# Chapitre 7 : Limites et continuité.

## Table des matières

# 1 Introduction

On étudie dans ce chapitre la notion de limite de fonctions d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}$ où dans la plupart du temps $f : I \to \mathbb{R}$ est définie sur un intervalle. Cette notion est plus délicate que celle de suites car les sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$ sont plus complexes que les sous-ensembles bornés de $\mathbb{N}$ qui sont des ensembles finis. Elle a vue le jour sous sa forme moderne au $19^{\text{ème}}$ siècle grâce aux contributions de mathématiciens comme Karl Weierstrass ou Augustin Cauchy.

L'objet de ce chapitre est aussi de définir et développer la notion intuitive de fonction continue, tout d'abord localement en un point puis globalement sur un ensemble quelconque assez régulier (des réunions finies d'intervalles). Nous appliquerons cette notion au travers du théorème des valeurs intermédiaires qui permet de déterminer simplement si un point est dans l'image directe d'une fonction. Puis nous traiterons du théorème de la bijection qui permet de donner un critère simple pour reconnaître une bijection continue pour les fonctions définies sur un intervalle : la stricte monotonie.
Une application de la notion de continuité est l'étude des suites récurrentes vérifiant une relation de récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est continue et monotone.

Enfin, nous aborderons les limites de fonctions à valeurs complexes définies sur des parties de $\mathbb{R}$ dont certains résultats ne sont plus valables dans la cas réel.

# 2 Limite d'une fonction en un point

## 2.1 Limites finies

**Définition : Extrémité/Intérieur**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de la forme $[a,b], ]a,b[, ]a,b]$ ou $[a,b[$. On dit que $x_0$ est une **extrémité** si $x_0 = a$ ou $b$ et qu'il est **intérieur** à $I$ si $x_0$ est un élément de $I$ qui n'est pas une extrémité.

**Définition : Limite finie d'une fonction en un point**

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ pour $x_0 \in I$ ou $x_0$ une extrémité de $I$ si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in (I \cap [x_0 - a, x_0 + a])$, $f(x) \in [l - \epsilon, l + \epsilon]$.

**Exemple : Une limite**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 1$. Alors $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$.

On raisonne par analyse-synthèse :

— Analyse : Soit $\epsilon > 0$, alors :

$$\begin{aligned} & 2x+1 \in [3-\epsilon, 3+\epsilon] \\ \Longleftrightarrow & 3 - \epsilon \leq 2x+1 \leq 3+\epsilon \\ \Longleftrightarrow & 2-\epsilon \leq 2x \leq 2+\epsilon \\ \Longleftrightarrow & 1 - \frac{\epsilon}{2} \leq x \leq 1 + \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

— Synthèse : D'après l'étape d'analyse, pour tout $\epsilon > 0$, en posant $a = \frac{\epsilon}{2}$ on obtient que pour tout $x \in \mathbb{R} \cap ([1-a, 1+a]$, $f(x) \in [3-\epsilon, 3+\epsilon]$.

— Conclusion : $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 3$

On peut s'intéresser également au comportement des fonctions, lorsqu'elles sont définies sur $\mathbb{R}$, lorsque $x$ tend vers $-\infty$ et $+\infty$. Formalisons cette notions.

**Définition : Limite en l'infini**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que $f$ admet $l \in \mathbb{R}$ comme limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a, +\infty[$, (respectivement $x \in I \cap ]-\infty, a]$), $f(x) \in [l-\epsilon, l+\epsilon] \Leftrightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$.

**Dessin** :

**Exemple : limite (2)**

On considère la fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ définie sur $\mathbb{R}^\star$. On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

**Argument** :

**Proposition : Unicité de la limite**

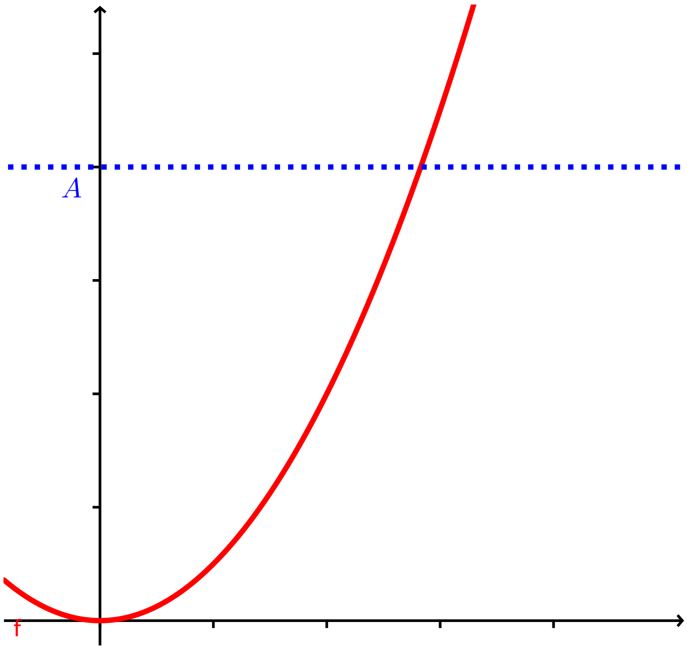
Si $f : D \to \mathbb{R}$ admet une limite finie $l$ en un point $x_0$, en $+\infty$ ou en $-\infty$, alors cette limite est unique.

**Démonstration** : admise.

**Remarque 1** *D'après la proposition précédente si on montre qu'une limite finie existe elle est unique. On peut donc parler de la limite de $f$.*

## 2.2 Limites infinies

Dans la précédente partie nous avons traité des limites finies, il est possible lorsque $x$ tend vers un point, ou à l'infini, que $|f(x)|$ devienne arbitrairement grand. Si $f$ est de signe constant à partir d'un certain moment, on peut formaliser la notion de "tendre vers l'infini".




copie.pdf

**Définition : limite $-\infty$ en l'infini**

On dit que $f$ admet $-\infty$ pour limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$- lorsque pour tout $M > 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a, +\infty[$ (respectivement $x \in I \cap ]-\infty, -a]$), $f(x) \leq -M$. On dit que $f$ admet une limite infinie égale à $-\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$).

**Définition : limite $+\infty$ en l'infini**

On dit que $f$ admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) lorsque pour tout $M > 0$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap [a, +\infty[$ (respectivement $x \in I \cap ]-\infty, -a]$), $f(x) \geq M$. On dit que $f$ admet une limite infinie égale à $+\infty$ en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$ et on note : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$).

**Dessin** :

**Exemple**

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 \end{array}$, alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

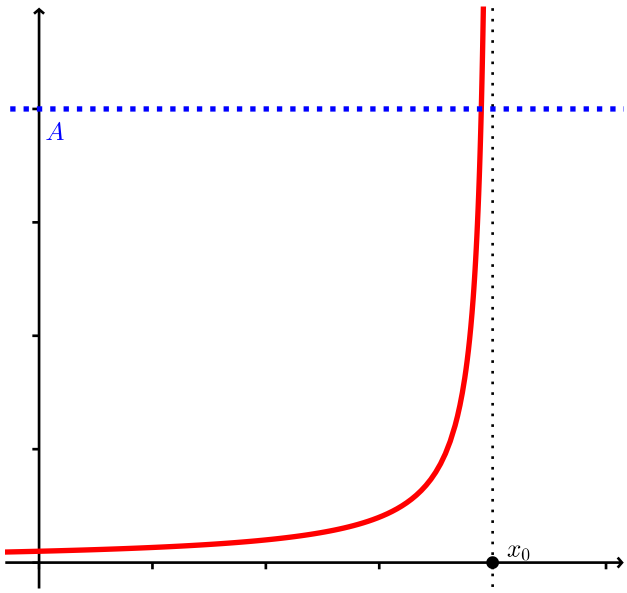
**Exercice 1** *Montrer que $x \mapsto -2x + 1$ tend vers $-\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$.*

### 2.3 Limites à gauche et à droite

**Définition : limite $+\infty$ à droite et à gauche**
On dit que $f$ admet $+\infty$ pour limite à droite $x_0$ (respectivement à gauche de $x_0$) lorsque pour tout $a > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap ]x_0, x_0 + \eta[$ (respectivement pour tout $x \in I \cap ]x_0, x_0 + \eta[$, $f(x) > a$ et on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$)

**Définition : limite $-\infty$ à droite et à gauche**
On dit que $f$ admet $-\infty$ pour limite à droite $x_0$ (respectivement à gauche de $x_0$) lorsque pour tout $a > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap ]x_0, x_0 + \eta[$ (respectivement pour tout $x \in I \cap ]x_0, x_0 + \eta[$, $f(x) < -a$ et on note : $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ (respectivement $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$)

**Dessin :**



copie.pdf

**Définition : limite finie à gauche et à droite**
Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit que $f$ admet $l$ pour limite à droite $x_0$ (respectivement à gauche de $x_0$) lorsque pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in I \cap ]x_0, x_0 + \eta[$ (respectivement pour tout $x \in I \cap ]x_0 - \eta, x_0[$), on a $f(x) \in ]l - \epsilon, l + \epsilon[$

**Exercice 2** *Montrer que* $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln(1-x)}{x} = -1$

Le théorème suivant permet de relier la notion de limite à l'aide de limite à gauche et limite à droite d'une fonction.

**Théorème**
Soit $f : D \to \mathbb{R}$, une application et $a \in D$. Alors $f$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ en $a$ si et seulement si $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = l$.

**Démonstration** : admise

### 2.4 Opérations sur les limites

On s'intéresse aux opérations $+$, $\times$ et $/$ sur les limites de fonctions.

**Proposition : Opérations sur les limites finies**

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0 \in D$. On suppose que $f$ et $g$ admettent des limites finies en $x_0$ que l'on note respectivement $l$ et $l'$. Alors :

1. $\lim\limits_{x \to x_0(+\infty,-\infty)} (f(x) + g(x)) = l + l'$
2. $\lim\limits_{x \to x_0(+\infty,-\infty)} f(x) \times g(x) = l \times l'$
3. si $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0(+\infty,-\infty)} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

**Remarque 2** *D'après la propriété précédente multiplier par une constante $\lambda \in \mathbb{R}$ une fonction $f$ qui admet une limite finiel en un point $x_0$ donne une fonction $\lambda \times f$ qui admet pour limite $\lambda \times l$ en $x_0$ puisque la fonction constante égale à $\lambda$ admet $\lambda$ comme limite en $x_0$.*

**Exemple**

Soient $f : x \mapsto x^3$ et $g : x \mapsto x^2 - 1$. On sait que $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$ et $\lim\limits_{x \to 2} x2 - 1 = 3$. D'après la proposition précédente on en déduit que :

1. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 + x^2 - 1 = 8 + 3 = 11$
2. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 \times (x^2 - 1) = 8 \times 3 = 24$
3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3}{x^2 - 1} = \dfrac{8}{3}$

Lorsque les limites sont infinies certains cas d'indéterminations peuvent advenir. On adoptera dans cette partie, la même convention que dans le chapitre sur les suites :
— pour tout $a > 0$, $a \times +\infty = +\infty$ et $a \times -\infty = -\infty$.
— pour tout $a < 0$, $a \times +\infty = -\infty$ et $a \times -\infty = +\infty$.

**Exemple**

On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} -x^2 + 1 = -\infty$ mais $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 + (x^2 - 1) = 1$. On ne peut donc pas sommer les limites infinies dans certains cas comme dans le cas des limites finies.

**Proposition : limites finies et infinies**

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to \mathbb{R}$ deux fonctions et $x_0$ ou en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) . On suppose que $f$ admet une limite finie en $x_0$ ou en l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) que l'on note $l$. Alors :

1. si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = +\infty$.
2. si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = -\infty$.
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \times g(x) = l \times l'$
4. si $l' \neq 0$, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{l}{l'}$

### 2.5 Composée de limites

Nous avons déjà rencontré la notion de composée de limites pour définir d'une certaine manière la notion d'application bijective. En effet, $f : A \to B$ est bijective si et seulement si il existe $g : B \to A$ telle que $f \circ g = Id_B$ et $g \circ f = Id_A$. Dans le cadre de l'analyse, on peut étudier dans certains cas la limite d'une composée de fonctions.

**Proposition : Composition**

Soient $f, g, h$ trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle $I$. Soient $a, b, c$ des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x \to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{x \to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x \to a} f(x) = c$$

**Méthode**

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en $x_0$ :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite $b$ de $X$ en $x_0$.
- On détermine la limite $c$ de $g$ en $b$, et on conclut : la limite de $f$ en $x_0$ vaut $c$.

**Exercice 3** *Limites de composées*

1. *Déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$.
2. *Montrer que* $\lim\limits_{x \to \left(\frac{1}{3}\right)^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x - 1}} = +\infty$.

### 2.6 Inégalités et limites

**Théorème**

Soient $f : D \to \mathbb{R}$ et $g : D \to R$ deux fonctions telles que pour tout $x \in D$,

$$f(x) \leq g(x)$$

1. Si $x_0 \in D$ et que $f$ et $g$ admettent des limites (finies ou non) en ce point, alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.
2. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.
3. Si $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

**Démonstration** : admise

### 2.7 Théorème d'encadrement

On présente ici l'analogue du théorème d'encadrement des limites et du théorème de la limite monotone pour les suites aux fonctions :

**Théorème d'encadrement**
Soit $I$ un intervalle et $x_0 \in I$. Soient $f, g, h$ trois fonctions définies sur $I$ sauf éventuellement en $x_0$. Si, pour tout $x \in I \backslash \{x_0\}$, on a $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l = \lim\limits_{x \to x_0} h(x)$ , alors la limite de $g$ en $x_0$ existe, et

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = l$$

**Démonstration** : admise

**Remarque 3** *On a un théorème analogue en remplaçant $x_0$ par $+\infty$ ou $-\infty$.*

### 2.8 Fonctions monotones

Les fonctions monotones possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

**Théorème de la limite monotone pour les fonctions**
Soit $f$ une fonction monotone sur $I = ]a; b[$
- Si $f$ est croissante et majorée sur $I$, alors $f$ admet une limite finie en $b^-$.
- Si $f$ est croissante et minorée sur $I$, alors $f$ admet une limite finie en $a^+$.
- Si $f$ est décroissante et minorée sur $I$, alors $f$ admet une limite finie en $b^-$.
- Si $f$ est décroissante et majorée sur $I$, alors $f$ admet une limite finie en $a^+$.

**Risque d'erreur**
Si $f$ est croissante sur $I = ]a; b[$ mais non majorée sur $I$, alors $f$ admet une limite en $b^-$ qui vaut $+\infty$.
De manière générale, une fonction monotone sur $]a; b[$ admet toujours des limites en $a^+$ et en $b^-$ qu'elles soient finies ou infinies.

### 2.9 Croissances comparées

Parmi les théorèmes de comparaison de limite, le théorème suivant de croissances comparées permet de lever un grand nombre d'indétermination de la forme $\dfrac{\infty}{\infty}$ ou $\dfrac{0}{0}$.

**Théorème : croissance comparées**
Pour tout $\alpha > 0$, et $b > 0$

1. $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$
2. $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^b(x)} = +\infty$
3. $\lim_{x \to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$
4. $\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

# 3 Continuité en un point

On considère dans les définitions suivantes une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ et $a$ un point intérieur à $I$ ou bien une extrémité de $I$.

## 3.1 Définitions

**Définition : Fonction continue à droite et à gauche en un point $a$**

On dit que $f$ est continue à droite (respectivement à gauche) en $a$ si $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$ (respectivement $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$)

**Exemple**

La fonction partie entière est un exemple typique de fonction continue à droite mais pas à gauche en $a = 1$ (et . En effet, pour tout $x \in ]0, 1[$, $\lfloor x \rfloor = 0$, donc $\lim_{x \to 1^-} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor = 1$.

En revanche, la partie entière est continue à droite car pour tout $x \in ]1, 2[$, $\lfloor x \rfloor = 1$, donc $\lim_{x \to 1^+} \lfloor x \rfloor = \lim_{x \to 1^-} 1 = 1 = \lfloor 1 \rfloor$.

**Définition : Fonction continue en un point $a$**

On dit que $f$ est continue en $a$ si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

**Exemple**

1. La fonction carrée est continue en tout point $a \in \mathbb{R}$.
2. La fonction racine carré est continue sur $[0, +\infty[$.
3. La fonction partie entière n'est pas continue en 1.

**Proposition**

Une fonction $f$ est continue en un point $a$ si et seulement si elle est continue à gauche **et** à droite en $a$.

**Démonstration** : admise.

**Exercice 4** *Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x}\ln(x) \ \textit{si } x > 0 \\ 0 \ \textit{sinon} \end{cases}$$

*est continue en* $0$.

### 3.2 Opérations

**Théorème : Opérations algébriques**

Soient $f$ et $g$ des fonction continues en un point $a$. Alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est continue en $a$.
2. $f + g$ est continue en $a$.
3. $f \times g$ est continue en $a$.
4. si $g(a) \neq 0$, $\dfrac{f}{g}$ est continue en $a$.

**Exemple**

1. la fonction $x \mapsto \ln(x) + e^x$ est continue en 1.
2. la fonction $x \mapsto 3.x$ est continue en 0.
3. la fonction $x \mapsto \ln(x) \times x$ est continue en 2.
4. la fonction $x \mapsto \dfrac{2x}{1+x^2}$ est continue en 0.

On peut appliquer le théorème des limites composées à la continuité d'une composée de fonctions continues.

**Proposition : Composition**

Soient $f$ une fonction continue en $b$ et $g$ une fonction continue en $a$ telle que $g(a) = b$. Alors $f \circ g$ est une fonction continue en $a$.

**Exemple**

Soit $f : x \mapsto x^2 + 1$ est continue en 1 donc $f \circ exp : x \mapsto 1 + e^{2x}$ est continue en 0.

### 3.3 Continuité et suites

**Théorème : Passage à la limite pour une suite de la forme $f(u_n)$.**

Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue en $l$ et $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite convergente de limite $l$ telle que pour tout $n \geq n_0$, $u_n \in D$. Alors la suite $(f(u_n))_{n \geq n_0}$ est bien définie et est convergente de limite $f(l)$.

**Exemple**

Soit $f : x \mapsto x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$ et $(u_n)$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$ par $u_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. On a $(u_n)$ qui est convergente de limite 1 et $f$ est continue en $x = 1$ ($f(1) = 0$). On en déduit d'après la proposition précédente que la suite de terme générale $(1 - \dfrac{1}{n})^2 - 1$ est convergente de limite nulle.

**Exercice 5** *Limite de suites Déterminer la limite de la suite de terme général* $u_n = \ln(n+1) - \ln(n)$.

En réalité la proposition précédente est un cas particulier du théorème suivant qui établit une condition nécessaire et suffisante de continuité d'une fonction en un point.

**Théorème: Caractérisation séquentielle de la continuité**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in I$. Alors $f$ est continue au point $a$ si et seulement pour toute suite $(u_n)$ à valeurs dans $I$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = a$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(a)$$

Cette caractérisation peut être utile pour montrer qu'une fonction n'est pas continue en un point $a$ de son ensemble de définition. Il suffit de trouver $(u_n)$ convergente vers $a$ telle que $f(u_n)$ ne tend pas vers $f(a)$.

**Exemple**

La fonction partie entière est un exemple classique de fonction discontinue.
Poson la suite $(u_n)$ de terme général $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq 1$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$ et $\lfloor 1 \rfloor = 1$ mais :

$$\forall n \in \mathbb{N}^\star, \lim_{n\to+\infty} \lfloor u_n \rfloor = 0 \neq 1$$

On en déduit que la fonction partie entière n'est pas continue en 1.

# 4 Continuité sur un intervalle

**Définition: Fonction continue**

Soit $\mathcal{D}$ une partie de $\mathbb{R}$ ( non nécessairement un intervalle ), on dit que $f$ est **continue** si elle est continue en tout point de $\mathcal{D}$. Formellement, $f$ est continue si :

$$\forall a \in D, \quad \lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

## 4.1 Opérations sur les fonctions continues

**Théorème**

Soient $f$ et $g$ des fonction continues sur un ensemble $\mathcal{D}$. Alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda.f$ est continue.
2. $f + g$ est continue.
3. $f \times g$ est continue.
4. si $g$ ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est continue.

**Exemple**

- La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x^3}$ est continue sur $]0, 2[$ mais pas sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est pas continue en 0.
- Les fonctions polynomiales sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Soient $P$, $Q$ deux fonctions polynomiales sur $I$ telles que $Q$ ne s'annule pas sur $I$. Alors

la fonction $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ est continue sur $I$.

La composée de fonction fonctions continues bien définies est elle-même continue.

**Théorème: Continuité de la composée**
Soient $f : J \to \mathbb{R}$ et $g : I \to J$ deux fonctions continues. Alors la fonction $f \circ g : I \to \mathbb{R}$ est continue.

**Démonstration** : admise

### 4.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intérmediaires stipule que l'image d'une intervalle par une fonction continue sur cet intervalle est lui-même un intervalle. Comme nous le verrons dans cette partie, on peut tirer beaucoup d'informations de ce résultat.

### 4.3 Théorème

**Théorème des valeurs intermédiaire**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors $f([a, b])$ est un intervalle de la forme $[c, d]$. C'est-à-dire pour tout $y \in [c, d]$, il existe $x \in [a, b]$, $y = f(x)$.

**Démonstration** : Cf 4.4.

**Remarque 4** *Une formulation alternative du théorème des valeurs intermédiaires est que l'image d'un intervalle* $[a, b]$ *par une fonction continue* $f$ *est un intervalle* $[c, d]$. *On pose par définition* $c = min_{t\in[a,b]}f(t)$ *et* $d = max_{t\in[a,b]}f(t)$. *Donc la fonction* $f$ *admet sur* $[a, b]$ *un maximum et un minimum qui sont* ***atteints****. En résumé, un fonction continue sur un intervalle fermé-bornée est* ***bornée et atteind ses bornes****.*

**Méthode : Reconnaître le minimum et le maximum d'une fonction**
Pour reconnaître le minimum et le maximum d'une fonction $f$ sur un intervalle $[a, b]$, on dresse le tableau de variations de la fonction entre $a$ et $b$ en écrivant la valeur des images $f(x_i)$ aux changements de monotonies se produisant aux points $x_i$. Le minimum de $f$ sur $[a, b]$ correspond à la plus petite valeur $f(x_i)$ et le maximum à la plus grande valeur $f(x_i)$.

### 4.4 Le principe de dichotomie

Pour démontrer le théorème des valeurs intermédiaires on montre le théorème suivant qui lui est équivalent à l'aide de la méthode dite de *dichotomie*.

**Théorème**
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(a) \leq 0$ et $f(b) \geq 0$. Alors il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = 0$.

**Remarque 5** *On remarque que si deux réels $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont de signes opposé si et seulement si leur produit $f(x_1)f(x_2) \leq 0$.*

**Démonstration** : On détermine deux suites adjacentes $(a_n)$, $(b_n)$ qui forme une suite d'intervalles de plus en plus petits $[a_n, b_n] \subset [a, b]$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = 0$.

Première partie On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ par récurrence. On pose $a_0 = a$ et $b_0 = b$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

- si $f(a_n) \times f(b_n) \leq 0$ $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$
- si $f(a_n) \times f(b_n) > 0$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0$ et $f(b_n) \geq 0$.

On raisonne par récurrence. Par définition $a_0 \leq b_0$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$ arbitraire, $a_n \leq b_n$ et que $|b_n - a_n| \leq \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n}$. Ainsi $a_{n+1}$ vaut $a_n$ ou $\dfrac{a_n + b_n}{2} \geq a_n$ par hypothèse de récurrence. De même $b_{n+1} = b_n$ ou $\dfrac{a_n + b_n}{2} \leq b_n$. On en déduit que la suite $(a_n)$ est croissante et $(b_n)$ est décroissante. De plus,

$$|b_{n+1} - a_{n+1}| = \begin{cases} |\dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n| = \dfrac{|b_n - a_n|}{2} = \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}} & \text{si } f(a_n)f(b_n) \leq 0 \\ |b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2}| = \dfrac{|b_n - a_n|}{2} = \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^{n+1}} & \text{si } f(a_n)f(b_n) > 0 \end{cases}$$

Comme $\lim\limits_{n\to\infty+\infty} \dfrac{|b_0 - a_0|}{2^n} = 0$, on en conclut que les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ sont adjacentes et convergent donc vers une limite commune $c \in [a, b]$.

Deuxième partie

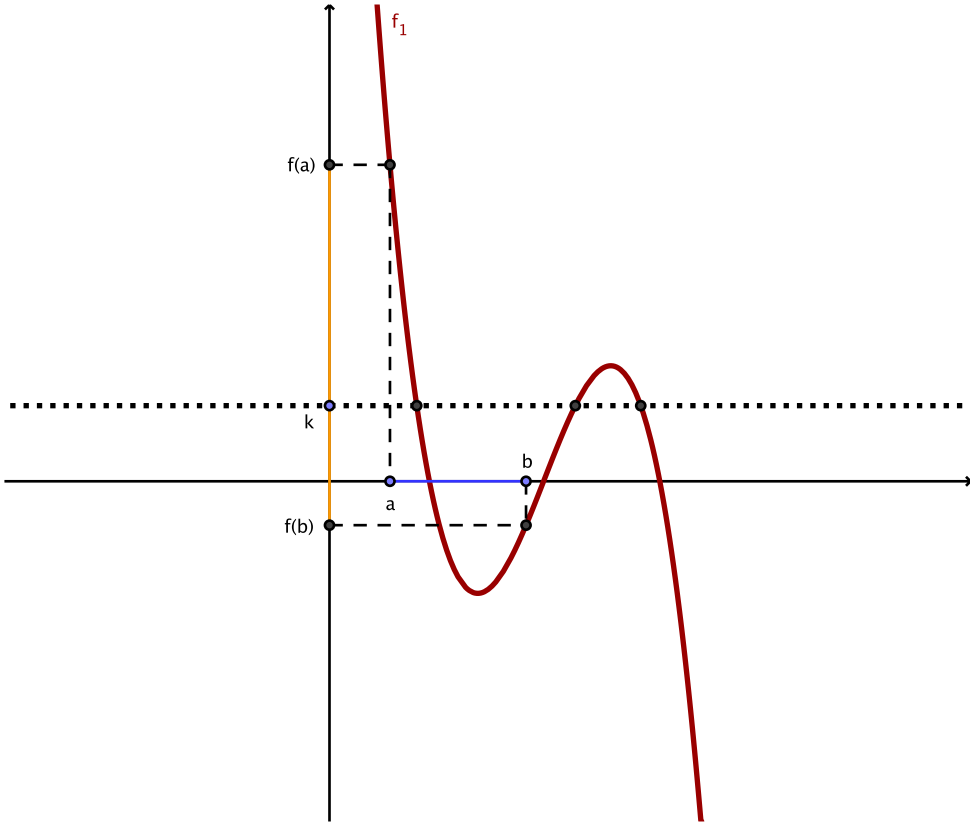
On montre maintenant que $f(c) = 0$ en utilisant l'hypothèse de continuité de $f$. On sait que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(a_n) \leq 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c) \leq 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = c$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(b_n) \geq 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c) \geq 0$ car $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = c$.
Ainsi $f(c) \leq 0$ et $f(c) \geq 0$ donc $f(c) = 0$.

**Application à l'Informatique**

En s'inspirant de la démonstration précédente, on utilise l'algorithme de dichotomie pour déterminer une approximation numérique du réel $c$.

Le programme `dicho` fourni une approximation d'une racine de $f$ sur l'intervalle $[a_0, b_0]$ après $n$ pas de l'algorithme de dichotomie.

```
def dicho(f,a0,b0,n): %f fonction admettant une racine sur [a_0,b_0]
    a=a0
    b=b0
    m=(a+b)/2
    for k in range(1,n+1):              %on calcule n termes des suites (a_n) et (b_n)
        if f(a)*f(m)<=0 : %si f(a)<=0 et f(m)=>0
            a=a
            b=m
            m=(a+b)/2
        else %si f(m)<=0 et f(b)=>0
            a=m
            b=b
            m=(a+b)/2
    return m %la fonction renvoie le milieu de [a_n, b_n]
```




copie.pdf

FIGURE 1 – Existence de solution à l'équation $f(x) = k$

### 4.5 Équation du type $f(x) = k$

**Corollaire** 1
Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel $k$ pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel $c$ de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.

**Remarque 6** *La contraposée du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de prouver qu'un fonction n'est pas continue en un point. Par exemple, le fonction partie entière n'est pas continue puisque l'équation* $\lfloor x \rfloor = \dfrac{1}{2}$ *n'a pas de solutions.*

**Méthode : Existence d'une solution à l'équation $f(x) = k$.**
Soit $f = [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $k \in \mathbb{R}$. Pour montrer que l'équation $f(x) = k$ admet une solution on peut procéder en général de deux manières :

1. on calcule $f(a)$ et $f(b)$, si $k$ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ on en déduit du corollaire que $f(x) = k$ admet une solution dans $[a,b]$.
2. si $k$ n'est pas compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on dresse le tableau de variation de $f$ sur $[a,b]$ et on détermine si $k$ est compris entre deux images extrémales de $f$ sur un sous-intervalle de $[a,b]$ où $f$ est monotone.

**Remarque 7** *On peut aussi appliquer la méthode précédente aux cas des intervalles ouverts ou semi-ouverts mais il faudra vérifier que le réel $k$ est* ***strictement*** *inférieur ou supérieur à l'image de l'extrémité n'appartenant pas à l'intervalle.*

**Exemple**

Soit $\begin{array}{rccc} f: & [0,2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & 3x - x^3 \end{array}$ et $k = 1,5$. Montrons que l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0,2]$.
On a $f(0) = 3 \times 0 - 0^3 = 0$ et $f(2) = 3 \times 2 - 2^3 = 6 - 8 = -2$ et $1,5$ n'est pas compris entre 0 et $-2$, on ne peut pas directement appliquer le théorème des valeurs intermédiaires. On doit donc dresser le tableau de variations de $f$ sur $[0,2]$. Puisque la dérivée de $f$ sur $[0,2]$ est $f'(x) = 3 - 3x^2 = 3(1-x^2) = 3(1-x)(1+x)$ on obtient le tableau de variation suivant.

| $x$ | 0 | | 1 | | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| $3(1-x)(1+x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $3x - x^3$ | 0 | $\nearrow$ | 2 | $\searrow$ | -2 |

Or on constate que $1,5$ est compris entre $f(0) = 0$ et $f(1) = 2$, on en déduit que l'équation $f(x) = 1,5$ admet au moins une solution dans $[0,2]$.
Elle en admet exactement deux, exactement une dans $[0,1]$ et exactement une dans $[1,2]$.

**Corollaire** 2

Soit $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (respectivement $-\infty$). Alors, pour tout $c > f(a)$ (respectivement $c < f(a)$), l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution dans $[a, +\infty[$.

**Remarque 8** *Ce corollaire est aussi valable en transposant l'intervalle* $[a, +\infty[$ *en* $]-\infty, a]$.

**Exercice 6**

1. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x + \ln x - n = 0$ admet une solution unique $x_n$ dans $\mathbb{R}_+^*$. On posera pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f_n(x) = x + \ln x - n$ et on étudiera les variations de $f_n$ sur $\mathbb{R}_+^*$.*
2. *Comparer $f_{n+1}(x_n)$ et $f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire que la suite $(x_n)$ est croissante.*
3. *En faisant un raisonnement par l'absurde, montrer que la suite $(x_n)$ diverge.*

### 4.6 Théorème de la limite monotone

**Théorème de la bijection/limite monotone**

Soit $I$ un intervalle et $f$ une application définie sur $I$. Si $f$ est continue et strictement monotone sur $I$, alors il existe un intervalle $J$ tel que $f : I \to J$ soit bijective.
De plus son application réciproque $f^{-1}$ est continue sur $J$.

**Démonstration** :

Le tableau suivant liste les différents cas possibles d'intervalle image $J$ en fonction de la forme initiale de $I$ et de la monotonie de $f$ :

| Intervalle $I$ | monotonie de $f$ sur $I$ | $f$ bijective de $I$ sur $J$ |
|---|---|---|
| $[a,b]$ où $a,b\in\mathbb{R}$ | strictement croissante | $J=[f(a),f(b)]$ |
| $[a,b]$ où $a,b\in\mathbb{R}$ | strictement décroissante | $J=[f(b),f(a)]$ |
| $]a,b]$ où $a,b\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$ | strictement croissante | $J=]\lim\limits_{x\to a}f(x),f(b)]$ |
| $]a,b]$ où $a,b\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$ | strictement décroissante | $J=[f(b),\lim\limits_{x\to a}f(x)[$ |
| $[a,b[$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$ | strictement croissante | $J=[f(a),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$ |
| $[a,b[$ où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$ | strictement décroissante | $J=]\lim\limits_{x\to b}f(x),f(a)]$ |
| $]a,b[$ avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$ et $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$ | strictement croissante | $J=]\lim\limits_{x\to a}f(x),\lim\limits_{x\to b}f(x)[$ |
| $]a,b[$ avec $a\in\mathbb{R}$ ou $a=-\infty$ et $b\in\mathbb{R}$ ou $b=+\infty$ | strictement décroissante | $J=]\lim\limits_{x\to b}f(x),\lim\limits_{x\to a}f(x)[$ |

**Exemple**

La fonction $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^5+x+1 \end{array}$ est bijective et continue. En effet,

— la fonction $f$ est polynomiale donc continue.

— elle est strictement croissante car pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=5x^4+1>0$.

— on a $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^5=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to/\infty}x^5=+\infty$

Ainsi $f(\mathbb{R})=]-\infty,+\infty[$ et d'après le théorème de la bijection elle est bijective.
Sa réciproque $f^{-1}$ est continue également mais il est impossible d'en donner une expression algébrique simple.

**Méthode : Montrer qu'une fonction continue est bijective de $I$ vers $J$**

1. On montre que $f$ est continue en utilisant des théorèmes de ce chapitre.
2. On montre qu'elle est strictement monotone, le plus souvent en étudiant le signe de sa dérivée.
3. On utilise le tableau précédent pour déterminer l'intervalle $J$.
4. On en conclut d'après le théorème de la bijection que $f:I\to J$ est bijective et continue.

**Exercice 7** On considère l'application, $\phi$ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x)=x^2e^x-1$, pour tout réel $x$.

1. Dresser le tableau de variations de $\phi$, en précisant la limite en $-\infty$, sa valeur en 0 et sa limite en $+\infty$.
2. Établir que l'équation $e^x=\dfrac{1}{x^2}$, d'inconnue $x$ dans $]0,+\infty[$ admet une solution, et une seule, notée $\alpha$.
3. Montrer que $\alpha$ appartient à l'intervalle $]\dfrac{1}{2},1[$. On rappelle que $2<e<3$.

# 5 Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$

Dans cette section, on étudie les suites récurrentes $(u_n)$ de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est une fonction continue.

## 5.1 Généralités

**Théorème**

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue croissante et la suite $(u_n)$ telle que $u_0 \in I$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Alors, si la suite $(u_n)$ est convergente de limite $l \in I$, cette limite vérifie la relation $f(l) = l$.

**Démonstration** :

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f([a, b]) \subset [a, b]$.
On pose $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in [a, b]$, $g(x) = f(x) - x$. Alors, $g(a) = f(a) - a \geq 0$ et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ puisque $f([a, b]) \subset [a, b]$. On en déduit qu'il existe $l \in [a, b]$ tel que $g(l) = 0 \Leftrightarrow f(l) - l = 0 \Leftrightarrow f(l) = l$. On en déduit le théorème suivant :

**Théorème du point fixe**

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f([a, b]) \subset [a, b]$ alors $f$ admet un **point fixe** dans l'intervalle $[a, b]$, c'est-à-dire qu'il existe $l \in [a, b]$ tel que $f(l) = l$.

Démonstration :

### 5.2 Cas des fonctions continues croissantes

On se contentera dans ce chapitre d'indiquer une méthode générale pour traiter le cas des suites récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est continue est croissante, ce qui permet de traiter l'étude d'un grand nombre de suites.

**Méthode**

- **Étude des variations et points fixes** : On détermine les variations de $f$ en traçant son tableau de variations si nécessaire puis on résout l'équation $f(x) = x$ qui peut éventuellement correspondre à une limite de la suite.
- **Existence de la suite, intervalle de stabilité** : on montre qu'il existe un intervalle $I$ contenant $u_0$ tel que $f(I) \subset I$.
- **Monotonie de la suite $(u_n)$** : Lorsque la fonction est croissante, la suite $(u_n)$ est monotone. Pour déterminer sa monotonie on étudie le signe de $u_1 - u_0$. Si $u_1 - u_0 \geq 0$ alors $(u_n)$ est croissante mais si $u_1 - u_0 \leq 0$ alors $(u_n)$ est décroissante.
- **Convergence** : Si la suite $u_n$ est monotone et qu'il existe un intervalle de stabilité pour $f$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a, b]$, alors d'après le théorème de convergence monotone, $u_n$ est monotone et bornée donc convergente et elle converge vers un point fixe de $f$.
  Si les termes de $u_n$ appartiennent à un intervalle de stabilité $I$ contenant $u_0$ mais ne contenant pas de points fixes de $f$ ainsi que les extrémités de $I$, on peut en déduire que la suite $(u_n)$ est divergente.

**Exemple : Étude d'une suite récurrente**

Soit $(u_n)$ la suite récurrente définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = sqrtu_n$ et $u_0 = \dfrac{1}{4}$. Alors $(u_n)$ est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où $f$ est la fonction racine carrée qui est continue sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante.

Déterminons les solutions de $\sqrt{x} = x$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $x \geq 0$,

$$\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

On en déduit que la fonction racine n'admet que deux points fixes qui sont 0 et 1.

Nous avons précédemment mentionné que $f$ était croissante, ajouté au fait que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on en déduit que $f([0,1]) \subset [0,1]$ (il y a même égalité ici). On pose donc $I = [0,1]$ comme intervalle de stabilité, ce qui garantit l'existence de la suite $(u_n)$ puisque $u_0 = \dfrac{1}{4} \in I$.
La suite $(u_n)$ est monotone car $f$ l'est, déterminons sa monotonie. On a $u_1 = \sqrt{u_0} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{2} > u_0$. On en déduit que la suite $u_n$ est croissante.
Elle est croissante de premier terme $\dfrac{1}{4}$ et majorée par 1, donc elle converge vers l'unique point fixe de $f$ strictement plus grand que 0 qui est 1.
Conclusion : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 1$.

**Exercice 8** *Soit $(u_n)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = 4$ où $f : x \mapsto 2\sqrt{x} - 1$ définie sur $]0, +\infty[$.*

1. *Étudier les variations de $f$ et déterminer ses points fixes.*
2. *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n$ existe et $u_n \geq 1$.*

copie.pdf

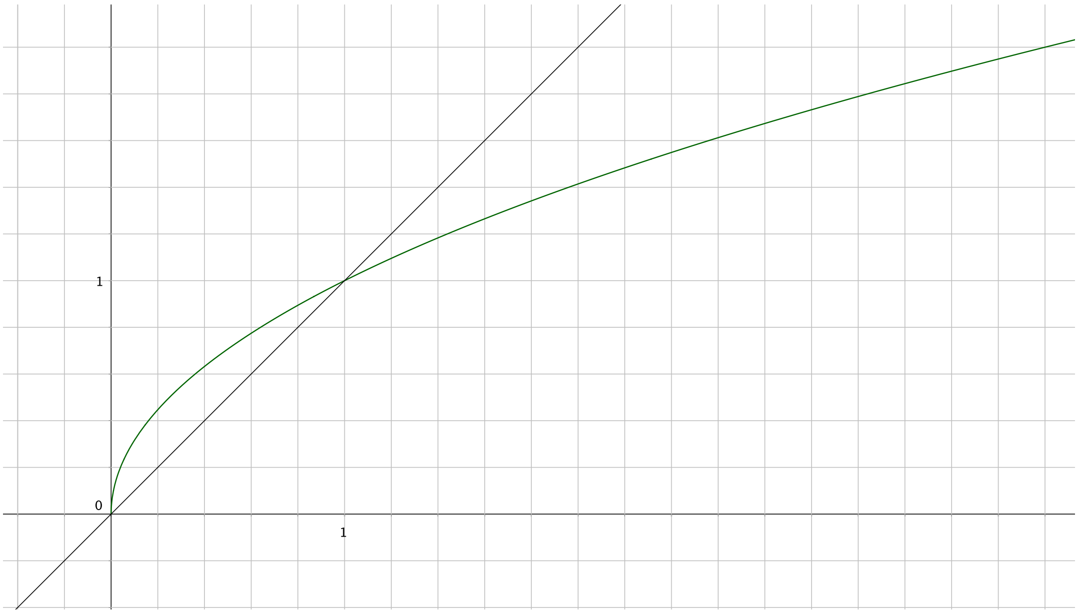



FIGURE 2 – Points fixes de la fonction racine carrée

3. *Étudier le sens de variation de* $(u_n)$.
4. *En déduire que* $(u_n)$ *converge et préciser sa limite.*

# 6 Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

## 6.1 La continuité dans le cas complexe

**Définition: Limite d'une fonction en un point**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$. On dit que $f(x)$ tend vers $l \in \mathbb{C}$ en $a$, ou encore $\lim_{x \to a} f(x) = l$, si $\lim_{x \to a} |f(x) - l| = 0$.

De manière analogue au cas réel, la continuité des fonctions à valeurs complexes prend la forme suivante :

**Définition: Fonction continue à valeurs complexes**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une fonction. Si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ on dit que **f est continue en a**. Si $f$ est continue en tout point de $\mathcal{D}$, on dit que $f$ est continue (ou continue sur $\mathcal{D}$).

**Théorème: Continuité locale et parties réelle, imaginaire**

Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ et $a \in \mathcal{D}$. On a une équivalence entre les propositions suivantes :

1. La fonction $f$ est continue en $a$.
2. Les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues en $a$.

**Démonstration** : admise

**Remarque 9** *Remarque La démonstration de la proposition précédente repose sur le fait que pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *on ait*

$$|Re(z)| \leq |z| \quad et \quad |Im(z)| \leq |z|$$

**Corollaire**
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$. On a une équivalence entre les propositions suivantes :

1. La fonction $f$ est continue sur $\mathcal{D}$.
2. Les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues sur $\mathcal{D}$.

**Exemple**
La fonction $f : x \mapsto x^2 e^{ix}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$ :

$$Re(f(x)) = x^2 \cos(x) \quad et \quad Im(f(x)) = x^2 \sin(x)$$

les fonctions $Re(f)$ et $Im(f)$ sont continues, d'où la continuité de $f$.

**Exercice 9** *Montrer que la fontion $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-i}$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

### 6.2 Opérations sur les limites

Les opérations algébriques classiques transforment des applications continues définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues. Etant donnés deux intervalles $I, J$ de $\mathbb{R}$, la composition de deux fonctions $f : I \to \mathbb{C}$ et $g : J \to \mathbb{C}$ n'est pas définie donc on ne considère pas cette opération. En revanche, la conjuguaison complexe est une opération qui est, elle, continue.

**Théorème**
Soient $f$ et $g$ des fonction continues su un ensemble $\mathcal{D}$ **à valeurs complexes**. Alors :

1. pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda.f$ est continue.
2. $f + g$ est continue.
3. $f \times g$ est continue.
4. si $g$ ne s'annule pas, $\dfrac{f}{g}$ est continue.

**Démonstration** : Il suffit d'exprimer les parties réelles et imaginaires de chacune des fonctions et utiliser la continuité des ces dernières d'après le théorème de la sous-section précédente.

**Exercice 10** *Soit $f : I \to \mathbb{C}$. Montrer que si $f$ admet une limite en $a$, alors la fonction $exp \circ f$ admet elle aussi une limite en $a$.*

**Proposition**
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une application continue. Alors

$$\bar{f} : \begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ x & \longmapsto & \overline{f(x)} \end{array}$$

est une application continue.

**Démonstration** : admise

**Corollaire**
Soit $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ une application continue, alors la composée avec le module, notée $|f|$ est continue.

**Démonstration admise**

### 6.3 Caractère borné des applications continues

**Proposition**
Soit $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ fermé borné et $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction.
- Si $f$ est continue en $c \in ]a, b[$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(]c - \epsilon, c + \epsilon[) \subset \mathbb{C}$ soit un ensemble borné.
- Si $f$ est continue, $f(I)$ est un ensemble borné de $\mathbb{C}$.

**Démonstration admise**

# 7 Bilan

Les principaux points à retenir dans ce chapitre sont les suivants :

1. Définition de limite d'une fonction à gauche, à droite et en un point.
2. Opérations sur les limites.
3. Théorème de comparaison, d'encadrement des limites et de convergence monotone.
4. Définition de fonction continue en un point et sur un ensemble.
5. Théorème des valeurs intermédiaires et de la bijection.
6. Suites récurrentes de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.
7. Extension aux fonctions à valeurs complexes.