TD II. Mouvement dans un champ de gravitation newtonien

Les données numériques suivantes sont utilisées dans de nombreux exercices :

- masse de la Terre : $M_T = 5,97.10^{24}$ kg
- rayon de la Terre : $R_T = 6,38.10^6$ m
- masse du Soleil : $M_S = 1,99.10^{30}$ kg
- constante universelle de gravitation : $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}
- valeur du champ de pesanteur au niveau du sol : $g = 9,81$ m · s^{-2}
- unité astronomique (distance moyenne Terre-Soleil) : 1 ua $= 1,5.10^{11}$ m.

Exercice II.1. Comparaison jour sidéral et jour solaire ★

1. Un jour sidéral correspond à la durée nécessaire à la Terre pour qu'un point de la surface de la Terre soit de nouveau aligné avec le centre de la Terre T et une étoile lointaine : la Terre tourne sur elle-même de 2π dans le référentielle héliocentrique pendant la période $T_{\text{sidéral}}$. **Faire un schéma** du mouvement de la Terre autour du Soleil au cours d'un jour sidéral.
2. **Donner** la valeur de la période T_{solaire} d'un jour solaire. Au cours d'un jour solaire, la Terre tourne sur elle-même de $2\pi + \alpha$. **Faire un schéma** du mouvement de la Terre autour du Soleil au cours d'un jour solaire.
3. **Déterminer** la valeur de l'angle α.
4. **Exprimer** la période $T_{\text{sidéral}}$ en fonction de la vitesse angulaire de la Terre Ω et de son angle de rotation au cours d'un jour sidéral. **Faire** de même pour la la période T_{solaire}.
5. **Déterminer** la valeur d'un jour sidéral.

Exercice II.2. Période des satellites terrestres ★

Un satellite est en orbite supposée circulaire autour de la Terre.

1. **Rappeler** la 3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler et **déduire** la période du satellite en fonction de son altitude h.
   D'après la troisième loi de Kepler, un satellite est en orbite circulaire autour de la Terre vérifie
   $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$
   donc
   $$T = \left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}a^3\right)^{1/2}.$$
   Comme $a = R_T + h$, on trouve
   $$\boxed{T = \left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}(R_T+h)^3\right)^{1/2}.}$$
2. **Calculer**, en heure, la période de satellites en orbite basse aux altitudes $h_1 = 300$ km ou $h_2 = 2,0.10^3$ km puis en orbite intermédiaire à l'altitude $h_3 = 20.10^3$ km.
   A.N.
   $$T_1 = \left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}(R_T+h_1)^3\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2{\cdot}kg^{-2}}\times 5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}\left(6{,}38\times10^6\,\mathrm{m}+300\times10^3\,\mathrm{m}\right)^3\right)^{1/2}$$
   $$= 5436\,\mathrm{s} = 1{,}5\,\mathrm{h}.$$

$$T_2 = \left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}(R_T+h_2)^3\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}\times 5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}\left(6{,}38\times10^6\,\mathrm{m}+2{,}0\times10^6\,\mathrm{m}\right)^3\right)^{1/2}$$
$$= 7638\,\mathrm{s} = 2{,}1\,\mathrm{h}.$$

$$T_3 = \left(\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}(R_T+h_3)^3\right)^{1/2} = \left(\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}\times 5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}\left(6{,}38\times10^6\,\mathrm{m}+20\times10^6\,\mathrm{m}\right)^3\right)^{1/2}$$
$$= 42\,662\,\mathrm{s} = 12\,\mathrm{h}.$$

Exercice II.3. Paramètres gravitationnel standard de la Terre ★

Un satellite est en orbite supposée circulaire autour de la Terre.

1. **Montrer** que la connaissance de la période d'un satellite terrestre en orbite circulaire à l'altitude z et de la troisième loi de Kepler permet de déterminer le paramètre gravitationnel standard $\mu = \mathcal{G}M_T$ de la Terre, produit de la constante de gravitation universelle par la masse de la Terre.
   La troisième loi de Kepler pour un satellite terrestre en orbite circulaire de rayon r s'écrit
   $$\frac{T^2}{(R_T+z)^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$
   ainsi
   $$\boxed{\mu = \mathcal{G}M_T = \frac{4\pi^2(R_T+z)^3}{T^2}.}$$
2. L'expérience de Cavendish permet de déterminer la valeur de $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ N · m^2 · kg^{-2}. **Montrer** que l'on peut alors déterminer la masse de la Terre.
   La connaissance de $\mathcal{G}$ donne accès à $M_T = \frac{\mu}{\mathcal{G}}$.
3. En utilisant vos connaissances des satellites géostationnaires et le rayon Terrestre, **calculer** le paramètre gravitationnel standard de la Terre, sa masse et sa masse volumique moyenne.
   Un satellite géostationnaire a une période $T = 24\,\mathrm{h}$ et une orbite de rayon $r = 42\times10^3\,\mathrm{km}$. D'après la troisième loi de Kepler il vient que
   $$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T} = \frac{4\pi^2}{\mu}$$
   soit
   $$\mu = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$
   soit **A.N.**
   $$\boxed{\mu = \frac{4\pi^2\left(42\times10^6\,\mathrm{m}\right)^3}{(86\,400\,\mathrm{s})^2} = 3{,}9\times10^{14}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}.}$$
   Grâce à l'expérience de Cavendish, la valeur de $\mathcal{G}$ nous permet d'obtenir M_T
   $$M_T = \frac{\mu}{\mathcal{G}}.$$
   A.N.
   $$\boxed{M_T = \frac{39\times10^{13}\,\mathrm{m^3\cdot s^{-2}}}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2\cdot kg^{-2}}} = 5{,}8\times10^{24}\,\mathrm{kg}.}$$

On peut alors obtenir la masse volumique de la Terre

$$\rho = \frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}$$

A.N.

$$\boxed{\rho = \frac{5{,}8\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{\frac{4}{3}\pi\,(6{,}38\times10^{6}\,\mathrm{m})^3} = 5{,}3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}.}$$

4. **Donner** une autre méthode pour déterminer μ en utilisant la valeur du champ de gravité terrestre à la surface du globe g.
   On peut également trouver μ en identifiant le poids à la force d'interaction gravitationnelle à la surface de la Terre

$$-mg = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T^2}$$

soit

$$g = \mathcal{G}\frac{M_T}{R_T^2}$$

$$\mu = \mathcal{G}M_T = gR_T^2$$

A.N.

$$\boxed{\mu = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}\times\left(6{,}38\times10^{6}\,\mathrm{m}\right)^2 = 4{,}0\times10^{14}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}.}$$

Exercice II.4. Vitesse d'un satellite à son périgée ★ ★

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1,1.10^3$ kg. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200$ km au périgée et $d_A = 5,9.10^3$ km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche de la Terre et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée : $v_A = 3,5.10^2$ m.s^{-1}.

1. **Faire un schéma** de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.
   Le problème est schématisé ci-dessous.

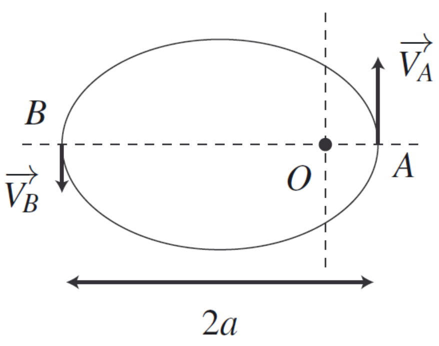

Figure 1 – Schéma du problème.

2. **Déterminer** le demi-grand axe a de la trajectoire.
D'après le schéma le demi-grand axe a est

$$a = \frac{d_P + d_A + 2R_T}{2}.$$

A.N.

$$\boxed{a = \frac{200\,\mathrm{km} + 5{,}9\times 10^3\,\mathrm{km} + 2\times 6{,}38\times 10^3\,\mathrm{km}}{2} = 9430\,\mathrm{km}.}$$

3. Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon ρ_0, **exprimer** l'énergie mécanique du satellite en fonction de $\mathcal{G}$, m, M_T et ρ_0. On généralise ce résultat aux trajectoires elliptiques en identifiant le rayon ρ_0 au demi-grand axe a.
Dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon ρ_0, le vecteur position, la vitesse et l'accélération d'un satellite sont

$$\overrightarrow{OM} = \rho_0 \overrightarrow{u}_\rho \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = \rho_0 \dot{\theta} \overrightarrow{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = -\rho_0 \dot{\theta}^2 \overrightarrow{u}_\rho.$$

La seule force exercé sur le satellite est la force gravitationnelle, le PFD donne

$$m\overrightarrow{a} = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0^2}\overrightarrow{u}_\rho$$

soit

$$-m\rho_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0^2}\overrightarrow{u}_\rho$$

donc

$$m\rho_0^2\dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}.$$

L'énergie mécanique du satellite est

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

avec $\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}$ l'énergie potentielle de la force gravitationnelle. Il vient que

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}$$

soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\rho_0^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}$$

or, on a vu que

$$m\rho_0^2\dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}$$

donc

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0} - \mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}$$

soit

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{mM_T}{\rho_0}.}$$

On peut généraliser ce résultat au demi-grand axe a d'une ellipse, soit

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{a}.$$

4. **En déduire** l'énergie mécanique.
   A.N.

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2{\cdot}kg^{-2}}\frac{1{,}1\times10^{3}\,\mathrm{kg}\times5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{9430\times10^{3}\,\mathrm{m}} = -4{,}6\times10^{10}\,\mathrm{J}.}$$

5. **Déterminer** la période du satellite.
   On peut obtenir la valeur de la période du satellite à partir de la troisième loi de Kepler, en généralisant au trajectoire elliptique

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$$

   soit

$$T = \sqrt{a^3\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}.$$

   A.N.

$$\boxed{T = \sqrt{(9430\times10^{3}\,\mathrm{m})^3\frac{4\pi^2}{6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2{\cdot}kg^{-2}}\times5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}} = 9117\,\mathrm{s} = 2{,}5\,\mathrm{h}.}$$

6. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. **Exprimer** le module du moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée.
   Au point A et P et seulement en ces points, la vitesse du satellite est perpendiculaire au vecteur position, ainsi

$$L_O(A) = m(d_P + R_T)v(A) \qquad \text{et} \qquad L_O(B) = m(d_A + R_T)v(B).$$

7. **En déduire** la vitesse du satellite à son périgée.
   Comme le mouvement est à force centrale en O, le moment cinétique par rapport à O est constant, ainsi

$$L_O(A) = L_O(B)$$

   donc

$$m(d_P + R_T)v(A) = m(d_A + R_T)v(B)$$

   soit

$$v(A) = v(B)\frac{d_A + R_T}{d_P + R_T} = v_A\frac{d_A + R_T}{d_P + R_T}$$

   avec v_A la vitesse du satellite à son apogée.
   A.N.

$$\boxed{v(A) = 3{,}5\times10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}\frac{5{,}9\times10^{3}\,\mathrm{km} + 6{,}38\times10^{3}\,\mathrm{km}}{200\,\mathrm{km} + 6{,}38\times10^{3}\,\mathrm{km}} = 6{,}5\times10^{2}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}.}$$

Exercice II.5. Énergie nécessaire pour mettre un satellite artificiel en orbite ★ ★ ★

On étudie le mouvement d'un satellite de masse m en orbite circulaire à une altitude z autour de la Terre, ainsi que le lancement d'un satellite artificiel à partir d'un point O de la surface terrestre.

1. **Déterminer** le référentiel le mieux adapté pour étudier le mouvement d'un satellite terrestre.
   Le référentiel d'étude pour ce type de mouvements est le référentiel géocentrique.

2. **Rappeler** l'expression de l'énergie potentielle gravitationnelle du satellite en orbite à une distance r du centre de la Terre. En déduire son expression en fonction de son altitude z.
L'énergie potentielle gravitationnelle du satellite de masse m en orbite à une distance r du centre de la Terre est
$$\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r}$$
comme la distance r correspond à $R_T + z$, il vient que
$$\boxed{\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T + z}.}$$

3. **Retrouver** l'expression de la vitesse en orbite à une altitude z.
Pour une orbite circulaire, les vecteur position, vitesse et accélération sont
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_\rho \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{a} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho$$
car dans ce cas r et $\dot{\theta}$ sont constants dans le cas d'une trajectoire circulaire.
Si on applique le PFD au satellite il vient que
$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_G$$
avec $\overrightarrow{F}_G$ la force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite. Il vient que
$$-mr\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_\rho = -\mathcal{G}\frac{mM_T}{r^2}\overrightarrow{u}_\rho$$
soit
$$r^2\dot{\theta}^2 = \mathcal{G}\frac{M_T}{r}.$$
Ainsi on peut rexprimer la valeur de la vitesse grâce à cette dernière relation
$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} &= r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \\ \overrightarrow{v} &= r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta \\ &= \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{r}}.\end{aligned}$$
Donc la vitesse en orbite à une altitude z est
$$\boxed{v = \sqrt{\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T + z}}.}$$

4. **En déduire** l'expression de l'énergie cinétique puis de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite sur son orbite à l'altitude z.
On peut ainsi obtenir l'énergie cinétique du satellite
$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T + z}.$$
Ainsi que l'énergie mécanique du satellite
$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}m\mathcal{G}\frac{M_T}{R_T + z} - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T + z}\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}\mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T+z}.}$$

5. **Calculer** cette énergie mécanique pour $z = 1,0.10^3$ km et $m = 6,0.10^3$ kg.
   A.N.

$$\boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2}\times 6{,}67\times 10^{-11}\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^2{\cdot}\mathrm{kg}^{-2}\times\frac{6{,}0\times 10^3\,\mathrm{kg}\times 5{,}97\times 10^{24}\,\mathrm{kg}}{6{,}38\times 10^6\,\mathrm{m}+1{,}0\times 10^6\,\mathrm{m}} = -1{,}6\times 10^{11}\,\mathrm{J}.}$$

   Pour lancer un satellite, il faut lui communiquer l'énergie $\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m0}$ où $\mathcal{E}_{m0}$ est l'énergie qu'il a au point O.
6. Dans le référentiel géocentrique, la Terre peut être assimilée à un solide en rotation autour d'un axe à une vitesse angulaire Ω. **Préciser** l'axe de rotation, **déterminer** s'il est fixe et **donner** la valeur de Ω.
   L'axe de rotation est l'axes des pôles fixe. La Terre tournant sur elle même durant une période $T = 24\,\mathrm{h}$, la vitesse angulaire de la Terre est

$$\Omega = \frac{2\pi}{T}.$$

   A.N.

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{86\,400\,\mathrm{s}} = 7{,}3\times 10^{-5}\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}.}$$

7. **En déduire** l'expression de la vitesse du point O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_G$ supposé galiléen en fonction de Ω, du rayon terrestre R_T et de la latitude du lieu λ.
   Le point O est situé sur la surface de la Terre à une latitude λ qui correspond à l'angle entre la droite passant par le centre de la Terre et O et la droite passant par le centre de la Terre et un point de la surface au niveau de l'équateur.
   Ainsi la distance la plus courte entre le point O et l'axe de rotation de la Terre est

$$r = R_T\cos\lambda.$$

   La vitesse du point O est celle d'un objet avec une trajectoire circulaire soit

$$v = r\dot{\theta}$$

   soit

$$\boxed{v = R_T\cos\lambda\Omega.}$$

8. **Exprimer** alors l'énergie mécanique initiale $\mathcal{E}_{m0}$ du satellite posé au sol au point O.
   L'énergie mécanique du satellite posé au sol au point O est

$$\mathcal{E}_{m0} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{m0} = \frac{1}{2}mR_T^2\cos^2\lambda\Omega^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T}.}$$

9. **En déduire** les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite. Parmi les trois champs de tirs suivants **déterminer** le plus favorable.
   — Baïkonour au Kazakhstan : $\lambda = 46°$

— Cap Canaveral aux USA : $\lambda = 28,5°$
— Kourou en Guyane française : $\lambda = 5,23°$.

Les conditions les plus favorables de lancement sont celles qui correspondent à une énergie mécanique du satellite la plus importante possible. Il faut donc maximiser la vitesse

$$v = R_T \cos\lambda\Omega$$

donc minimiser la latitude λ. Ainsi, le champ de tir le plus favorable est la base de Kourou en Guyane française.

10. **Calculer** l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse depuis Kourou.
L'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite depuis Kourou est la différence entre l'énergie mécanique du satellite en orbite $\mathcal{E}_m$ et l'énergie mécanique du satellite au sol $\mathcal{E}_{m0}$, soit

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m0}$$

soit

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_m - \frac{1}{2}mR_T^2\cos^2\lambda\Omega^2 + \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T}.$$

A.N.

$$\Delta\mathcal{E}_m = -1{,}6\times10^{11}\,\mathrm{J} - \frac{1}{2}\times6{,}0\times10^3\,\mathrm{kg}\times\left(6{,}38\times10^6\,\mathrm{m}\right)^2\times\cos^2(5{,}23°)\times\left(7{,}3\times10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\right)^2$$
$$+6{,}67\times10^{-11}\,\mathrm{N\cdot m^2{\cdot}kg^{-2}}\times\frac{6{,}0\times10^3\,\mathrm{kg}\times5{,}97\times10^{24}\,\mathrm{kg}}{6{,}38\times10^6\,\mathrm{m}} = 2{,}1\times10^{11}\,\mathrm{J}.$$

11. **Calculer** numériquement l'énergie gagnée entre Baïkonour et Kourou. **Commenter.**
L'énergie gagnée en faisant décoller un satellite à Kourou plutôt qu'à Baïkonour est la différence entre les deux différences d'énergie mécanique entre Baïkonour et Kourou

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &= \Delta\mathcal{E}_{m,B} - \Delta\mathcal{E}_{m,K}\\ &= \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_{m0,B} - \mathcal{E}_m + \mathcal{E}_{m0,K}\\ &= \mathcal{E}_{m0,K} - \mathcal{E}_{m0,B}\\ &= \frac{1}{2}mR_T^2\cos^2\lambda_K\Omega^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} - \frac{1}{2}mR_T^2\cos^2\lambda_B\Omega^2 + \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T}\end{aligned}$$

soit

$$\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}mR_T^2\Omega^2\left(\cos^2\lambda_K - \cos^2\lambda_B\right).$$

A.N.

$$\boxed{\Delta\mathcal{E} = \frac{1}{2}\times6{,}0\times10^3\,\mathrm{kg}\times\left(6{,}38\times10^6\,\mathrm{m}\right)^2\times\left(7{,}3\times10^{-5}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}\right)^2\left(\cos^2(5{,}23°)-\cos^2(46°)\right) = 3{,}3\times10^8\,\mathrm{J}.}$$

Exercice II.6. Caractéristique d'une météorite ★ ★ ★

On repère une météorite très éloignée du Soleil et on mesure sa vitesse $\overrightarrow{v_0}$. On observe que $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{u_x}$ est portée par une droite Δ, située à une distance b du centre O du Soleil. On suppose qu'à l'instant où on la repère (instant initial), la météorite est si éloignée que son énergie potentielle d'interaction gravitationnelle avec le Soleil est négligeable.

On note m la masse de la météorite, M_S celle du Soleil, R_S le rayon du Soleil et $\mathcal{G}$ la constante de gravitation universelle.

1. **Faire un schéma** de la situation initiale.
On étudie le mouvement de la météorite dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen. Cette météorite est soumise à la seule force d'attraction gravitationnelle du Soleil qui est une force newtonienne donc centrale et conservative en $1/r^2$. On réalise le schéma ci-dessous.

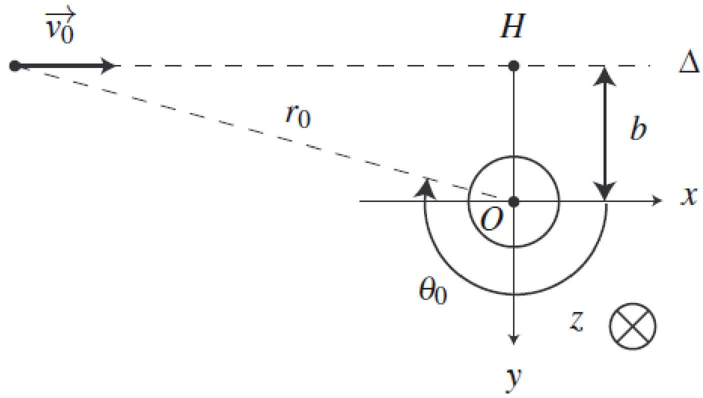

Figure 2 – Schéma du problème.

2. **Montrer** que l'énergie mécanique de la météorite est une intégrale première du mouvement. **Déterminer** sa valeur initiale.
En l'absence de frottement, le système est conservatif et son énergie mécanique est une constante du mouvement : $\mathcal{E}_m = \text{cst}$. L'énergie mécanique de la météorite vaut

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r}.$$

À l'instant initial l'énergie mécanique de la météorite est telle que

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r_0} \approx \frac{1}{2}mv_0^2}$$

car initialement la météorite est très éloigné du Soleil, donc ne subit quasiment pas son influence.

3. **Montrer** que le moment cinétique par rapport à O de la météorite est une intégrale première du mouvement. **Déterminer** sa valeur initiale.
On applique le théorème du moment cinétique par rapport à O de la météorite soumis à l'attraction gravitationnelle du Soleil qui est une force centrale. On obtient

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{F}_i\right)$$

et comme la seule force exercée sur la météorite est la force de gravitation du Soleil centrale en O, la force a un bras de levier nul, donc son moment est nul, ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{L}_O}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0}.$$

Le moment cinétique par rapport à O de la météorite est constant, on dit que c'est une intégrale première du mouvement.
Sa valeur initiale est

$$\overrightarrow{L}_O(t=0) = m\overrightarrow{OM_0} \wedge \overrightarrow{v}_0 = m\left(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_0}\right) \wedge \overrightarrow{v}_0 = m\overrightarrow{OH} \wedge \overrightarrow{v}_0 = -mb\overrightarrow{u}_y \wedge v_0\overrightarrow{u}_x$$

soit

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O(t=0) = mbv_0\overrightarrow{u}_z.}$$

4. **Rappeler** les conséquences de la conservation du moment cinétique.
   Le moment cinétique en O étant conservé, le mouvement est situé dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{L}_O$ c'est-à-dire ici dans le plan (Oxy) et vérifie la loi des aires.
5. **Définir** les coordonnées adaptées et établir l'expression du moment cinétique à un instant t quelconque.
   On définit le système de coordonnées cylindro-polaire sur la figure ci-dessus. Le mouvement de M étant situé dans le plan Oxy, la coordonnée radiale r du système sphérique correspond à la coordonnée radiale ρ du système cylindro-polaire. Dans ces conditions, il vient que

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{u}_\rho \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{v} = \dot{r}\overrightarrow{u}_\rho + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta.$$

   Il vient que

$$\overrightarrow{L}_O(t) = m\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{v} = m\begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r^2\dot{\theta} \end{pmatrix}$$

   soit

$$\boxed{\overrightarrow{L}_O(t) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u}_z.}$$

6. **Établir** l'expression de l'énergie potentielle effective.
   On écrit ensuite l'énergie mécanique à l'instant t

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \\ &= \frac{1}{2}m\left(\dot{r}\overrightarrow{u}_\rho + r\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta\right)^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r} \\ &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,eff}\end{aligned}$$

   avec l'énergie potentielle effective

$$\mathcal{E}_{p,eff} = \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r}.$$

7. **Exprimer** cette énergie potentielle effective en fonction de m, v_0, b, du produit $\mathcal{G}M_S$ et de la distance r.
   On constate que

$$mr^2\dot{\theta}^2 = m^2r^4\dot{\theta}^2\frac{1}{mr^2}$$

   soit

$$mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{\overrightarrow{L}_O(t)^2}{mr^2}$$

   et comme le moment cinétique est constant, il vient que

$$\overrightarrow{L}_O(t)^2 = \overrightarrow{L}_O(t=0)^2 = m^2b^2v_0^2$$

   donc

$$mr^2\dot{\theta}^2 = \frac{m^2b^2v_0^2}{mr^2} = m\frac{b^2v_0^2}{r^2}$$

et l'énergie effective est alors

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,eff} = \frac{1}{2}m\frac{b^2v_0^2}{r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r}.}$$

8. **Tracer** l'allure de la courbe d'énergie potentielle effective et en déduire la nature bornée ou non de la trajectoire de la météorite.
On trace l'allure de $\mathcal{E}_{p,eff}$. L'énergie mécanique est positive ; la météorite est dans un état de diffusion ; sa trajectoire n'est pas bornée.

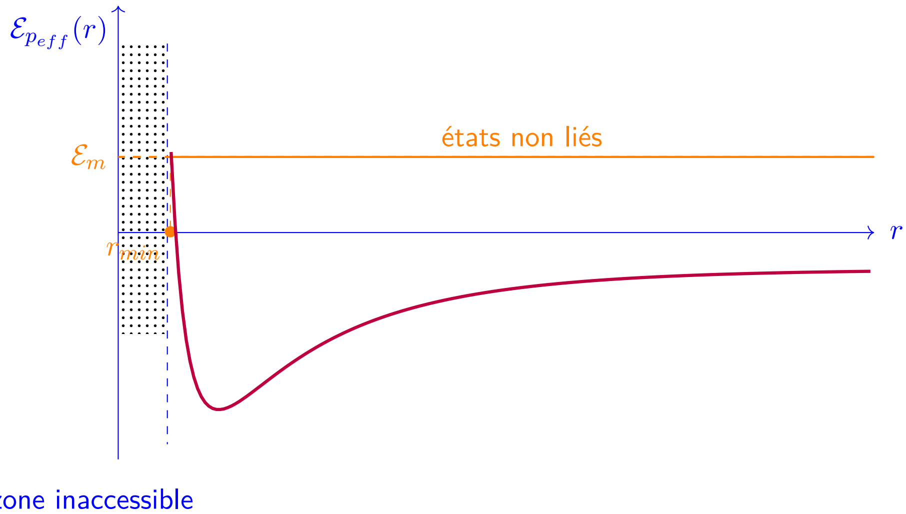

Figure 3 – Énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p_{eff}}(\rho)$ de la météorite avec une énergie mécanique $\mathcal{E}_m > 0$.

9. **Déterminer** la distance minimale d'approche r_{min} en fonction de v_0, b et du produit $\mathcal{G}M_S$.
D'après le schéma précédent, la distance minimale d'approche r_{min} est atteinte lorsque l'énergie potentielle égalise l'énergie mécanique, soit

$$\mathcal{E}_{p_{eff}}(r_{min}) = \mathcal{E}_m$$
$$\frac{1}{2}m\frac{b^2v_0^2}{r_{min}^2} - \mathcal{G}\frac{mM_S}{r_{min}} = \frac{1}{2}mv_0^2$$

soit

$$r_{min}^2 + r_{min}2\mathcal{G}\frac{M_S}{v_0^2} - b^2 = 0$$

on reconnaît un polynôme de deuxième ordre dont seule la racine positive est solution du problème, soit

$$\boxed{r_{min} = b\left(-\mathcal{G}\frac{M_S}{bv_0^2} + \sqrt{\left(\mathcal{G}\frac{M_S}{bv_0^2}\right) + 1}\right).}$$

10. **Déterminer** la condition sur r_{min} pour laquelle la météorite n'ira pas toucher la surface du Soleil.
Pour que la météorite ne touche pas la surface du Soleil, il faut que la distance minimale soit supérieure au rayon du Soleil, soit $r_{min} > R_S$.