 *On considère certains cas particuliers :*

1. φ_0 *est la fonction constante égale à* 1 *;*
2. φ_1 *est la fonction identité de* $\mathbb{R}_+^\star$

Remarque 13 *Les fonctions puissances en toute généralité sont définies sur* $\mathbb{R}_+^\star$ *mais pour les puissantes entières naturelles elles sont définies sur* $\mathbb{R}$ *tout entier et pour les puissantes entières négatives sur* $\mathbb{R}^\star$*.*

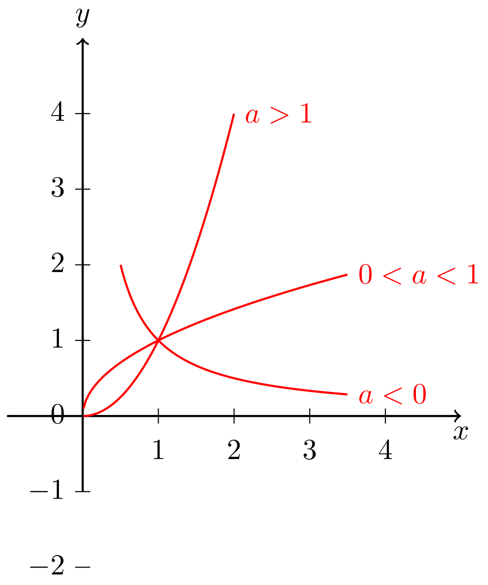

Figure 9 – Graphe des fonctions puissances

Proposition
Prolongement en 0

Si $a > 0$, la fonction puissance φ_a se prolonge en $x = 0$ et ainsi prolongée on a

$$\varphi_a(0) = 0$$

Proposition
Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors si $a \geq 0$, la fonction puissance a est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^\star, \quad \varphi'(x) = ax^{a-1}$$

Démonstration.

6.7 Croissances comparées

La notion de limite d'une fonction en un point ou bien en l'infini a déjà été rencontrée en classe de terminale. Nous développerons ce concept dans le chapitre consacré à la continuité. Néanmoins, on peut donner une première version intuitive de cette notion comme étant la quantité la plus proche y de $f(x)$ lorsque x tend vers a. On note ainsi $\lim_{x\to a} f(x) = y$. Un point important est que lorsqu'une fonction est continue en un point a, sa limite en a est égale à son image $f(a)$. Ceci n'arrive pas nécessairement lorsque il existe des indéterminations du type limite d'un produit ou d'un quotient dont la limte des facteurs sont $\infty \times 0$, $\frac{0}{0}$ ou encore $\frac{\infty}{\infty}$.
On a dans certains cas des théorèmes de croissance comparée pour nous aider à lever cette difficulté.

Proposition

Soit P et Q deux fonctions polynomiales de degré respectif n et m et de coefficient dominant respectif a_n et b_m. On distingue 3 cas :

1. si $n = m$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$.
2. si $n > m$, alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = signe(\frac{a_n}{b_m}) \times +\infty$
3. si $n < m$ alors $\lim_{x\to+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

Démonstration :

Théorème

Soit $a > 0$. Alors :

— $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^a} = 0$

— $\lim_{x\to+\infty} x^a \times \exp(-x) = 0$

Démonstration.

Exercice 25 *Montrer que* $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(2x)}{1+x^2} = 0$

7 Fonctions hyperboliques

7.1 Cosinus hyperbolique

Définition: Fonction cosinus hyperbolique

La fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch, est définie comme suit

$$ch: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{array}$$

Proposition

La fonction cosinus hyperbolique est :

1. paire
2. dérivable de dérivée $sh : x \mapsto \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$
3. strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
4. $\lim_{x\to+\infty} ch(x) = +\infty$

Démonstration :

Exercice 26 *Montrer que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $ch(x) \geq 1 + \dfrac{x^2}{2}$.

7.2 Sinus hyperbolique

Définition: Fonction sinus hyperbolique

La fonction **cosinus hyperbolique**, notée sh, est définie comme suit

$$ch: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \end{array}$$

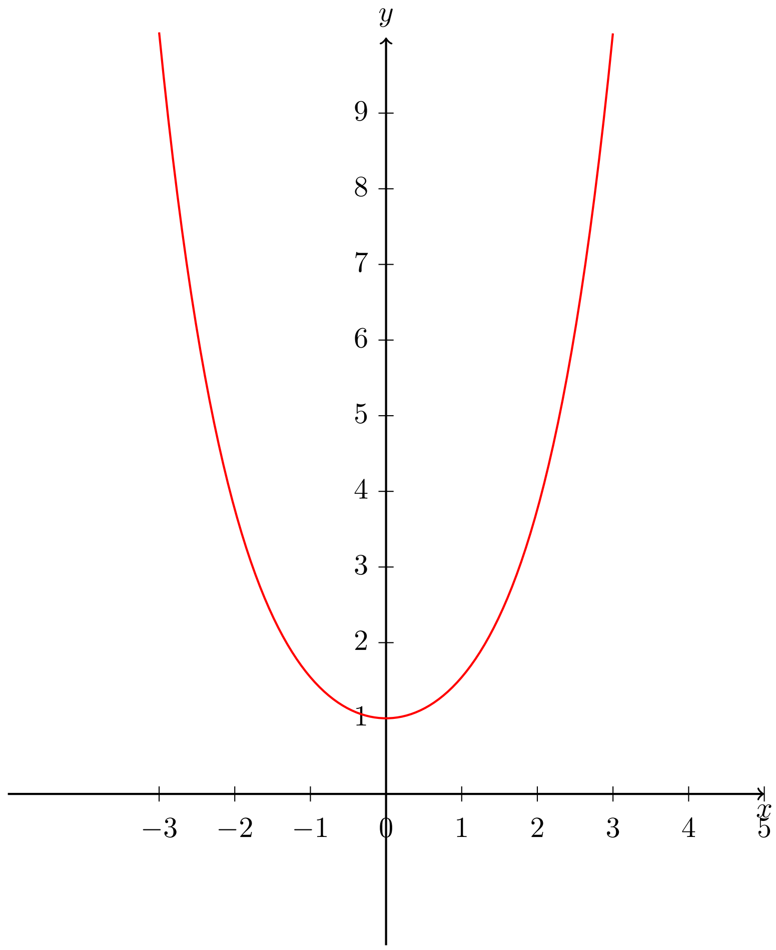

FIGURE 10 – Graphe de la fonction cosinus hyperbolique

Proposition

La fonction sinus hyperbolique est :

1. impaire
2. dérivable de dérivée ch
3. strictement croissante sur $\mathbb{R}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} sh(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to\infty} sh(x) = -\infty$

Démonstration :

Exercice 27 *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $sh(x) \geq x$.*

7.3 Fonction tangente hyperbolique

Définition: Fonction tangente hyperbolique

La fonction **tangente hyperbolique**, notée th, est définie comme suit

$$ch : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{sh(x)}{ch(x)} \end{array}$$

Proposition

La fonction tangente hyperbolique est :

1. impaire
2. dérivable de dérivée $\dfrac{1}{ch^2(x)} = 1 - th^2(x)$
3. strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} th(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to\infty} th(x) = -1$

Exercice 28 *Déterminer une primitive de la fonction th sur $\mathbb{R}$.*

7.4 Formules de trigonométrie hyperbolique

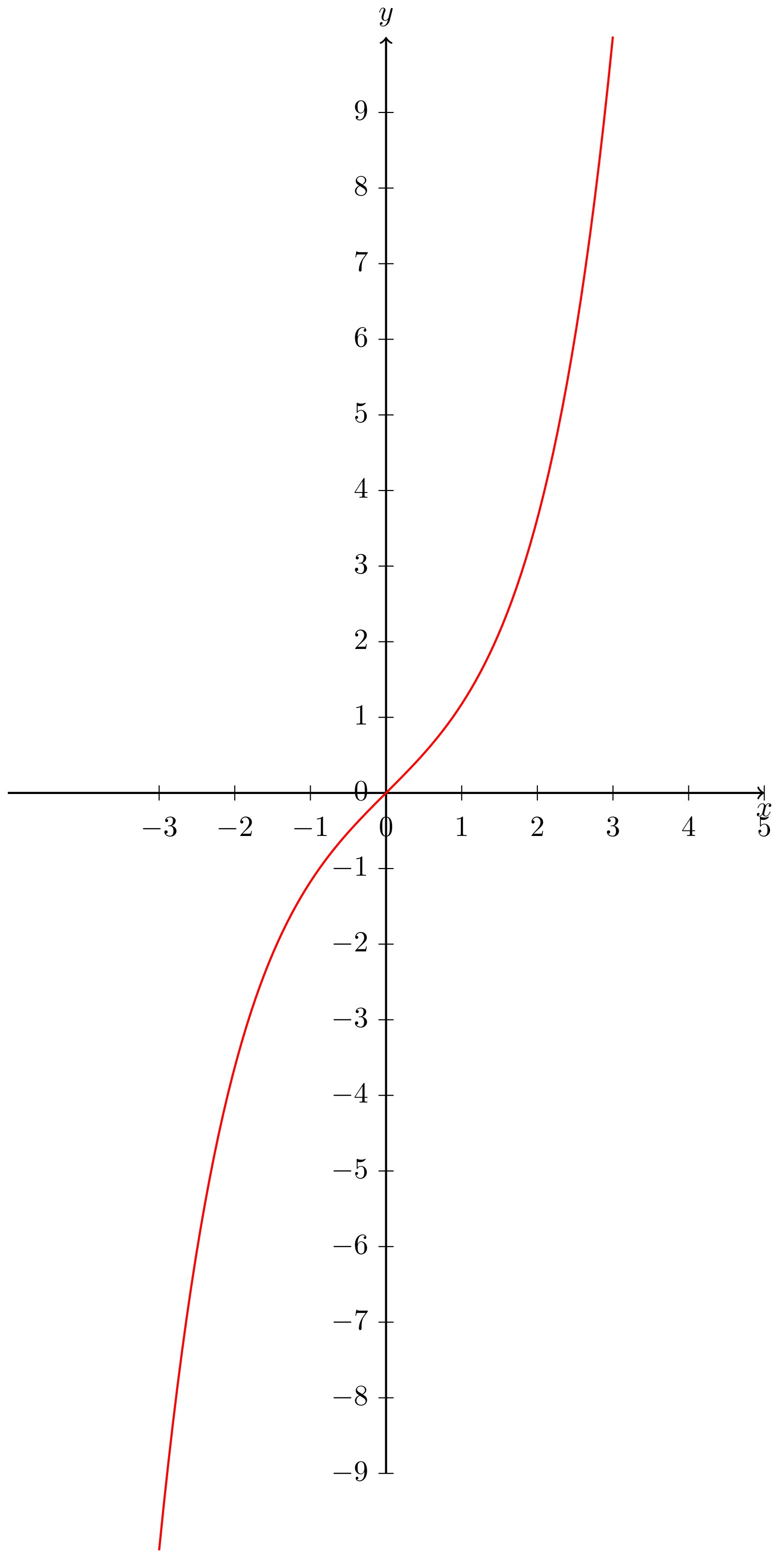

Figure 11 – Graphe de la fonction cosinus hyperbolique

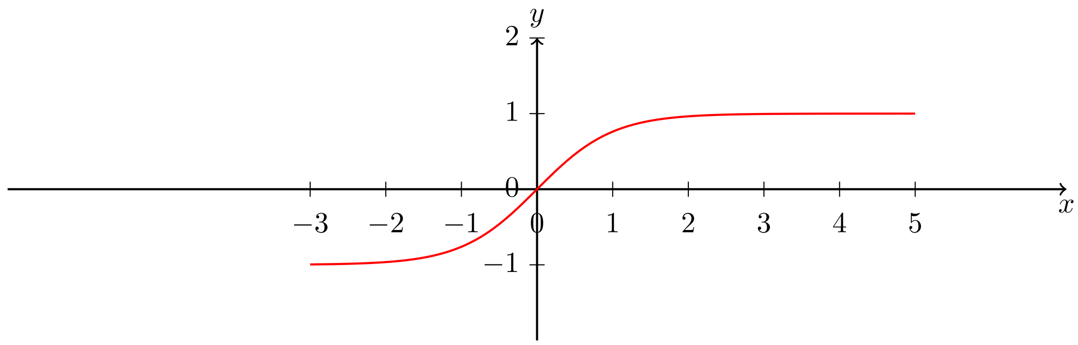

Figure 12 – Graphe de la fonction tangente hyperbolique

Proposition

Pour tout réel t, on a :

1. $\exp(t) = ch(t) + sh(t)$
2. $\exp(-t) = ch(t) - sh(t)$
3. $ch^2(t) - sh^2(t) = 1$

Démonstration :

Remarque 14 *1. La première relation de la proposition précédente permet de voir que ch est la partie paire de la fonction exponentielle et sh sa partie impaire.*

2. La relation (3) montre que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le couple $(ch(t), sh(t))$ est un élément de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.