Chapitre 0 : Raisonnements et vocabulaire.

Table des matières

1 Objectifs

Ce chapitre regroupe le vocabulaire, les notations et les modes de raisonnement nécessaires à la conception et à la rédaction d'un texte mathématique.
Il ne constitue pas un ensemble se voulant exhaustif mais le socle de logique et de notations de bases sur lesquels l'essentiel des raisonnements en classes préparatoires seront développés.

2 Rudiments de logique

On définit les fondamentaux de la logique propositionnelle dont le but principal est de déterminer quand les propositions formées à partir d'une suite finie de propositions logiques combinées par des connecteurs logiques élémentaires sont vraies ou fausses.

Remarque 1 *Nous n'introduisons pas dans cette partie les quantificateurs en dehors des propositions. Nous réaliserons ce pas à la suite du cours. On se focalise ici sur ce qu'on appelle la logique d'ordre zéro.*

Définition: Assertion
Une **assertion** est un énoncé mathématique ou logique prenant soit la valeur "*vraie*" soit la valeur "fausse"

Remarque 2 *On appellera également "proposition" une assertion.*

Exemple
- A : "Jacques a un prénom qui commence par J" est une assertion dont la valeur est vraie.
- B :"Nuku Hiva" n'est pas une assertion, elle n'est ni vraie ni fausse (prise hors contexte si elle n'est pas une réponse à une question par exemple).
- C :"pour tout x rationnel" n'est pas une assertion non plus.

2.1 Opérateurs logiques élémentaires

Définition: Opérations logiques
Soient A et B deux propositions logiques.
- La **négation** de A notée **non(A)** est une assertion qui a la valeur contraire de A.
- L'assertion "A **ou** B" est la proposition qui est vraie si au moins une des deux propositions A ou B est vraie. "A **ou** B" est fausse si A et B sont toutes les deux fausses.
- L'assertion "A **et** B" est la proposition qui est vraie si A et B sont simultanément vraies et est fausse dans le cas contraire.

Exemple
Si $A = vrai$ et $B = faux$, alors
- " A OU B" est vraie.
- "A ET B" est fausse.
- non(A) est fausse et non(B) est vraie.

On décrit dans la proposition suivante comment se comporte la négation

Proposition

Soient A et B des assertions. On a

- non(A OU B)=non(A) ET non(B)
- non(A ET B)=non(A) OU non(B)
- non(non(A))=A

Exercice 1 *Soit A, B, C trois points du plan formant un triangle $\mathcal{T}$.*

1. *Écrire une proposition portant sur les longueurs AB, BC et CA exprimant que $\mathcal{T}$ est un triangle équilatéral.*
2. *Exprimer le fait que $\mathcal{T}$ n'est pas isocèle.*

2.2 Implication et équivalence

On utilise très souvent l'implication ou l'équivalence logique pour formuler des propositions mathématiques. Décrivons ces opérateurs logiques à partir des opérations élémentaires ET, OU et NON.

Définition: Implication et équivalence

Soient A et B deux propositions.

- on appelle la proposition A implique B, que l'on note $A \implies B$, la proposition "non(A) OU B".
- on appelle la proposition A est équivalent à B, que l'on note $A \iff B$, la proposition $(A \implies B)$ ET $(B \implies A)$.

Remarque 3 *L'implication signifie que si A est vraie alors nécessairement B est vraie. Par ailleurs si A est fausse cela n'a aucune incidence sur la vérité de B. Ce symbole traduit exactement le type de raisonnement SI ... ALORS ...*

Exemple

On a $x = 2 \implies x$ est pair mais l'implication réciproque est fausse on en déduit que les propositions "x=2" et "x est pair" ne sont pas équivalentes.

Exercice 2 *Démontrer que* $(1 = 2) \implies (2 = 3)$.

Comme la proposition $A \implies B$ s'écrit sous la forme $non(A) OU B$, on peut exprimer la négation de l'implication de la manière suivante :
$non(A \implies B) = non(non(A) \text{ OU } B) = non(non(A)) \text{ ET } non(B) = A \text{ ET } non(B)$

Exemple

Soient A, B les assertions suivantes :

- A :"Il pleut"
- B : "Je sors mon parapluie"

La négation de $A \implies B$: "S'IL pleut ALORS je sors mon parapluie" est :
A ET $non(B)$: "il pleut ET je ne sors <u>pas</u> mon parapluie".

Exercice 3 *Écrire la négation des assertions suivantes où P, Q, R et S sont des assertions.*

1. *P ET non(Q)*
2. *P ET (Q ET R)*
3. *P OU (Q ET R)*
4. *(P ET Q)* $\implies$ *(R* $\implies$ *S)*

3 Ensembles

On se satisfait d'une vision naïve de la théorie des ensembles en classes préparatoires où vous ne travaillerez pas avec des objets trop exotiques (comme l'ensemble de tous les ensembles) qui ne contredisent pas cette théorie.

3.1 Définitions et vocabulaire sur les ensembles

Définition *Ensemble*
Un ensemble est une collection d'objets mathématiques.

Exemple
- Les entiers naturels, relatifs, les nombres réels sont des ensembles.
- les suites réelles forment un ensemble noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
- Considérons les trois couleurs primaires en peinture rouge, jaune et bleu. Alors $\{rouge, jaune, bleu\}$ est un ensemble.

Remarque 4 *Lorsque l'on connait les éléments d'un ensemble fini ou qui vérifient une certaine propriété on peut les lister entre accolades.*

Comme un ensemble est une collection d'objets, il est naturel de vouloir dire qu'un objet donné est ou n'est pas dans un ensemble. On utilise pour formaliser cette idée, la notion d'élément d'un ensemble et d'appartenance d'un élément à un ensemble.

Définition *Eléments et appartenance*
Soit E un ensemble. Un **élément** a de l'ensemble E est un objet de E. On dit dans ce cas que a **appartient** à E et l'on note $a \in E$.

Vocabulaire 1
- *Si a est un objet mathématique n'appartenant pas à un ensemble E on note $a \notin E$.*
- *L'ensemble contenant seulement un élément a est appelé* ***singleton a*** *et noté $\{a\}$.*
- *L'ensemble sans élément se nomme* ***l'ensemble vide*** *et est noté $\emptyset$.*

Risque d'erreur
Il faut bien faire la différence entre un élément a et l'ensemble singleton a. Le lien entre les deux est simplement $a \in \{a\}$.

Exemple

On note D l'ensemble des puissances de deux, c'est-à-dire $D = \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$. On a :

- $1024 = 2^{10} \in D$
- $81 \notin D$

Exercice 4 *Nombres premiers Un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à deux n'admettant aucun diviseur positif autre que* 1 *et lui-même.*
Déterminer l'ensemble noté $\mathcal{P}_{50}$ *des nombres premiers inférieurs à* 50.

Risque d'erreur

Il faut faire la distinction entre une famille d'éléments et l'ensemble formé par ces mêmes éléments. Par exemple la famille $1, 2, 3, \ldots, n$ n'est pas un ensemble et donc n'est pas égal à l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

3.2 Parties d'un ensemble

Un ensemble non vide possède des parties, c'est-à-dire des sous-ensembles. Plusieurs problèmes mathématiques consistent à déterminer un sous-ensemble d'un grand ensemble de départ satisfaisant un certains nombre de contraintes. Par exemple, résoudre l'inéquation $2x + 1 \geq 3$ sur $\mathbb{R}$ consiste à déterminer le plus "grand" sous-ensemble $\mathcal{S}$ de $\mathbb{R}$ dont les éléments vérifient $2x + 1 \geq 3$. Un simple calcul permet de constater qu'ici $\mathcal{S} = [1, +\infty[$.

Définition *Partie d'un ensemble*

Soit E un ensemble. On dit que A est un **sous-ensemble** de E, **partie** de E ou encore A **inclus** dans E, que l'on note $A \subset E$, si pour tout élément de A est un élément de E. Formellement on a :

$$A \subset E \iff \forall x \in A, x \in E$$

Remarque 5 *Un ensemble* E *a toujours deux sous-parties, le vide et l'ensemble lui-même, c'est à dire* $\emptyset \subset E$ *et* $E \subset E$.

Exemple

L'ensemble $[1, 2]$ est inclu dans l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 2x} \geq 1\}$.

En effet, soit $x \in [1, 2]$. Alors :

$$\begin{array}{rc} & 1 \leq x \leq 2 \\ \Rightarrow & \begin{cases} 1 \leq x^2 \leq 4 \\ 2 \leq 2x \leq 4 \end{cases} \\ \Rightarrow & 3 \leq x^2 + 2x \leq 8 \\ \Rightarrow & 1 \leq \sqrt{3} \leq \sqrt{x^2 + 2x} \leq \sqrt{8} \end{array}$$

On en déduit que que pour tout $x \in [1, 2]$, $x \in \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 2x} \geq 1\}$.
On en conclut que $[1, 2] \subset \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 2x} \geq 1\}$.

Méthode *Comment montrer une inclusion d'ensemble $A \subset E$?*

Soit A et E des ensembles. Pour montrer que A est inclus dans E, on procède de la manière suivante :

- On considère x un élément arbitraire de l'ensemble A.
- On montre que x est un élément de E.
- On conclut que $A \subset E$.

Exercice 5 *Montrer que l'ensemble* $A = \{\frac{1}{4}; 1; 32\}$ *est inclus dans l'ensemble* $E = \{x^{2x+1} \ / \ x \in \mathbb{R}_+^\star\}$.

Définition *Ensemble des parties*

Soit E un ensemble. Alors, l'ensemble des parties de E noté $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble de tous les sous-ensembles de E. Plus formellement :

$$A \in \mathcal{P}(E) \iff A \subset E$$

Exemple

Considérons l'ensemble $E = \{0; 1\}$. Alors :

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{0\}; \{1\}; \{0, 1\}\}$$

Exercice 6 *Déterminer* $\mathcal{P}(E)$ *pour l'ensemble* $E = \{rouge, jaune, bleu\}$.

Méthode *Comment montrer que deux ensembles sont égaux ?*

Soient A et B deux ensembles. Pour montrer que $A = B$ on peut raisonner par double inclusion.

1. On montre que $A \subset B$.
2. On montre que $B \subset A$.
3. On en conclut que $A = B$.

Exemple

Montrons que $A = \{|x| \mid x \in \mathbb{R}\} = B = [0, +\infty[$ par double inclusion.

- $A \subset B$. Soit $y \in \{|x| \mid x \in \mathbb{R}\}$, alors il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = |x| \geq 0$ donc $y \in [0, +\infty[= B$.
- Soit $y \in [0, +\infty[$, alors par définition de la valeur absolue, $y = |y|$ donc $y \in \{|x| \mid x \in \mathbb{R}\}$ et on obtient $B \subset A$.
- Conclusion : $A = B$.

3.3 Opérations sur les ensembles

Nous examinons dans cette section des opérations sur les ensembles qui apparaissent dans de deux nombreuses formulations de problèmes mathématiques :
— l'intersection de deux ensembles
— la réunion de deux ensembles
— le complémentaire de deux ensembles

3.3.1 Intersection

On se penche sur un problème typique d'intersection d'ensembles.

Problème 1 *Considérons dans le plan deux droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$. Une question naturelle est de se demander en quel lieu se rencontrent-elles ?*

On sait répondre à cette question. Il y a trois éventualités si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont :
— confondues, alors le lieu de rencontre est $\mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.
— parallèles non confondues, alors elle ne se rencontrent en aucun point.
— non parallèles, alors elles se rencontrent en un unique point qu'on peut appeler P.

Définition

Soient A et B des ensembles. L'**intersection** de A et B , noté $A \cap B$ est l'ensemble des élément qui appartiennent à A **et** à B. Plus formellement :

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \textbf{ et } x \in B$$

Diagramme :

Exemples

- Soient $A = \{0; 1; 2; 3\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Alors $A \cap B = \{2; 3\}$
- La solution du problème d'intersection des droites peut se traduire ainsi avec le symbole "$\cap$", si les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont :
  1. confondues, alors $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \mathcal{D}_1 = \mathcal{D}_2$.
  2. parallèles non confondues, alors $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \emptyset$.
  3. non parallèles, alors elles $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 = \{P\}$ où $\mathcal{P}$ désigne un point du plan.

Vocabulaire 2 *Deux ensembles A est B tels que $A \cap B = \emptyset$ sont dits **disjoints**. Par exemple , l'ensemble des entiers naturels pairs est disjoint de l'ensemble des entiers naturels impairs.*

Proposition

Soient A, B et C trois ensembles. Alors :

1. $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité)

Démonstration :

3.3.2 Réunion

Le problème suivant est un problème classique ou la notion de réunion d'ensemble est fondamentale dans sa solution.

Problème 2 *Soient P et Q deux fonctions polynomiales de degrés 2 telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = x(x-1)$ et $Q(x) = x(x-2)$.*
Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation $(E) : P(x) \times Q(x) = 0$.

L'équation (E) est une équation produit et on sait que :

$$P(x) \times Q(x) = 0 \Longleftrightarrow P(x) = 0 \text{ ou } Q(x) = 0.$$

En l'occurrence :

$$\begin{array}{rc} & P(x) = 0 \text{ ou } Q(x) = 0 \\ \Longleftrightarrow & x(x-1) = 0 \text{ ou } x(x-2) = 0 \\ \Longleftrightarrow & (x = 0 \text{ ou } x = 1) \text{ ou } (x = 0 \text{ ou } x = 2) \\ \Longleftrightarrow & (x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2) \end{array}$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation (E) est l'ensemble $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$ sachant que l'ensemble des solutions de $P(x) = 0$ est $\mathcal{S}_1 = \{0, 1\}$ et l'ensemble des solutions de $Q(x) = 0$ est $\mathcal{S}_2 = \{0, 2\}$.

Définition *Réunion*

Soient A et B des ensembles. La **réunion** de A et B , noté $A \cup B$ est l'ensemble des élément qui se trouve dans A **ou** dans B. Plus formellement :

$$x \in A \cup B \iff x \in A \textbf{ ou } x \in B$$

Diagramme :

Exemples

— Soient $A = \{0; 1; 2; 3\}$ et $B = \{2; 3; 4; 5\}$. Alors $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

— La solution du problème de résolution de l'équation (E) peut se traduire sous la forme $\{0, 1, 2\} =$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid P(x) \times Q(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid P(x) = 0\} \cup \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) = 0\} = \{0, 1\} \cup \{0, 2\}$$

Proposition

Soient A, B et C trois ensembles. Alors :

1. $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)
2. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité)

Démonstration :

Proposition *Distributivité*
Soient A, B et C trois ensembles. Alors :

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Démonstration :

3.3.3 Complémentaire

Définition
Soit E un ensemble et A une partie de E. Alors, l'ensemble des élément qui se trouvent dans E mais non dans A s'appelle le **complémentaire** de A dans E et est noté $\bar{A}$, $E \backslash A$ ou encore $\complement_E A$.

Diagramme :

Exemple
Soit $E = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 10\}$ et $A = \{0; 2; 4; 10\}$. Alors :

$$E \backslash A = \{1; 3; 5; 7\}.$$

Proposition *Distributivité*
Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble E. Alors :

1. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
2. $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
3. $\overline{\overline{A}} = A$

Démonstration :

3.3.4 Produit cartésien

Nous avons rencontré à plusieurs reprises, par exemple lors de la résolution de systèmes linéaires, des listes de nombres $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Cette notion peut se formaliser à l'aide de la notion de produit cartésien.

Définition *Produit cartésien*
Soient $n \in \mathbb{N}$ et $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles. Alors le **produit cartésien** des ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$, noté $\prod_{i=1}^{n} E_i$ est l'ensemble des listes $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ où pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $x_i \in E_i$. Plus formellement :

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \Longleftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\}, x_i \in E_i$$

Diagramme :

Vocabulaire 3 *Dans le cas d'un produit cartésien de n mêmes ensembles E, le produit cartésien se note E^n.*

Exemples
- Le plan $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ est un produit cartésien.
- Les nombres rationnels peuvent se définir à l'aide d'un produit cartésien :

$$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^\star\}$$

- Les solutions d'un système linéaire $n \times p$ est un ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^p$.

4 Quantificateurs

La manipulation de propositions liées par des opérateurs logiques comme étudié dans la partie précédente n'est pas suffisament riche mathématiquement. On a besoin pour décrire un spectre plus large de proposition d'introduire des variables et de les quantifier. On distingue pour les variables deux types de quantificateurs, les universels et les existentiels.

Définition *Quantificateurs universels et existentiels*

- Le quantificateur **universel** se dir "pour tout" et se note $\forall$.
- Le quantificateur **existentiel** se dit "il existe" et se note $\exists$.
- "il existe un unique" se note $\exists!$.

Exercice 7 *Transformer en langage formel puis montrer la proposition "Pour tout entier naturel k, k est pair si et seulement si k^2 est pair".*

Risque d'erreur

On n'utilise jamais ces abréviations dans des phrases mathématiques écrites en français, notamment dans les énoncés de propositions.

Exemple

On considère une liste de propositions ainsi que leur négation :

- "Pour tout $z \in \mathbb{Z}$, $z^3 \in \mathbb{Z}$" a pour négation " Il existe $z \in \mathbb{Z}$, z^3 n'est pas un entier".
- " Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 - 1 = 0$" a pour négation "Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - 1 \neq 0$".
- "La nuit tous les chats sont gris" a pour négation "Il existe une nuit où un chat est n'est pas gris".

Proposition *Négation d'une propostion commençant par un quantificateur*

- La négation d'une proposition de la forme : "$\forall x \in A$, $\mathcal{P}(x)$ a pour expression : "$\exists a \in A$, $\text{non}(\mathcal{P}(a))$".
- La négation d'une proposition de la forme : "$\exists x \in A$, $\mathcal{P}(x)$ a pour expression : "$\forall x \in A$, $\text{non}(\mathcal{P}(x))$".

Exercice 8 *Déterminer si les assertions suivantes sont vraies ou fausses puis déterminer leur négation :*

1. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x + y > 0$
4. $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, y^2 > x$

5 Modes de raisonnement

On décrit dans cette partie quatre grands types de raisonnement utilisés en mathématiques :
- le raisonnement par récurrence
- le raisonnement par contraposition
- le raisonnement par l'absurde
- le raisonnement par analyse-synthèse

5.1 Raisonnement par récurrence

On introduit dans cette sous-section le raisonnement par récurrence qui se déploie selon deux formes, l'une dote simple l'autre appelée récurrence forte.

5.1.1 Récurrence simple

La récurrence simple a pour principe, le théorème suivant :.

Théorème 3.1 *Principe de Récurrence*
Soit Q une propriété mathématique de la forme Q : "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ entier naturel, $(\mathcal{P}_n)$".
Supposons que :
— $\mathcal{P}_{n_0}$ soit vraie
— Soit $n \geq n_0$ entier, $\mathcal{P}_n$ vraie $\Longrightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ vraie
Alors la propriété Q est vraie.

Ce type de raisonnement est tout à fait fondamental en mathématique et nous l'emploierons de manière immodérée lorsque nous étudierons en profondeur les suites et les fonctions.

Méthode *Comment raisonner par récurrence ?*
Soit Q une propriété mathématique de la forme Q : "$\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ entier naturel, $(\mathcal{P}_n)$". Une démonstration par récurrence de la propriété Q se réalise en quatre étapes.

1. On identifie correctement la propriété $\mathcal{P}_n$ qui dépend d'un entier naturel dans la propriété Q.
2. Initialisation : On vérifie que la propriété $\mathcal{P}_{n_0}$ est vraie.
3. Hérédité : On suppose que la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un entier naturel $n \geq n_0$ arbitraire. On montre ensuite que cela entraîne que la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
4. Conclusion : On en conclut que la propriété Q est vraie.

Remarque 6 *Il faut absolument dans une rédaction faire apparaître explicitement les étapes de l'initialisation et de l'hérédité.*

Risque d'erreur
Dans l'étape de l'hérédité, il faut toujours utiliser l'hypothèse de récurrence pour montrer $\mathcal{P}_{n+1}$. Lorsqu'elle n'apparaît pas dans la démonstration, c'est généralement qu'il y a une erreur.

Exemple

Montrons par récurrence la propriété Q : "$\forall n \geq 0,\ (n+1)! \geq 2^n$".

1. On identifie tout d'abord la propriété $\mathcal{P}_n$ dans Q. Il s'agit de $\mathcal{P}_n$: $(n+1)! \geq 2^n$.
2. Initialisation : Vérifions que $\mathcal{P}_0$ est vraie. On sait que $1! = 1$ donc $(0+1)! = 1! = 1 \geq 2^0 = 1$.
3. Hérédité : On suppose que pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire , $(n+1)! \geq 2^n$.
   On a :

$$\begin{aligned}(n+2)! &\underbrace{=}_{\text{par définition}} (n+2)\times(n+1)\times\cdots\times 1\\ &\underbrace{=}_{\text{découpage}} (n+2)\times(n+1)!\\ &\underbrace{\geq}_{\text{hypothèse de récurrence}} (n+2)\times 2^n \geq 2\times 2^n = 2^{n+1}\end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie, l'hérédité est donc vérifiée.
4. Conclusion : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)! \geq 2^n$.

Exercice 9 *Soit $x \in \mathbb{R}^\star$ tel que $x > -1$. Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ que*

$$(1+x)^n > 1 + nx$$

5.1.2 Récurrence forte

Le principe de récurrence admet une généralisation dans ce que l'on nomme le principe de récurrence forte :

Théorème: Principe de récurrence forte

Soit $\mathcal{P}_n$ une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$ et $n_0 \in \mathbb{N}$. Supposons que :

- Initialisation : la proposition $\mathcal{P}_{n_0}$ soit vraie.
- Hérédité : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $(\mathcal{P}_{n_0}$, et $\mathcal{P}_{n_0+1}, \ldots, \mathcal{P}_n)$ implique $\mathcal{P}_{n+1}$.

Alors, la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

La méthode pour appliquer un tel raisonnement est ressemblant à celle de la récurrence simple sauf que dans l'hypoyhèse de récurrence on va supposer les propositions $\mathcal{P}_k$ vraies pour k allant de n_0 jusqu'à $n \geq n_0$ entier naturel arbitrairement fixé.

Exercice 10 *Soit $x \in \mathbb{R}^\star$ tel que $x + \dfrac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $x^n + \dfrac{1}{x}^n \in \mathbb{Z}$.*

Exercice 11 *Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^\star$, il existe $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n = 2^p(2q+1)$.*

5.2 Raisonnement par contraposition

Le raisonnement par contraposition permet de démontrer une proposition de la forme $A \implies B$ mais en montrant plutôt ***la contraposée*** *$non(B) \implies non(A)$ car*

$$(A \implies B) \iff (non(B) \implies non(A))$$

Exemple

Pour montrer la proposition "$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x^2+x+1 \neq 0) \implies (x+1=\sqrt{x})$", on peut montrer la contraposée " $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ (x+1=\sqrt{x}) \implies (x^2+x+1=0)$" qui est vraie.
En effet, s'il existe $x \geq 0$ tel que $x+1=\sqrt{x}$ alors $(x+1)^2 = (\sqrt{x})^2 = x$ donc $x^2+2x+1 = x \implies x^2+x+1=0$, d'où la proposition

Exercice 12 *Montrer à l'aide d'un raisonnement par contraposée que "Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, si n^2 est pair, alors n est pair".*

5.3 Raisonnement par l'absurde

Le raisonnement par l'absurde permet de montrer qu'une proposition Pest fause en supposant non(P) vraie et en aboutissant à une contradiction logique.

Exemple

On peut montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel par l'absurde.

Exercice 13 *Montrer que tout nombre premier strictement plus grand que deux est impair.*

Exercice 14 *Soit $a \in \mathbb{R}$.*
1. *Montrer que $(\forall \varepsilon \geq 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.*
2. *Montrer que $(\forall \varepsilon > 0, |a| \leq \varepsilon) \implies a = 0$.*

5.4 Raisonnement par analyse-synthèse

Méthode

Raisonnement par analyse-synthèse

Lorsque l'on souhaite démontrer une propriété de la forme "$\exists a \in E$ telle que $\mathcal{P}(a)$ est vraie". On peut raisonner en deux étapes.

1. ***Analyse*** *: on suppose qu'un telle élément a existe et vérifie la propriété $\mathcal{P}$. On cherche alors à déterminer par conditions nécessaires les formes possibles de l'élément a.*
2. ***Synthèse*** *: on tente de démontrer en considérant l'élément a avec la structure déterminée à l'étape d'analyse que la propriété $\mathcal{P}(a)$ est vraie.*

Exemple

Déterminons l'ensemble des solutions réelles de l'équation

$$(E): \quad \sqrt{x+1} = x$$

On raisonne par analyse synthèse. ***Analyse*** *: Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $\sqrt{a+1} = a$. Alors en élevant l'expression au carré on obtient l'égalité $a+1 = a^2 \iff a^2-a-1=0$. Le réel n'a que deux formes possibles qui sont $a_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ ou $a_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.*
Synthèse *: On vérifie maintenant si a_1 et a_2 sont bien solutions de l'équation (E).*

- *$a_1 + 1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + 1 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} > 0$ donc $\sqrt{a_1+1} = \sqrt{a_1^2} = a_1$ donc a_1 est solution de (E).*
- *on a $0 < a_1 + 1 < a_2 + 1$ donc a_2 est également solution de (E).*

On en conclut que $\{a_1, a_2\}$ est l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 15 *Déterminer l'ensemble des fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

6 Applications

On s'intéresse dans cette section aux applications en général d'un ensemble E vers un autre ensemble F. Dans la pratique nous rencontrerons surtout des exemples d'applications dont les ensembles de départ et d'arrivés sont construits à partir de $\mathbb{R}$.

Définition *Application*
Soient E et F des ensembles. Une **application** *f de E dans F que l'on note $f : E \to F$ est une relation entre E et F qui à un élément x de E associe un unique élément $f(x)$ de F .*

Vocabulaire 4 *Soit $f : E \to F$ une application. On dit que :*
- *$y \in F$ est l'image de $x \in E$ par f si $y = f(x)$.*
- *$y \in F$ a pour antécédent $x \in E$ si $y = f(x)$.*

Exemples
- *la fonction exponentielle est une application de $E = \mathbb{R}$ dans $F = \mathbb{R}_+$.*
- *soit $E = \{rouge, jaune, bleu\}$ alors :*

$$\begin{array}{rcl} f : E & \to & E \\ rouge & \mapsto & rouge \\ bleu & \mapsto & rouge \\ jaune & \mapsto & bleu \end{array}$$

est une application.

6.1 Image directe

Définition *Image directe*
*Soient E et F des ensembles et $f : E \to F$ une application. On appelle l'***image directe** *de $A \subset E$ par f, l'ensemble*

$$f(A) = \{y \in F \ / \ \exists a \in A, y = f(a)\}$$

Vocabulaire 5 *On note $Im(f)$ l'ensemble $f(E)$, c'est-à-dire l'image de l'ensemble de départ en entier.*

Exemple
- *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction carrée et $A = [-1, 1]$. Alors :*

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \ / \ \exists a \in [-1, 1], y = a^2\} = [0, 1]$$

- *En reprenant l'exemple de f définie sur $E = \{rouge, jaune, bleu\}$, on obtient que $Im(f) = \{rouge, bleu\}$*

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F ainsi que $A \subset E$. Deux situations se présentent.

- *On vous demande de montrer que $f(A) = B$. Dans ce cas là, il suffit d'appliquer la méthode de double inclusion pour montrer l'égalité des ensembles A et B.*
- *On vous demande sans indication de déterminer $f(A)$. Dans ce cas, il est nécessaire de réaliser une conjecture au brouillon pour déterminer puis démontrer l'égalité entre $f(A)$ et l'ensemble conjecturé.*

Exemple

Soit l'application :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

Déterminons $f(\mathbb{R}^2)$.

- *On remarque que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$ et $y^2 \geq 0$ donc $f(x, y) = x^2 + y^2 \geq 0$. Ainsi, $f(\mathbb{R}^2) \subset \mathbb{R}_+$.*
- *Il semble raisonnable de conjecturer que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}_+$. Pour cela on essaye de montrer l'inclusion $\mathbb{R}_+ \subset f(\mathbb{R}^2$.*
- *Soit $z \in \mathbb{R}_+$. Alors z admet une racine carrée qui vérifie $(\sqrt{z})^2 = z$. Mais $0^2 = 0$ et $z = (\sqrt{z})^2 + 0^2 = f(\sqrt{z}, 0)$ donc $z \in f(\mathbb{R}^2)$. On obtient que $\mathbb{R}_+ \subset f(\mathbb{R}^2)$.*
- *Conclusion : $\mathbb{R}_+ = f(\mathbb{R}^2)$.*

Exercice 16 *Montrer que l'image directe de l'application :*

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 5x + 4 \end{array}$$

par l'ensemble $A = [1, 4]$ est l'ensemble $B = [\frac{-9}{4}, 0]$.

6.2 Image réciproque

Définition: Image réciproque

Soient $f : E \to F$ et $B \in \mathcal{P}(F)$. On appelle **image réciproque de B par f** *que l'on note $f^{-1}(B)$ l'ensemble*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid \exists y \in B, \quad f(x) = y\}$$

il s'agit de l'ensemble des antécédents par f des éléments de B.

Risque d'erreur

Il ne faut absolument pas confondre l'image réciproque $f^{-1}(B)$ avec l'image directe de B par l'application inverse de f qui n'existe pas nécessairement. Quelque soit la nature de f, l'image réciproque de tout sous-ensemble de F est bien définie.

Exemple

L'image réciproque de $B = \{1, 2\}$ par $f : x \mapsto x^2$ est l'ensemble

$$f^{-1}(B) = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$$

Méthode

Déterminer une image réciproque

Soient $f : E \to F$ et $B \subset F$. Pour déterminer $f^{-1}(B)$, on :

- *Pour $b \in B$ arbitraire on détermine $\mathcal{S}_b$ l'ensemble des solutions de l'équation $(E_b) : f(x) = b$.*
- *On obtient $f^{-1}(B)$ comme la réunion de tous les ensembles trouvés à la première étape*

$$f^{-1}(B) = \cup_{b \in B} \mathcal{S}_b$$

Exercice 17 *Soit $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ l'application qui à $z \in \mathbb{C}^\star$ associe $f(z) = z + \frac{1}{z}$. Déterminer l'image réciproque de $i\mathbb{R}$ par f.*

6.3 Fonctions indicatrices

Définition: Fonction indicatrice

Soient A et E deux ensembles tels que $A \subset E$. La fonction indicatrice de A, notée $\nVdash_A$ est définie par :

$$\begin{array}{rccl} 1_A : & E & \longrightarrow & \{0, 1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ \quad 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Un des avantanges de cette fonctions est de pouvoir définir sur un grand E une application dont l'expression n'est valide que sur un sous-ensemble $A \subset E$.

Exemple

L'ensemble de définition de l'application $x \mapsto \sqrt{x-1}$ est $A = [1; +\infty[$ mais l'application

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 1_A(x) \times \sqrt{x-1} \end{array}$$

est bien définie.

Les fonctions indicatrices permettent de relier certaines opérations ensemblistes sur les ensembles avec des opérations sur les fonctions.

Proposition

Soient A, B deux sous-ensembles d'un ensemble E. On a

— $1_A \times 1_B = 1_{A \cap B}$

— $max(1_A, 1_B) = 1_{A \cup B}$

Démonstration :

Exercice 18 *Exprimer les fonctions suivantes en fonction d'une fonction indicatrice* 1_C *:*

1. $min(1_A, 1_B)$
2. $1 - 1_A$

6.4 Restriction

Définition: Fonction restreinte à un ensemble
*Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. La **restriction de** f **à** A, notée $f_{|A}$ et l'application :*

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

6.5 Applications injectives

Définition *Application injective*
*Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles quelconques E et F. On dit que f est **injective** si tout élément de F admet **au plus** un antécédent par f. Plus formellement :*

$$f \text{ injective } \iff \forall y \in f(E), \exists! x \in E, y = f(x)$$

Diagramme :

La proposition suivante est une caractéristique très pratique des applications injectives.

Proposition
Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.
Alors f est injective si et seulement si pour tout $x, x' \in E$, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Démonstration.

Proposition *Monotonie et injectivité*

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une application où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle. Si f est strictement croissante ou strictement décroissante , alors f est injective sur I.

Démonstration *:*

Risque d'erreur

La réciproque de la proposition précédente est fausse. En effet, considérons la suite $(\frac{(-1)^n}{n})_{n\geq 1}$, il s'agit d'une suite qui n'est pas monotone mais qui est pourtant injective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

- *On considère l'équation $f(x) = f(x')$ où x et x' appartiennent à E.*
- *On montre alors que $x = x'$.*
- *On en conclut que f est injective.*

Exemple

L'application $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ qui a tout couple $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, associe $g(a,b) = 2^a \times 3^b$ est injective. Appliquons la méthode précédente.

1. *Soient (a,b) et (a',b') deux éléments de $\mathbb{N}^2$ tels que :*

$$\begin{aligned} & g(a,b) = g(a',b') \\ \iff \quad & 2^a \times 3^b = 2^{a'} \times 3^{b'} \end{aligned}$$

En divisant par $2^{a'} \times 3^b$ on en déduit que $2^{a-a'} = 3^{b'-b}$. Comme 2 ne divise pas 3 et 3 ne divise pas 2, l'unique possibilité est que $a - a' = 0$ et $b - b' = 0$, donc $a = a'$ et $b = b'$. On en conclut que $(a,b) = (a',b')$ et donc que l'application g est injective.

Exercice 19 *Montrer que l'application :*

$$\begin{aligned} h : \quad [1,+\infty[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{x}\ln(x) \end{aligned}$$

est injective.

Méthode

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.
On détermine deux éléments $x_1 \in E$ et $x_2 \in E$ tels que $x_1 \neq x_2$, vérifiant $f(x_1) = f(x_2)$. Alors f n'est pas injective.

Exemple

On considère l'application :

$$\begin{aligned} ch : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \tfrac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Cette fonction est paire et vérifie donc $ch(-1) = ch(1)$ alors que $-1 \neq 1$. On en déduit qu'elle n'est pas injective.

Exercice 20 *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui à x associe $f(x) = x^2 - x$ n'est pas injective.*

6.6 Applications surjectives

Définition *Application surjective*

*Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles quelconques E et F. On dit que f est **surjective** si tout élément de F admet **au moins** un antécédent par f. Plus formellement :*

$$f \text{ surective } \iff f(E) = F$$

Diagramme :

Exemple
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \lfloor 2x \rfloor$. Montrons que f est surjective.

1. *Soit $y \in \mathbb{Z}$*
2. *On cherche $x \in \mathbb{R}$ tel que $\lfloor 2x \rfloor = y$. Or par définition, $\lfloor 2x \rfloor$ est l'unique entier satisfaisant l'inégalité $\lfloor 2x \rfloor \leq 2x < \lfloor 2x \rfloor + 1$. On en déduit que si x vérifie :*

$$\begin{aligned} & y \leq 2x < y+1 \\ \iff \quad & \frac{y}{2} \leq x < \frac{y+1}{2} \\ \iff \quad & x \in [\frac{y}{2}, \frac{y+1}{2}[\end{aligned}$$

alors $f(x) = y$ et f est donc surjective.

Méthode *Comment montrer qu'une application est surjective ?*
Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F.

1. *Pour montrer que f est surjective on considère $y \in F$ quelconque.*
2. *On détermine un élément $x_y \in E$ tel que $f(x_y) = y$.*
3. *On en conclut que f est surjective.*

Exercice 21 *Montrer que l'application suivante est surjective :*

$$f : \begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto |x| - |y| \end{aligned}$$

6.7 Applications bijectives

Définition *Application biective*
*Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles quelconques E et F. On dit que f est **bijective** si tout élément de F admet **un unique** antécédent par f. Plus formellement :*

$$f \text{ bijective } \iff \forall y \in F, \exists! x \in E, y = f(x)$$

Diagramme :

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles quelconques E et F. L'application f est bijective si elle injective et surjective.

Démonstration *:*

Vocabulaire 6 *Soit E un ensemble. On note $Id_E : E \to E$ l'application qui à x associe lui-même.*

Méthode *Comment montrer qu'un application est bijective ?*

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.

1. *On montre que f est injective.*
2. *On montre que f est surjective.*
3. *On en conclut que f est bijective.*

Exemple

Soit

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+^\star & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\star \\ x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Cette application est bijective. En effet :

1. *f est injective : soient x et x' deux réels positifs tels que $f(x) = f(x')$, alors :*
$$x^2 = (x')^2 \Leftrightarrow x^2 - (x')^2 = 0 \Leftrightarrow (x - x') \times (x + x') = 0 \Rightarrow x = x'.$$
2. *f est surjective : soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$, alors $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.*

Proposition

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles E et F. Alors f est bijective si et seulement si il existe $g : F \to E$ telle que :

— $x \mapsto f(g(x)) = Id_F$ | — $x \mapsto g(f(x)) = Id_E$

*On dit que g est la **fonction réciproque** de f.*

Démonstration *:*

Méthode *Comment montrer qu'un application est bijective ?*

Soit $f : E \to F$ une application entre deux ensembles.

1. *Soit $y \in F$ quelconque, on pose l'équation en $x \in E$, $f(x) = y$*
2. *On détermine une solution x_y de l'équation précédente. On pose l'application $g : F \to E$ qui à y assoie x_y.*
3. *On vérifie que $x \mapsto f(g(x)) = Id_F$ et $x \mapsto g(f(x)) = Id_E$.*

Ainsi f est bijective.

Exemple

Reprenons l'exemple précédent. Soit

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star \\ x \mapsto x^2 \end{array}$$

Cette application est bijective. En effet d'après la méthode :

1. *soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$, on pose l'équation $f(x) = x^2 = y$ sur $\mathbb{R}_+^\star$. On trouve que $x = \sqrt{y}$ convient.*
2. *On pose $g : \mathbb{R}_+^\star \longrightarrow \mathbb{R}_+^\star$ qui à y associe $\sqrt{y}$.*
3. *g est bien la réciroque de f car pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\sqrt{x^2} = x = (\sqrt{x})^2$.*

Exercice 22 *Soit*

$$f : \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \longmapsto (x+y, x-y) \end{array}$$

Montrer à l'aide de la méthode précédente que f est bijective.

Proposition

Soit $f : I \to f(I)$ une application entre un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ et $f(I)$. Alors si f est strictement monotone alors f est bijective.

Démonstration

Exercice 23 *Montrer que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui à x associe $x^3 - 1$ est bijective.*

7 Relations binaires

*En mathématiques on s'intéresse particulièrement aux **relations** entre les objets d'un même ensemble.*

Par exemple $\leq$ est une relation binaire, on dit encore d'arité deux, sur l'ensemble des nombres réels (c'est même ce que l'on appelle une relation d'ordre. Dans le programme de MP2I seule une famille de relation est approfondie, il s'agit des relations d'équivalence.

Définition: Relation binaire

*Soient E et F des ensembles. Une **relation binaire sur** E **et** F est une sous-partie de $E \times F$ généralement notée $\mathcal{R}$.*

Exemple

L'ensemble des couples $\{(a,a) \mid a \in \mathbb{R}\}$ est la relation binaire "=".

7.1 Relations d'équivalence

Définition: Relation d'équivalence

*Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire de E vers E. On dit que la relation $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** si pour tous $x, y, z \in E$:*

- $x\mathcal{R}x$ *(reflexivité)*
- $x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$ *(symétrie)*
- *si* $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$, *alors* $x\mathcal{R}z$. *(transitivité)*

Exemple

La relation binaire $=$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence. En effet, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$

- $x = x$
- *si* $x = y$ *alors* $y = x$
- *si* $x = y$ *et* $y = z$ *alors* $x = z$

Exercice 24 *Soit la relation binaire sur $\mathbb{Z}$ définie par*

$$\forall m, n \in \mathbb{Z} \quad m\mathcal{R}n \text{ si } m - n \text{ est pair}$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence .

7.2 Classes d'équivalence

Définition: Classes d'équivalence

*Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. On appelle **classe d'équivalence de** $x \in E$ l'ensemble noté $\overline{x}$ défini par*

$$\overline{x} = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

*Un élément $y \in \overline{x}$ est appelé un **représentant** de la classe $\overline{x}$.*

Remarque 7 *Par la propriété de réflexivité, x appartient toujours à $\overline{x}$.*

Exercice 25 *Soit $E = \{0, 1, 2\}$ et $F = \mathcal{P}(E)$. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur F comme suit :*

$$\forall A, B \in F, \quad A\mathcal{R}B \text{ s'il existe une bijection de } A \text{ vers } B$$

Déterminer les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$.

7.3 Relations d'ordre

Définition: Relation d'ordre

Soit E un ensemble. On appelle relation d'ordre sur E toute relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive. On peut noter $\preceq$ une telle relation d'ordre générale et on dira alors que $(E, \preceq)$ est un ensemble ordonné pour dire que E est muni de la relation d'ordre $\preceq$.

Exemple

- *L'inégalité classique $\leq$ sur $\mathbb{R}$ lui confère une structure d'ensemble ordonné.*
- *La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.*

Exercice 26 *Montrer que $\mathbb{N}^\star$ muni de la relation binaire : pour tout $p, q \in \mathbb{N}^\star$, $q \preceq p$ si $p|q$ est un ensemble ordonné pour la relation $\preceq$.*

Définition: Relation d'ordre total

Une relation d'ordre $\preceq$ sur un ensemble E est dite totale lorsque pour tout $x, y \in E$, $x \preceq y$ ou $y \preceq x$. On dit alors que l'ensemble $(E, \preceq)$ est totalement ordonné.

Exemple

- *L'ensemble $(\mathbb{N}, \leq)$ est totalement ordonné.*
- *L'ensemble $(\mathcal{P}(E), \subset)$ n'est pas totalement ordonné.*