Chapitre 2 : Compléments de calculs algébriques.

Table des matières

1 Introduction

Le but de ce chapître est principalement de remplir un peu notre caisse à outils algébriques. On y rencontrera :

- le calcul de somme, de produits et la formule du binôme.
- la résolution de petits systèmes linéaire via l'algorithme du pivot.
- la manipulation d'inégalité et résolution d'inéquations.
- l'utilisation du cercle trigonométrique, manipulation des lignes et fonctions trigonométriques.

2 Inégalités dans $\mathbb{R}$

2.1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

Il existe dans $\mathbb{R}$ un ordre naturel que l'on note " $\leq$ " que l'on peut construire de façon géométrique en suivant les étapes suivantes :

— on considère une droite $\mathcal{D}$ avec une origine O et $\vec{i}$ un vecteur directeur de la droite. On a ainsi $\mathcal{R} = (O, \vec{i})$ un repère de la droite $\mathcal{D}$.

— on peut construire un ordre en définissant deux côtés arbitraires de l'origine. On suppose que A tel que $\vec{OA} = \vec{i}$ est droite de O.

— une fois ces côtés définis on dit que le réel x, coordonnée d'un point P se trouvant à "droite" de l'origine O est positif et on note $0 \leq x$.

— On peut définir la relation $x \leq y$ pour x coordonnées respectives du point P et Q si le point image de Q par la translation de vecteur $-x.\vec{i}$ est à droite de O.

Cette relation entre deux nombres réels vérifie trois propriétés qui définissent correctement la notion d'ordre :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leq x$.
- Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$.
- Pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$, si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.

Remarque 1 *Les caractérisations* $(1), (2)$ *et* (3) *se nomment respectivement la reflexivité, l'antisymétrie et la transitivité.*

Conjointement à cette relation d'ordre dite *large il existe ce que l'on appelle l'ordre strict sur* $\mathbb{R}$ *noté* $<$*, pour laquelle la relation de symétrie n'est plus vérifiée. En effet, il n'existe aucun réel* x *satisfaisant la relation* $x < x$.

2.2 Intervalle de $\mathbb{R}$

L'ordre $\leq$ *sur* $\mathbb{R}$ *permet de définir les intervalles qui sont des sous-ensembles de* $\mathbb{R}$ *fondamentaux.*

Définition: Intervalle

Soient a *et* b *deux réels tels que* $a < b$. *Un* ***intervalle de*** $\mathbb{R}$ *est un ensemble de la forme suivante :*

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
- $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$
- $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$
- $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$

on a également les intervalles infinis :

- $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$
- $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$
- $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$
- $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$

Les intervalles peuvent être ouverts, fermés, semi-ouverts ou semis-fermés.

2.3 Compatibilité de l'ordre avec les opérations

On a sur $\mathbb{R}$ quatre opérations de base qui sont l'addition, la soustraction, la multiplication et la division. Cette première proposition est le B-A-BA des règles sur les inégalités.

Proposition

Soient $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$. Alors :

1. $x + z \leq y + z$
2. *pour tout* $k \geq 0$, $kx \leq ky$

Méthode

Pour montrer que l'expression $E(x) \leq F(x)$ pour tout $x \in A$, où $E(x)$ et $F(x)$ sont nombres réels dépendant de la variable x, on peut employer cette méthode très basique :

1. *Poser* $G(x) = F(x) - E(x)$
2. *montrer en utilisant les hypothèses initiales que* $G(x) \geq 0$ *pour tout* $x \in A$

La proposition suivante affine la précédente règle de somme des inégalités et étend la multiplication d'une inégalité par un nombre négatif. Dans ce dernier cas, les inégalités changent de sens.

Proposition

Soient $x, y, z, t \in \mathbb{R}$.

1. *si* $x \leq z$ *et* $y \leq t$ *alors* $x + y \leq z + t$
2. *si* $0 \leq x \leq y$ *et* $0 \leq z \leq t$ *alors* $0 \leq xz \leq yt$.
3. $x \leq y$ *si et seulement si* $-y \leq -x$
4. *si* $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$

Exemple

Si $0 \leq x \leq 7$ et $0 \leq y \leq 3$ alors par la proposition précedente on a $0 \leq xy \leq 21$.

Exercice 1 *Soient x et y deux nombres réels tels que $0 \leq x \leq \dfrac{2}{3}$ et $-1 \leq y \leq -\dfrac{1}{2}$. Majorer l'expression $x^2 - 3xy - y^2$.*

2.4 Valeur absolue

Étant donnés deux points $A(x)$ et $B(y)$ sur la droite numérique, on peut se demander quelle est la distance entre ces deux points indépendamment du fait que A se situe à gauche ou à droite de B. Cette notion de distance est reliée à la notion de valeur absolue d'un nombre réel.

Définition: Valeur absolue

*Soit $x \in \mathbb{R}$. La **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est le réel définit par :*

$$|x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x \leq 0 \end{cases}$$

Exemple

- $|-1| = 1$, $|23|$ *et* $|0| = 0$
- $|x+1| = x+1$ *si* $x \geq -1$ *et* $|x+1| = -x-1$ *si* $x < -1$

Remarque 2 — *pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $|x| \geq 0$ *et* $|-x| = |x|$

— $|x| = 0$ *si et seulement si* $x = 0$

— *pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$, *en an analysant le signe de* xy *on obtient que* $|xy| = |x| \times |y|$.

En reprenant le contexte de la droite numérique on peut maintenant donner une définition rigoureuse de la distance entre deux points sur une droite.

Définition: Distance entre deux points sur une droite

Soient des points $A(x)$ *et* $B(y)$ *sur la droite numérique. La distance entre* A *et* B *notée* $d(A, B)$ *est donnée par* $d(A, B) = |x - y|$.

On peut définir un intervalle centré en un point a *d'une amplitude* $h \geq 0$ *à l'aide d'une valeur absolue.*

Proposition

Soit $a \in \mathbb{R}$ *et* $h \geq 0$. *On a* $|x - a| \leq h$ *si et seulement si* $a - h \leq x \leq a + h$.

Démonstration :

Remarque 3 *La proposition précédente formule que :*

$$[a-h, a+h] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| \leq h\}$$

et possède une interprétation géométrique sur la droite réelle. L'ensemble des x *vérifiant une telle condition correspond aux coordonnées des points à distance inférieure à* h *du point* $A(a)$.

Exercice 2

1. *Mettre sous forme d'intervalle les ensembles* $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-1| \leq 2\}$ *et* $\{x \in \mathbb{R} \mid |3x-4| \leq 1\}$
2. *Mettre l'intervalle* $]-7, 2[$ *sous forme d'un ensemble utilisant une valeur absolue.*

Les deux inégalités suivantes dîtes triangulaires (nous verrons pourquoi au chapitre sur les nombres complexes) peut s'avérer très utile pour démontrer un bon nombre d'inégalités classiques.

Théorème: Inégalités triangulaires

Soient x et y deux nombres réels. Alors :

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad \text{et} \quad ||x| - |y|| \leq |x-y|$$

Démonstration :

Exercice 3 *À l'aide d'une inégalité triangulaire montrer que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a :*

$$|(x+y)^2| \leq (|x| + |y|)^2$$

2.5 Majoration/Minoration d'un ensemble

Les intervalles (excepté $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ tout entier) sont des parties de $\mathbb{R}$ majorées ou minorées.

Définition: Partie majorée/minorée

Soit $A \subset \mathbb{R}$ une partie de $\mathbb{R}$. On dit que A est :

- ***majorée*** *s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \leq M$. On dit alors que M est un* ***majorant*** *de A.*
- ***minorée*** *s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in A$, $x \geq m$. On dit alors que m est un* ***minorant*** *de A.*
- *si A est à la fois majorée et minorée on dit qu'elle est* ***bornée****.*

Exemple

- *$\mathbb{N}$ est une partie minorée par 0 qui n'est pas majorée.*
- *$]-5; 3[\cup]16; 17+\pi]$ est une partie majorée par $17+\pi$ et minorée par -10.*

— *$\mathbb{Z}$ n'est ni majorée ni minorée.*

Remarque 4 *Une partie majorée (respectivement minorée) n'admet pas un unique majorant (respectivement minorant) mais une infinité.*

Exercice 4 *Donner l'ensemble des majorants des parties $A =]0; 2[$ et $B] - 1; 2]$.*

Dans certains cas il existe pour une partie de $\mathbb{R}$ un plus grand élément ou un plus petit élément. On décrit ces notions dans la définition qui suit :

Définition: Minimum/Maximum d'une partie
Soient A une partie de $\mathbb{R}$ et $m, M \in \mathbb{R}$. Alors :

- *m est le **minimum** de A, noté $min(A)$, si $m \in A$ et m est un minorant de A.*
- *M est le **maximum** de A, noté $max(A)$, si $M \in A$ et M est un majorant de A.*

Exemple

- *-2 est le minimum de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 4 = 0\}$.*
- *l'intervalle $]-1;2]$ admet 2 comme maximum.*
- *l'intervalle $]-1;2[$ est borné mais n'admet ni maximum ni minimum.*

Remarque 5 *Le dernier exemple montre que l'existence d'un majorant (respectivement minorant) pour un ensemble A n'implique pas nécessairement l'existence d'un maximum (respectivement minimum).*

Exercice 5 *Est-ce que $A = \{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}^\star\}$ admet un maximum ? un minimum ?*

3 Systèmes linéaires

*On aborde dans cette section la résolution des systèmes linéaires à deux et trois inconnues à l'aide de la méthode dite du **pivot de Gauss** que nous approfondirons dans un chapitre ultérieur pour des systèmes linéaires quelconques.*

3.1 Système à deux inconnues

*Un **système linéaire de** 2 **équations à 2 inconnues** est un système de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & e \quad (L1) \\ cx & + & dy & = & f \quad (L2) \end{array}\right.$$

où a, b, c, d, e et f sont des coefficients réels ou complexes. Résoudre ce système consiste à déterminer l'ensemble des couples (x, y) vérifiant simultanément les deux équations $L1$ et $L2$.

Donnons un exemple de résolution de système linéaire à l'aide de cette technique :

Exemple

On considère le système suivant, à résoudre dans $\mathbb{R}$:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} 2x & + & y & = & 3 \quad (L1) \\ 4x & - & y & = & 1 \quad (L2) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} 4x & + & 2y & = & 6 \quad (2L_1) \\ 4x & - & y & = & 1 \quad (L2) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} 0 & + & 3y & = & 5 \quad (2L_1 - L2) \\ 4x & - & y & = & 1 \quad (L2) \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccccc} & & y & = & \frac{5}{3} \\ 4x & - & y & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc} y & = & \frac{5}{3} \\ 4x & = & 1 + y = \frac{8}{3} \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{ccc} y & = & \frac{5}{3} \\ x & = & \frac{2}{3} \end{array}\right.$$

Finalement l'unique solution du système (S) *est la* $\mathcal{S} = \{(\frac{2}{3}, \frac{5}{3})\}$

3.1.1 Méthode du pivot de Gauss

Méthode d'Élimination

Soit (S) un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k_1 \\ cx & + & dy & = & k_2 \end{array}\right.$$

— *Étape 1 : On transforme le système (S) en un nouveau sysème (S') en ajoute à une ligne du système l'autre ligne multipliée par une constante de manière à éliminer la variable x d'une ligne.*
— *Étape 2 : Quitte à échanger les lignes, le nouveau système obtenu est de la forme :*

$$(S')\left\{\begin{array}{ccccc} a'x & + & b'y & = & k'_1 \\ & & d'y & = & k'_2 \end{array}\right.$$

— *Étape 3 : On détermine la valeur de y grâce à l'équation de la deuxième ligne et on remplace sa valeur dans la première ligne pour obtenir la valeur de x.*
— *Étape 4 : Les solutions obtenues à l'étape 3 sont les solutions de (S).*

3.1.2 Déterminant et nombre de solutions

Proposition

Soit (S) un système 2×2 dont les lignes sont proportionnelles, c'est à dire telles qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ satisfaisant $L1 = \lambda.L_2$. Alors le système (S) admet une infinité de solutions.

***Démonstration** :*

Définition *Déterminant*

Soit (S) un système de la forme :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccc} ax & + & by & = & k_1 \\ cx & + & dy & = & k_2 \end{array}\right.$$

*On appelle **déterminant** de (S) la quantité $ad - bc$ que l'on note $det(S)$.*

Exemple
Le système

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcr} -x & + & -2y & = & 2 \\ 2x & + & 7y & = & 1 \end{array}\right.$$

a pour déterminant $det(S_1) = -1\times 7 - 2\times(-2) = -7+4 = -3$.
Le système

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rcrcr} x & +by & = & -1 \\ 2x & + & 2y & = & 0 \end{array}\right.$$

a pour déterminant $det(S) = 1\times 2 - 2\times 1 = 0$. *On remarque que ce système n'a aucune solution car les deux lignes sont proportionnelles à gauche par un facteur 2 mais pas à droite* $(0\neq 2\times 1)$.

Proposition *Déterminant et système* 2×2
Soit (S) *un système de la forme :*

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcr} ax & + & by & = & k_1 \\ cx & + & dy & = & k_2 \end{array}\right.$$

Alors :
— $det(S) = 0$ *si et seulement si le système* (S) *admet une infinité de solutions ou bien aucune.*
— $det(S)\neq 0$ *si et seulement si le système* (S) *admet une unique solution.*

Exercice 6 *Déterminer deux réels* a *et* b *tels que pour tout* $x>0$, $\dfrac{1}{x(2x+1)} = \dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{2x+1}$.

3.1.3 Interprétation géométrique dans le plan

Considérons le système (S) *:*

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrl} ax & + & by & = & e & (L1) \\ cx & + & dy & = & f & (L2) \end{array}\right.$$

dans le cas où tous les coefficients sont réels et en faisant les hypothèses supplémentaires $(a,b)\neq(0,0)$ *et* $(c,d)\neq(0,0)$.

- *Comme* $(a,b)\neq(0,0)$, *l'équation* $ax+by=e$ *peut être considérée comme l'équation d'une droite dans le plan notée* $\mathcal{D}_1$.
- *Comme* $(c,d)\neq(0,0)$, *l'équation* $cx+dy=f$ *peut être considérée comme l'équation d'une droite dans le plan notée* $\mathcal{D}_2$.

Proposition
Si le plan $\mathcal{P}$ *est muni d'un repère orthonormé* $\mathcal{R}$. *Les solutions du système* (S) *correspondent aux coordonnées des points d'intersection des droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$. *Trois cas distincts se présentent alors :*

1. *les droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont sécantes en un seul point.*
2. *les droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont confondues.*
3. *les droites* $\mathcal{D}_1$ *et* $\mathcal{D}_2$ *sont parallèles et non confondues.*

Démonstration :

3.2 Systèmes à trois inconnues

On considère maintenant la résolution des systèmes linéaires à trois inconnues ayant deux ou trois lignes en utilisant encore la méthode du pivot (ou élimination) que l'on explique de manière un peu plus général maintenant.

Définition: Opérations élémentaires sur les lignes

Soit (S) un système linéaire. On note $(L_i)_{1\leq i\leq 3}$ les lignes du système (S). Appliquer une opération élémentaire consiste à transformer (S) en :

- *permutant deux lignes , noté $L_i \leftrightarrow L_j$*
- *multipliant une ligne par un réel non nul λ noté $L_i \leftarrow \lambda.L_i$*
- *ajoutant $\lambda \in \mathbb{K}$ fois une ligne et en l'ajoutant à une autre notée $L_i \leftarrow L_i + \lambda.L_j$ où $(i \neq j)$.*

Nous montrerons dans un chapitre ultérieur, dédié spécifiquement aux systèmes linéaires qu'appliquer une opération élémentaire sur les lignes à un système linéaire laisse invariant l'ensemble des solutions du système. C'est sur ce résultat fondamental que repose l'algorithme de résolution que l'on explicite ci-dessous.

Cet algorithme appliqué au système linéaire (S) repose sur trois étapes essentielles :

1. *On applique des opérations élémentaires à (S)sur les lignes jusqu'à obtenir un système échelonné.*
2. *On détermine alors si (S) admet des solutions.*
3. *On "remonte" le système pour exprimer les solutions.*

Méthode : *Algorithme du Pivot de Gauss*

On résout ce système :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_1x & + & b_1y & + & c_1z & = & k_1 & (L_1) \\ a_2x & + & b_2y & + & c_2z & = & k_2 & (L_1) \\ a_3x & + & b_3y & + & c_3z & = & k_3 & (L_1) \end{array}\right.$$

On procède par étapes :

- *Étape 1 : On échange les lignes du système de manière à ce que les premières lignes contiennent des coefficients non nuls pour la variable x.*
- *Étape 2 : On effectue pour tout $i \in \{2,3\}$, l'opération $L_i \leftarrow L_i - \dfrac{a_i}{a_1}.L_1$.*
- *Étape 3 : On recommence les étapes (1) et (2) au système formé par les lignes (L_2) et L_3.*
- *Étape 4 : le système obtenu est échelonné. On distingue alors deux cas. Si il existe des lignes dans la matrice obtenue à la dernière étape qui sont nulles sauf le coefficient de la dernière colonne, alors le système n'a pas de solutions. Si ce n'est pas le cas, le système (S) admet au moins une solution.*

Exemple

Résolvons par l'algorithme de Gauss le système suivant :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{ccccccccc} & & 2y & + & z & = & 1 & (L_1) \\ x & - & y & + & z & = & 0 & (L_2) \\ x & + & y & + & z & = & 3 & (L_3)\end{array}\right.$$

Comme il n'apparaît pas de x dans la première ligne mais dans les deux autres, on échange les lignes (L_3) et (L_1), c'est à dire l'opération élémentaire $(L_1) \leftrightarrow (L_3)$.

$$(S_2)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (L_1) \\ x & - & y & + & z & = & 0 & (L_2) \\ & & 2y & + & z & = & 1 & (L_3)\end{array}\right.$$

On élimine la variable x dans la deuxième ligne on soustrayant la ligne (L_1) à la ligne (L_2). Ce qui se note $(L_2) \leftarrow (L_2) - (L_1)$.

$$(S_3)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (L_1) \\ 0 & + & -2y & + & 0 & = & -3 & (L_2) \\ & & 2y & + & z & = & 1 & (L_3)\end{array}\right.$$

On élimine la variable y de la troisième ligne en additionnant la ligne (L_2) à la ligne (L_3), opération élémentaire $(L_3) \leftarrow (L_3) + (L_2)$.

$$(S_4)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & z & = & 3 & (L_1) \\ & & -2y & & & = & -3 & (L_2) \\ & & 0 & + & z & = & -2 & (L_3)\end{array}\right.$$

On obtient un système triangulé, on peut donc le résoudre.

$$(S_4)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & = & 3 - z - y & = & 3 - \dfrac{3}{2} - (-2) & = & \dfrac{7}{2} & (L_1) \\ y & = & \dfrac{3}{2} & (L_2) & & & & \\ z & = & -2 & (L_3) & & & & \end{array}\right.$$

<u>Conclusion</u> : Le système (S_1) possède une unique solution $(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, -2)$.

Exercice 7 *Résoudre à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss le système suivant :*

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 5y & & & = & 1 & (L_1) \\ 2x & + & y & + & z & = & 1 & (L_2) \\ x & - & y & + & -5z & = & 0 & (L_3)\end{array}\right.$$

Remarque 6 *En géométrie dans l'espace un plan a une équation de la forme $ax + by + cz = k$. On peut donc s'intéresser à l'intersection de deux plans dans l'espace en résolvant un système à deux lignes zet trois inconnues (voir TD pour un exemple).*

4 Sommes et produits

Dans de multiples situations il est nécessaire de considérer la somme ou le produit de plusieurs nombres.

Exemple 3.1
Un épargnant place sur son livret A un montant de 2500 *euros . Sachant que le taux d'intérêt de ce compte est de* 2% *et que le titulaire ni n'alimente ni de débite ce compte, il sera au bout de* 5 *ans crédité de la somme en euros de :*

$$1,02 \times 1,02 \times 1,02 \times 1,02 \times 1,02 \times 2500 \approx 2760$$

Sur un grand nombre d'années et si le taux d'intérêt est variable l'écriture du gain à l'aide du symbole $\times$ *est peu commode. On introduit pour cette raison un nouveau symbole.*

Définition 3.1 *Symbole* $\prod$
Soient i, j *des entiers et* $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$*, une famille de* $j-i+1$ *réels. On définit :*

$$\prod_{k=i}^{j} a_k = a_i \times a_{i+1} \times \cdots \times a_j$$

qui se lit "produit pour k *allant de* i *à* j *des* a_k*".*

Exemple 3.2
Reprenons l'énoncé de l'exemple 3.1*, alors le montant* S *obtenu au bout de* 5 *ans peut s'écrire sous la forme* $S = (\prod_{k=0}^{4} 1,02) \times 2500$*.*

Définition 3.2 *Factorielle*
Soit n *un entier naturel. On définit la* **factorielle** *de* n *comme la quantité, que l'on note* $n!$*, qui vaut* $\prod_{k=1}^{n} k$ *si* $n \geq 1$ *et* 1 *si* $n = 0$ *. Cette expression se lit "factorielle de* n*".*

Exemple 3.3
Voici les premières valeurs des factorielles

$$0! = 1, \quad 1! = 1, \quad 2! = 2, \quad 3! = 6, \quad 4! = 24 \text{ et } \quad 5! = 120$$

La somme d'une grande occurrence de nombres apparait naturellement, nous sommes donc incité à introduire un symbole pour en simplifier l'expression.

Exemple 3.4

Un actionnaire possède un porte-feuille d'actions dans lequel il possède 6 *types de titre différents. Il possède pour chaque type différent les valeurs suivantes :* $1000, 2000, 3000, 4000, 5000$ *et* 6000. *La somme totale de son porte-feuille est donc la quantité* $S = 1000+2000+3000+4000+5000+6000 = 21000$

L'expression de l'exemple précédent peut se condenser à l'aide d'un symbole défini comme suit.

Définition 3.3 *Symbole* $\sum$

Soient i, j *des entiers et* $a_i, a_{i+1}, \dots, a_j$, *une famille de* $j - i + 1$ *réels. Alors on définit*

$$\sum_{k=i}^{j} a_k = a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j$$

qui se lit "somme pour k *allant de* i *à* j *des* a_k*".*

Exemple 3.5

Reprenons le contexte de l'exemple 3.4. Avec le symbole $\sum$*, le montant du portefeuille d'action de l'actionnaire s'élève à* $\sum\limits_{k=1}^{6} k \times 1000$

Remarque 7 *Dans la définition la lettre "k" est appelée une* ***variable muette****. Il s'agit d'un choix arbitraire de variable même si la plupart du temps on utilise les lettres i,j,k,l,m et n.*

Risque d'erreur

Le choix d'une variable muette doit tenir compte des variables mises en jeu dans l'énoncé courant et s'en trouver en dehors. En effet, considérons par exemple $a_0, a_1, \dots, a_n$, $n + 1$ *nombres réels. Alors l'expression* $\sum\limits_{n=0}^{n} a_n$ *n'a pas de sens car la variable "n" est déjà utilisée.*

Application à l'Informatique

La variable "i" ou "k" dans les sommes seront ce qu'on appelle des variables locales dans une fonction en Python. C'est-à-dire des variables utilisées dans un contexte spécifique et non global.

Notation 1 *Soit une suite finie* $(a_i)_{i \in I}$. *La notation* $\sum\limits_{i \in I} a_i$ *désigne la somme de tous les nombres* a_i *pour* i *appartenant à l'ensemble* I.

Exemple 3.6
Notons $I = \{0, 1, \dots, n\}$ et $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{i \in I} a_i$$

4.1 Propriétés des sommes et des produits

Explorons les premières propriétés des symboles $\sum$ et $\prod$ et notamment leur comportement par rapport à l'addition et la multiplication.

Proposition 3.1 *Découpage*
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ des réels et $i \in \{0, \dots, n-1\}$. Alors :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k = \sum\limits_{k=0}^{i} a_k + \sum\limits_{k=i+1}^{n} a_k$
2. $\prod\limits_{k=0}^{n} a_k = (\prod\limits_{k=0}^{i} a_k) \times (\prod\limits_{k=i+1}^{n} a_k)$

Démonstration.

1. *Il s'agit d'appliquer simplement l'associativité de l'addition. En effet,*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n = (a_0 + a_1 + \dots + a_i) + (a_{i+1} + \dots + a_n) = \sum_{k=0}^{i} a_k + \sum_{k=i+1}^{n} a_k$$

2. *On applique ici l'associativité de la multiplication.*

$$\prod_{k=0}^{n} a_k = a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n = (a_0 \times a_1 \times \dots \times a_i) \times (a_{i+1} \times \dots \times a_n) = (\prod_{k=0}^{i} a_k) \times (\prod_{k=i+1}^{n} a_k)$$

□

Proposition 3.2 *Multiplication par un réel*
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ et λ des réels. Alors :

1. $\sum\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$
2. $\prod\limits_{k=0}^{n} \lambda a_k = \lambda^{n+1} \prod\limits_{k=0}^{n} a_k$

Démonstration.

1. *Il suffit de factoriser par λ dans l'expression $\lambda a_0 + \lambda a_1 + \dots + \lambda a_n$.*
2. *Ici on utilise la commutativité de la multiplication en faisant passer les λ dans les premiers termes du produit.*

$$\prod_{k=0}^{n} \lambda a_k = (\lambda a_0) \times \dots \times (\lambda a_n) = \lambda \times \dots \times \lambda \times a_0 \times a_1 \times \dots \times a_n = \lambda^{n+1} \times (\prod_{k=0}^{n} a_k)$$

□

Proposition 3.3
Soient $a_0, a_1, \dots, a_n$ et $b_0, b_1, \dots, b_n$ des réels. Alors

1. $\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = (\sum_{k=0}^{n} a_k) + (\sum_{k=0}^{n} b_k)$
2. $\prod_{k=0}^{n}(a_k b_k) = (\prod_{k=0}^{n} a_k) \times (\prod_{k=0}^{n} b_k)$

Démonstration.

1. *On utilise la commutativité de l'addition en séparant d'un côté les a_k et de l'autre côté les b_k. En effet, l'expression*

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = a_0 + a_1 + \dots + a_n + b_0 + b_1 + \dots b_n$$

2. *On utilise la commutativité de la multiplication en séparant d'un côté les a_k et de l'autre côté les b_k. En effet, l'expression*

$$(a_0 b_0) \times \dots \times (a_n b_n) = (a_0 \times \dots \times a_n) \times (b_0 \times \dots \times b_n)$$

□

4.2 Sommes et produits téléscopiques

Exercice 8 *Donner une expression plus simple des quantités suivantes :*

1. $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)k}$
2. $\prod_{k=1}^{6} \frac{2^k}{3^{k-1}}$

Solution.

1. *On utilise le fait que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{(k+1)k} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$. Donc $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)k} = (\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k}) - (\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k+1})$ en utilisant la propriété précédente. Par changement d'indice, on remarque que :*

$$\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{k}$$

d'où

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{(k+1)k} \\ = \quad & \sum_{k=1}^{15} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{16} \frac{1}{k} \\ = \quad & \frac{1}{1} + \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{15} \frac{1}{k} - \frac{1}{16} \\ = \quad & 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16} \end{aligned}$$

2. *On a que*

$$\prod_{k=1}^{6} \frac{2^k}{3^{k-1}} = \prod_{k=1}^{6} 2^k \times \frac{1}{3^{k-1}}$$

D'après la propriété précédente, cette quantité est égale à :

$$\begin{aligned} & (\prod_{k=1}^{6} 2^k) \times (\prod_{k=1}^{6} \frac{1}{3^{k-1}}) \\ = & (\prod_{k=1}^{6} 2^k) \times \prod_{k=0}^{5} \frac{1}{3^k} \\ = & \frac{\prod_{k=1}^{6} 2^k}{\prod_{k=0}^{5} 3^k} \end{aligned}$$

Or, $\prod_{k=1}^{6} 2^k = 2^{\left(\sum_{k=1}^{6} k\right)} = 2^{21}$ *et* $\prod_{k=0}^{5} 3^k = 3^{(\sum_{k=0}^{5} k)} = 3^{15}$. *En en conclut que* $\prod_{k=1}^{6} \frac{2^k}{3^{k-1}} = \frac{2^{21}}{3^{15}}$

*La somme de l'exercice précédent est un cas de ce que l'on appelle une **somme télescopique**. On peut calculer ce type de somme à l'aide de la méthode suivante.*

Méthode : Calcul d'une sommes télescopique

Soit $n \in \mathbb{N}$ *et* $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$.

1. *Changer d'indice On remarque que* $\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_k$.
2. *Découper judicieusement les sommes :*

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= (\sum_{k=1}^{n} a_k) + a_{n+1} - (\sum_{k=1}^{n} a_k) - a_0 \\ &= a_{n+1} - a_0 \end{aligned}$$

3. *On obtient que* $S_n = a_{n+1} - a_0$.

Remarque 8 *On peut être régulièrment amené à réaliser des changement d'indice dans une somme pour simplifier des calculs (pas uniquement pour les sommes télescopiques).*

4.3 Sommes de référence

Nous allons exploiter le raisonnement par récurrence dans le cas des deux propriétés suivantes concernant l'expression de sommes usuelles.

Théorème 3.2

Soit $a \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $\sum_{k=0}^{n} a^k$ *est égale à :*

1. $n + 1$ *si* $a = 1$
2. $\frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$ *sinon*

Démonstration.

Théorème 3.3

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

Démonstration.

Proposition

Soient $n \in \mathbb{N}^\star$, a, b deux nombres réels ou complexes.

On a :

- $\displaystyle a^n - b^n = (a-b) \times \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} b^k$
- *si n est impair,* $\displaystyle a^n + b^n = (a+b) \times \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k a^{n-1-k} b^k$

Démonstration :

5 Sommes doubles

*Une **somme double** est une somme fini de la forme* $\sum_{(i,j)\in A} a_{i,j}$ *où* A *est un ensemble fini de doubles indices entiers. En général on va considérer dans cette section les cas où* A *est un produit cartésien et celui où* A *est triangulaire.*

5.1 Somme double sur un produit cartésien

Dans la partie précedente nous calculions des sommes de nombres complexes a_i *indicés sur un ensemble fini* I*. Nous allons ici voir comment calculer des sommes de complexes dépendant de deux indices.*
Par exemple $S = \sum_{(i,j)\in[\![0,2]\!]^2} ij$ *se calcule comme cela :*

$$S = 0\times 0 + 0\times 1 + 0\times 2 + 1\times 0 + 1\times 1 + 1\times 2 + 2\times 0 + 2\times 1 + 2\times 2 = 1+2+2+4 = 9$$

Ici, il est possible de transformer cette somme en un produit de sommes plus simples :

$$S = \left(\sum_{k=0}^{2} i\right) \times \left(\sum_{k=0}^{2} j\right) = 3\times 3 = 9$$

mais cette simplification n'est pas toujours possible. La définition de somme double est :

Définition: Somme double sur un produit cartésien
Soient I, J *deux ensembles finis et la suite* $(a_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$*. La **somme double sur un produit cartésien des*** $a_{i,j}$ *se définit par*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$$

Proposition
Soient I, J *deux ensembles finis ainsi que deux suites* $(b_i)_{i\in I}$ *et* $(c_j)_{j\in J}$*. On a :*

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} b_i c_j = (\sum_{i\in I} b_i)\times(\sum_{j\in J} c_J)$$

Démonstration :

Exercice 9 *Pour* $m, n\in\mathbb{N}$*, calculer en fonction de* n *et* m *la somme double* $\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]\times[\![0,m]\!]} i2^j$*.*

5.2 Sommes doubles triangulaires

On explore un type particulier de somme doublement indicées appellées sommes triangulaires.

On considère une famille de nombres complexes $a_{k,l}$ où $0 \leq k \leq l \leq 3$ et dont les valeurs sont données par le tableau suivant

l	k : 0	1	2	3
0	2			
1	4	2		
2	-1	-3	5	
3	-3	4	2	7

On a $\sum_{0 \leq k \leq l \leq 3} a_{k,l} = 2+4-1-3+2-3+4+5+2+7 = 19$

Pour obtenir cette somme on peut soit sommer par colonne soit par ligne. Ces sommes sont plus complexes à calculer que les sommes indicées sur un produit cartésien $I \times J$. On suit la méthode de calcul suivante en général :

Méthode

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $A = \{0 \leq k \leq l \leq n\}$ et $(a_{k,l})_{(k,l)\in A}$. Pour calculer $S = \sum_{(k,l)\in A} a_{k,l}$:

1. *on calcule dans un premier temps pour tout $l \in [\![0,n]\!]$ la somme partielle $b_l = \sum_{k=0}^{l} a_{k,l}$ en fonction de l.*
2. *on obtient S en calculant la somme $\sum_{l=0}^{n} b_l$.*

Lorsque ce n'est pas le cas on peut sommer les éléments a_i, j lignes par lignes.

Risque d'erreur

Dans le cas d'une somme triangulaire on ne peut pas inverser les indices k et l comme dans le cas d'un produit cartésien.

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Calculons la somme triangulaire $S_n = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} 1$.

1. *Pour tout $l \in [\![1,n]\!]$, on a $\sum_{k=1}^{l} 1 = l$.*
2. *Ainsi, $S_n = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{l} 1 = \sum_{l=1}^{n} l = \dfrac{n(n+1)}{2}$*

Exercice 10

Lorsque l'on considère une somme triangulaire $S = \sum_{1 \leq k \leq l \leq n} a_{k,l}$ *il est possible d'intervertir les deux signes* $\sum$ *dans la méthode précédente mais au prix d'un changement des valeurs prises par les indices. Cela provient du fait qu'en sommant les* $a_{k,l}$ *sur les colonnes on obtient également la somme* S.

Proposition

Pour $n \in \mathbb{N}$, $A = \{(k,l),\ \ 0 \leq k \leq l \leq n\}$ *et* $(a_{k,l})_{(k,l)\in A}$ *on a :*

$$\sum_{(i,j)\in A} a_{k,l} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=k}^{n} a_{k,l}$$

Exercice 11 *Vérifier que* $\sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{k} 2^k$ *puis donner une expression plus simple de cette somme en permutant l'ordre de sommation.*

5.3 Produit de deux sommes finies

On exprime dans cette partie le produit de deux sommes finies à l'aide d'une seule somme.

Proposition

Soient $(a_i)_{0\leq i\leq n}$ *et* $(b_j)_{0\leq j\leq m}$. *On a*

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \times \sum_{j=0}^{m} b_j = \sum_{k=0}^{n+m} C_k$$

où pour tout $k \in [\![0;n]\!]$, $C_k = \sum_{i+j=k} a_i.b_j$.

Démonstration :admise.

6 Coefficients binomiaux

On s'intéresse dans cette section à décrire de plusieurs manières les sous-ensembles d'un ensemble fini de cardinal fixé. Le cardinal d'un ensemble fini est son nombre d'objets. Nous l'étudierons de façon plus aboutie au chapitre sur le Dénombrement.

6.1 Sous-ensembles d'un ensemble fini et arbres

Dans la première section, nous avons vu qu'un sous-ensemble d'un ensemble fini avait un cardinal qui lui était inférieur. On se pose la question suivante :

Question 1 *Étant donné un ensemble* E *à* $n \in \mathbb{N}$ *éléments et un entier naturel* $p \leq n$. *Combien existe-t-il de sous-parties* $A \subset E$ *tels que* $Card(A) = p$ *?*

Définition

Soit E *un ensemble de cardinal* n *et un entier naturel* p. *On appelle coefficient binomial "p parmi n" le cardinal de l'ensemble des sous-ensembles de* E *de cardinal* p *que l'on note* $\binom{n}{p}$. *Il est clair que pour tout entier* $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ *puisqu'il n'existe pas de sous-parties de* E *de cardinal strictement plus grand que* n.

Remarque 9 *Il est clair que pour tout entier $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ puisqu'il n'existe pas de sous-parties de E de cardinal strictement plus grand que n.*

Exemple

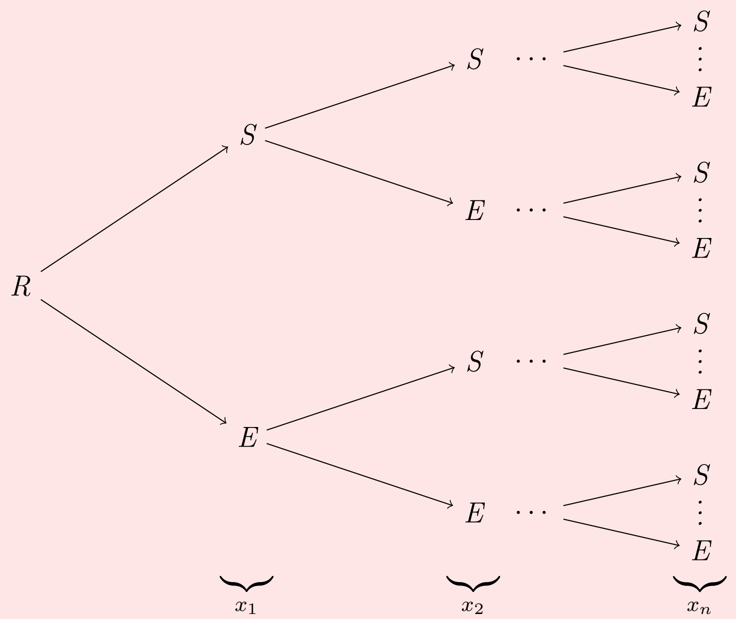
Considérons $E = \{rouge, jaune, bleu\}$ l'ensemble des 3 couleurs primaires. Il y a 3 sous-ensembles de E ayant 2 éléments formé par l'ensemble $E_2 = \{\{rouge, jaune\}; \{rouge, bleu\}; \{jaune, bleu\}\}$. On en déduit que $\binom{3}{2} = 3$.

Question 2 *Est-il possible de déterminer une formule simple en fonction de n et p pour déterminer le nombre de sous-ensembles de E de cardinal p ?*

Il est très commode en dénombrement, comme en mathématiques en général, de construire des représentations mental des concepts que l'on étudie. On va résoudre la précédente question en commençant par modéliser les sous-ensembles à p éléments dans un ensemble à n éléments à l'aide de chemins dans un arbre.

Définition *Arbre binaire fini*

Soit $n \in \mathbb{N}$, un arbre binaire associé à un ensemble $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ est un arbre de la forme :



Méthode

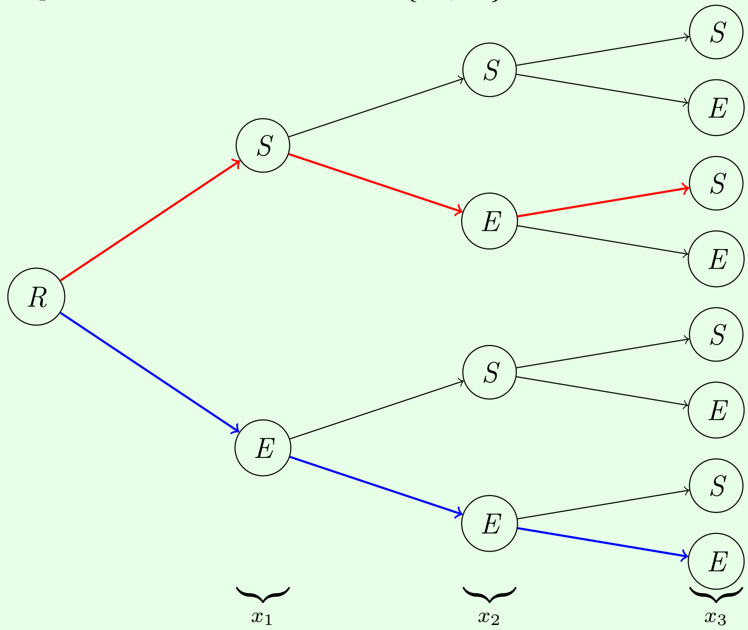
Comment associer à un chemin $\mathfrak{p}$,allant de la racine jusqu'à une extrémité, un unique sous-ensemble $A \subset E$? Soit $i \in [\![1, n]\!]$,

- *si au niveau x_i le chemin passe par un nœud S alors x_i appartient à A.*
- *si au niveau x_i le chemin passe par un nœud E alors x_i n'appartient pas à A.*

On peut donc lister exactement les éléments de A.

Exemple

Soit $E = \{x_1, x_2, x_3\}$ un ensemble fini de cardinal 3. Alors le chemin tracé en rouge dans l'arbre binaire associé à E ci-dessous correspond au sous-ensemble $A = \{x_1, x_3\}$ et le chemin tracé en bleu correspond à l'ensemble vide.



Remarque 10 *Á l'aide de cet interprétation en terme de chemins dans un arbre, on peut montrer par récurrence que $Card(\mathcal{P}([\![1, n]\!])) = 2^n$.*

Grâce aux arbres binaires, on peut établir une propriété combinatoire sur les coefficients binomiaux.

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier naturel $p \leq n$. Alors :

$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p+1} + \binom{n}{p}$$

Démonstration *:*

*On peut représenter le théorème précédent à l'aide de ce qu'on appelle le **triangle de Pascal**.*

Triangle de Pascal

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Nous répondons maintenant à la question principale de cette section. Il est possible d'exprimer en fonction de factorielles les coefficients binomiaux.

Théorème

Soit $n \in \mathbb{N}$ et un entier naturel $p \leq n$. Alors :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Démonstration :

On en déduit les propriétés calculatoire suivante.

Proposition

Soient n et p deux entiers naturels. Alors :

1. $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
2. *si* $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$
3. $\binom{n}{0} = 1$ *et* $\binom{n}{1} = n$ *si* $n \geq 1$
4. *si* $1 \leq p \leq n$, $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

Démonstration :

6.2 Formule du binôme

Une application extrêmement utile des coefficients binomiaux est la possibilité de calculer des puissances.

Exemple

Remarquons que $\binom{2}{0} = \binom{2}{2} = 1$ *et* $\binom{2}{1} = 2$. *On a donc pour tout* $x, y \in \mathbb{R}$ *la classique identité remarquable* $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = \binom{2}{0}x^2 + \binom{2}{1}xy + \binom{2}{2}y^2$

Ce dernier exemple se généralise dans le formule suivante :

Théorème

Soient $n \in \mathbb{N}$, x *et* y *deux nombres complexes. Alors :*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

***Démonstration** :*

7 Trigonométrie

On se place tout au long de cette section dans le plan euclidien $\mathcal{P}$ muni d'un repère othonormé $\mathcal{R} = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on a la norme de $\vec{u}$ donnée par la formule $||u|| = \sqrt{x^2+y^2}$.

7.1 Cosinus et sinus

Définition: Angle géométrique

On appelle angle géométrique la donnée de trois points ordonnés A,B,C que l'on note $\widehat{ABC}$.

Définition: Cosinus et sinus géométriques

Soit A, B, C trois points formant un triangle rectangle ABC rectangle en A. On appelle cosinus de l'angle $\widehat{ABC}$ et sinus de l'angle $\widehat{ABC}$ les deux nombres suivants :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} \quad \text{et} \quad \sin(\widehat{ABC}) = \frac{AC}{BC}$$

Exemple

Si ABC est un triangle rectangle et isocèle en A alors :

$$\cos(\widehat{ABC}) = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

car d'après le théorème de Pythagore $AB^2 + AC^2 = 2AB^2 = BC^2$.

Définition: Cercle trigonométrique

On note $\mathcal{C}_0$ le cercle trigonométrique, c'est-à-dire l'ensemble des points du plan à distance 1 de l'origine.

$$\mathcal{C}_0 = \{M \in \mathcal{P}|, ||\overrightarrow{OM}|| = 1\}$$

Le cercle trigonométrique est de périmètre 2π et on définit on commence par définir le cosinus et le sinus d'un réel x pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$.

Soit $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $I\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $J\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et M l'unique point du quart de cercle unité supérieur droit tel que l'arc de cercle $\overset{\frown}{IM}$ soit de longueur x (pour repérer un tel point M en pratique, il suffit de prendre une cordelette de longueur x et de placer son extrêmité sur I puis de l'enrouler sur le cercle jusqu'à arriver à l'autre extrêmité qui s'avère être M.)

Définition: Cosinus et sinus d'un réel dans $[0, \pi]$

Soit $x \in [0, \pi]$.

1. *Si* $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$,*M désigne le point construit ci-dessus et A le projeté orthogonal de M sur la droite* (OI) *on définit :*
   - $\cos(x)$ *comme le nombre* $\cos \widehat{OAM}$.
   - $\sin(x)$ *comme le nombre* $\sin \widehat{OAM}$.

   Comme M appartient au cercle trigonométrique, on a $\cos(x) = OA$ *et* $\sin(x) = AM$.
2. *Pour tout* $x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$: $\cos(x) = -\sin(x - \frac{\pi}{2})$ *et* $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

Remarque 11 *On vient de définir une fonction sinus et une fonction cosinus sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$ *avec* $\cos(-\pi) = \cos(\pi) = -1$ *et* $\sin(-\pi) = \sin(\pi) = 0$.

Définition: Fonctions cosinus et sinus

On étend ces deux fonctions de la manière suivante : sur $[-\pi, \pi]$ *intervalle centré en* 0 *:*
- *la fonction sinus est impaire*
- *la fonction cosinus est paire*

Pour étendre le domaine de définition de cosinus et sinus il suffit maintenant de les "rendre" 2π*-périodiques, c'est à dire que pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x + 2\pi) = \cos(x)$ *et* $\sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.

La définition précédente permet d'obtenir la proposition suivante qui affirme que tout point du cercle trigonométrique a des coordonnées pouvant être paramétrées par un cosinus et un sinus.

Proposition

Soit $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *un point du cercle trigonométrique. Il existe un unique réel* $\theta \in [0, 2\pi[$ *tel que* $x = \cos\theta$ *et* $y = \sin\theta$.

À l'aide du théorème de Pythagore, il est clair que pour tout $x \in [0, 2\pi[$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Il est possible d'étendre les fonctions $\cos$ *et* $\sin$ *à tout* $\mathbb{R}$ *en les rendant* 2π*-périodiques.*
On peut donner les principales valeurs remarquables de $\cos$ *et* $\sin$.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ *:*
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$ *et* $\cos(x - \frac{\pi}{2}) = \sin x$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$ *et* $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$ *et* $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$

Cette proposition se démontre géométriquement à l'aide du cercle trigonométrique.

7.2 Equations et inéquations trigonométriques.

Définition: Congruence

Soit a et b deux nombres réels. On dit que a est congru à b modulo 2π *et on note* $a \equiv b[2\pi]$ *s'il existe un entier k tel que* $a - b = 2\pi k$.

Pour les équations en cosinus on a :

Proposition
Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \cos(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- *si $y \in [-1, 1]$ et $x_0 \in [0, \frac{\pi}{2}]$ désigne une solution particulière de l'équation, l'ensemble des solutions de (E) est de la forme :*

$$\{x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

- *il n'y a aucune solution sinon.*

Pour les équations en sinus on a :

Proposition
Soit $y \in \mathbb{R}$. L'équation trigonométrique $(E) : \sin(x) = y$ se résout suivant deux cas distincts.

- *si $y \in [-1, 1]$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ désigne une solution particulière de l'équation, l'ensemble des solutions de (E) est de la forme :*

$$\{x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - x_0 + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} x \equiv x_0 [2\pi]$$

- *il n'y a aucune solution sinon.*

Exercice 12 *Résoudre l'équation* $\cos(x) = -1$ *et* $\sin(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Il est préférable pour ne pas se tromper de résoudre ces équations ou inéquations graphiquement en réalisant les dessins suivants.

8 Formulaires de trigonométrie

Théorème: Formules trigonométriques (additions et soustractions)
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$
2. $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$
3. $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
4. $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Théorème: Formule de factorisation
Soient p et $q \in \mathbb{R}$. On a :

1. $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
2. $\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\dfrac{p+q}{2}\sin\dfrac{p-q}{2}$
3. $\sin(p) + \sin(q) = 2\sin\dfrac{p+q}{2}\cos\dfrac{p-q}{2}$
4. $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$

Théorème: Formules trigonométriques de duplication de l'angle
Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a :

1. $\cos(2a) = 2\cos(a)^2 - 1$
2. $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

On considère acquis la notion de fonctions cosinus et sinus et on introduit la fonction tangente.

Proposition

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

- $\sin'(x) = \cos(x)$.
- $\cos'(x) = -\sin(x)$.

La fonction tangente se définit à l'aide des fonctions cosinus et sinus. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Proposition

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|\sin(x)| \leq |x|$.

Proposition

La fonction tangente est dérivable et pour tout $x \in \mathcal{D}$:

$$\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Il vient naturellement que sur les intervalles ouverts où elle est définie, la fonction tangente est strictement croissante.