TD II. Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

Les données numériques suivantes sont utilisées dans de nombreux exercices :

- masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}$ kg
- rayon de la Terre : $R_T = 6,38.10^6$ m
- masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30}$ kg
- constante universelle de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
- valeur du champ de pesanteur au niveau du sol : $g = 9,81$ m · s^{-2}
- unité astronomique (distance moyenne Terre-Soleil) : 1 ua = $1,5.10^{11}$ m.

Exercice II.1. Comparaison jour sidéral et jour solaire ★

1. Un jour sidéral correspond à la durée nécessaire à la Terre pour qu'un point de la surface de la Terre soit de nouveau aligné avec le centre de la Terre T et une étoile lointaine : la Terre tourne sur elle-même de 2π dans le référentielle héliocentrique pendant la période $T_{\text{sidéral}}$. **Faire un schéma** du mouvement de la Terre autour du Soleil au cours d'un jour sidéral.
2. **Donner** la valeur de la période T_{solaire} d'un jour solaire. Au cours d'un jour solaire, la Terre tourne sur elle-même de $2\pi + \alpha$. **Faire un schéma** du mouvement de la Terre autour du Soleil au cours d'un jour solaire.
3. **Déterminer** la valeur de l'angle α.
4. **Exprimer** la période $T_{\text{sidéral}}$ en fonction de la vitesse angulaire de la Terre Ω et de son angle de rotation au cours d'un jour sidéral. **Faire** de même pour la la période T_{solaire}.
5. **Déterminer** la valeur d'un jour sidéral.

Exercice II.2. Période des satellites terrestres ★

Un satellite est en orbite supposée circulaire autour de la Terre.

1. **Rappeler** la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler et **déduire** la période du satellite en fonction de son altitude h.
2. **Calculer**, en heure, la période de satellites en orbite basse aux altitudes $h_1 = 300$ km ou $h_2 = 2,0.10^3$ km puis en orbite intermédiaire à l'altitude $h_3 = 20.10^3$ km.

Exercice II.3. Paramètres gravitationnel standard de la Terre ★

Un satellite est en orbite supposée circulaire autour de la Terre.

1. **Montrer** que la connaissance de la période d'un satellite terrestre en orbite circulaire à l'altitude z et de la troisième loi de Kepler permet de déterminer le paramètre gravitationnel standard $\mu = \mathcal{G}M_T$ de la Terre, produit de la constante de gravitation universelle par la masse de la Terre.
2. L'expérience de Cavendish permet de déterminer la valeur de $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}. **Montrer** que l'on peut alors déterminer la masse de la Terre.
3. En utilisant vos connaissances des satellites géostationnaires et le rayon Terrestre, **calculer** le paramètre gravitationnel standard de la Terre, sa masse et sa masse volumique moyenne.
4. **Donner** une autre méthode pour déterminer μ en utilisant la valeur du champ de gravité terrestre à la surface du globe g.

Exercice II.4. Vitesse d'un satellite à son périgée ★ ★

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1,1.10^3$ kg. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200$ km au périgée et $d_A = 5,9.10^3$ km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3,5.10^2$ m.s^{-1}.

1. **Faire un schéma** de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

2. **Déterminer** le demi-grand axe a de la trajectoire.
3. Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon ρ_0, **exprimer** l'énergie mécanique du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_T et ρ_0. On généralise ce résultat aux trajectoires elliptiques en identifiant le rayon ρ_0 au demi-grand axe a.
4. **En déduire** l'énergie mécanique.
5. **Déterminer** la période du satellite.
6. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. **Exprimer** le module du moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.
7. **En déduire** la vitesse du satellite à son périgée.

Exercice II.5. Énergie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite ★ ★ ★

On étudie le mouvement d'un satellite de masse m en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre, ainsi que le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1. **Déterminer** le référentiel le mieux adapté pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre.
2. **Rappeler** l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite en orbite à une distance r du centre de la Terre. En déduire son expression en fonction de son altitude z.
3. **Retrouver** l'expression de la vitesse en orbite à une altitude z.
4. **En déduire** l'expression de l'énergie cinétique puis de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite sur son orbite à l'altitude z.
5. **Calculer** cette énergie mécanique pour $z = 1,0.10^3$ km et $m = 6,0.10^3$ kg.
   Pour lancer un satellite, il faut lui communiquer l'énergie $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m0}$ où $\mathcal{E}_{m0}$ est l'énergie qu'il a au point O.
6. Dans le référentiel géocentrique, la Terre peut être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe à une vitesse angulaire Ω. **Préciser** l'axe de rotation, **déterminer** s'il est fixe et **donner** la valeur de Ω.
7. **En déduire** l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ supposé galiléen en fonction de Ω, du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ.
8. **Exprimer** alors l'énergie mécanique initiale $\mathcal{E}_{m0}$ du satellite posé au sol au point O.
9. **En déduire** les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants **déterminer** le plus favorable.
   — Baïkonour au Kazakhstan : $\lambda = 46°$
   — Cap Canaveral aux USA : $\lambda = 28,5°$
   — Kourou en Guyane française : $\lambda = 5,23°$.
10. **Calculer** l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse depuis Kourou.
11. **Calculer** numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. **Commenter.**

Exercice II.6. Caractéristique d'une météorite ★ ★ ★

On repère une météorite très éloignée du Soleil et on mesure sa vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On observe que $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ est portée par une droite Δ, située à une distance b du centre O du Soleil. On suppose qu'à l'instant où on la repère (instant initial), la météorite est si éloignée que son énergie potentielle d'interaction gravitationnelle avec le Soleil est négligeable.

On note m la masse de la météorite, M_S celle du Soleil, R_S le rayon du Soleil et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

1. **Faire un schéma** de la situation initiale.
2. **Montrer** que l'énergie mécanique de la météorite est une intégrale première du mouvement. **Déterminer** sa valeur initiale.
3. **Montrer** que le moment cinétique par rapport à O de la météorite est une intégrale première du mouvement. **Déterminer** sa valeur initiale.
4. **Rappeler** les conséquences de la conservation du moment cinétique.
5. **Définir** les coordonnées adaptées et établir l'expression du moment cinétique à un instant t quelconque.

6. **Établir** l'expression de l'énergie potentielle effective.
7. **Exprimer** cette énergie potentielle effective en fonction de m, v_0, b, du produit $\mathcal{G}M_S$ et de la distance r.
8. **Tracer** l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature bornée ou non de la trajectoire de la météorite.
9. **Déterminer** la distance minimale d'approche r_{min} en fonction de v_0, b et du produit $\mathcal{G}M_S$.
10. **Déterminer** la condition sur r_{min} pour laquelle la météorite n'ira pas toucher la surface du Soleil.