

DS 5 - signal sinusoïdal, filtrage, rotation d'un objet ponctuel et mouvements dans un champ de gravitation newtonien

Durée : 4h

Indications

- Le sujet est divisé en **3 parties et sous-parties indépendantes**.
- Les calculatrices **sont interdites**.
- Une absence d'unité non justifiée à la fin d'une application numérique **ne comptera aucun point**.
- Indiquer clairement le numéro de la question, aérer la copie et encadrer vos résultats afin de **faciliter le travail du correcteur**.

Données

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)] \quad 10^{-1.25} \approx 0,056 \quad \left(\frac{80}{3.6}\right)^2 \approx 5 \times 10^2 \quad (80 \times 3.6)^2 \approx 8 \times 10^4.$$

1 Toboggan aquatique

Adapté du concours EPITA-IPSA-ESME - MP, MPI, PC, PT et TSI (2023)

Un toboggan aquatique est un type de toboggan dans lequel un mince filet d'eau assure un glissement du passager avec de faibles frottements. Il en existe de diverses formes, et cette première partie propose d'étudier leur dimensionnement.

1.1 Étude d'un toboggan rectiligne (15 pt)

On s'intéresse à un toboggan rectiligne, comme celui de la Figure 1. La différence de hauteur entre le point de départ et le point d'arrivée est notée h , et le passager démarre en haut (au point A) avec une vitesse initiale nulle. On note g l'intensité de la pesanteur et m la masse du passager. On note v_B la vitesse du passager à l'arrivée (au point B).

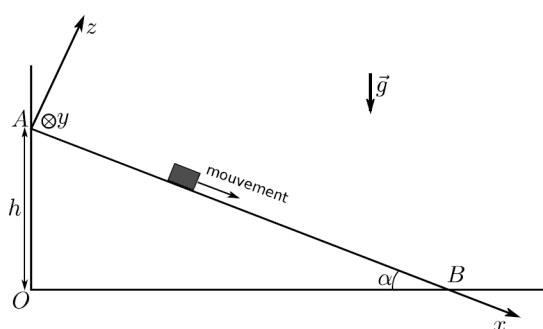


Figure 1: Gauche : photographie du toboggan "le géant" du parc de Wavelsland. Pour ce toboggan, qui est le plus haut de France $h = 33\text{ m}$ et $\alpha \approx 45^\circ$. Droite : modélisation retenue pour l'étude du toboggan.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

1. En utilisant une approche énergétique, exprimer la vitesse atteinte au point B par le passager, en fonction de h et de g .

(Énoncé théorème + expression v_B : 1 pt +1 pt.)

Les forces de frottement n'étant pas considérés, en utilisant le théorème de l'énergie mécanique, il vient que

$$\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_i^{\text{NC}}) = 0$$

donc que l'énergie mécanique E_m du passager se conserve au cours du mouvement. Donc $E_m(A) = E_m(B)$, soit

$$\begin{aligned} E_c(A) + E_p(A) &= E_c(B) + E_p(B) \\ \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B \\ \frac{1}{2}m \times 0 + mgh &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mg \times 0 \end{aligned}$$

soit

$$v_B = \sqrt{2gh}.$$

On admet que l'application numérique donne $v_B = 92 \text{ km/h}$.

2. Ce résultat dépend-il de la forme du toboggan, à h constant?

(1 pt)

Dans ce cas-ci, l'énergie mécanique se conserve : sa variation ne dépend pas du chemin parcouru par le passager, comme cela aurait été le cas si on avait tenu compte des forces de frottement. **Le résultat ne dépend donc pas de la forme du toboggan.**

On prend maintenant en compte les frottements. On utilisera le repère cartésien indiqué sur la Figure 1 (droite), avec $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ les vecteurs unitaires de la base. Le mouvement a lieu selon $\vec{e}_x$ seulement.

La résultante exercée par le toboggan sur le passager s'écrit :

$$\vec{R} = N\vec{e}_z - T\vec{e}_x,$$

où $T > 0$ représente les frottements. On utilise la loi de Coulomb : tout au long du mouvement, on a la relation $T = \mu \times N$ avec μ une constante positive appelée coefficient de frottement. On suppose l'inclinaison du toboggan suffisante pour qu'il y ait mouvement.

3. À l'aide du principe fondamental de la dynamique (auss appelé seconde loi de Newton), établir l'expression de N en fonction de m , g , et de l'angle α .

(Énoncé PFD + projection poids : 1 pt +1 pt.)

D'après le PFD appliqué au passager dans le référentiel terrestre supposé galiléen il vient que

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} \\ m\vec{a} &= P\sin\alpha\vec{e}_x - P\cos\alpha\vec{e}_z + N\vec{e}_z - T\vec{e}_x. \end{aligned}$$

Le passager n'ayant aucun mouvement le long de l'axe Oz il vient que $a_z = 0$, donc en projetant le PFD sur les axes Ox et Oz il vient que

$$\begin{aligned} ma_x &= P\sin\alpha - T \\ ma_z &= -P\cos\alpha + N \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} ma_x &= mg \sin \alpha - T \\ 0 &= -mg \cos \alpha + N. \end{aligned}$$

Ainsi, en utilisant la deuxième relation

$$N = mg \cos \alpha.$$

4. Exprimer le travail de la force $\vec{R}$, pour le mouvement entre les points A et B, d'abord en fonction de la longueur AB et de T. Dans un second temps, l'exprimer en fonction de μ , h , m , g et de l'angle α .

(Définition W + calculs : 1 pt +1 pt)

Le travail de la force $\vec{R}$ pour le mouvement entre les points A et B est telle que

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{R}) &= \int_A^B \vec{R} \cdot d\vec{x} \\ W_{AB}(\vec{R}) &= \int_A^B -T dx \end{aligned}$$

soit

$$W_{AB}(\vec{R}) = -T \times AB.$$

D'après la relation donnée dans l'énoncé, $T = \mu N$, ainsi

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{R}) &= -\mu N \times AB \\ W_{AB}(\vec{R}) &= -\mu mg \cos \alpha \times AB. \end{aligned}$$

De plus, comme $AB = \frac{h}{\sin \alpha}$, il vient que

$$W_{AB}(\vec{R}) = -\mu mg \cos \alpha \frac{h}{\sin \alpha}$$

soit

$$W_{AB}(\vec{R}) = -\frac{\mu hmg}{\tan \alpha}.$$

5. À l'aide de ce qui précède, établir l'expression de la vitesse atteinte par le passager en B, en fonction de μ , h , g et de l'angle α .

(Théorème énoncé 1 pt + calculs et expression finale 2 pt)

D'après le théorème de l'énergie cinétique il vient que

$$\begin{aligned} \Delta E_c &= W_{AB}(\vec{R}) + W_{AB}(\vec{P}) \\ E_c(B) - E_c(A) &= -\frac{\mu hmg}{\tan \alpha} - \Delta E_p \\ \frac{1}{2}mv_B^2 - 0 &= -\frac{\mu hmg}{\tan \alpha} - (mgz_B - mgz_A) \\ \frac{1}{2}mv_B^2 &= -\frac{\mu hmg}{\tan \alpha} + mgh \end{aligned}$$

soit

$$v_B = \sqrt{2gh \left(1 - \frac{\mu}{\tan \alpha}\right)}.$$

6. La Figure 2 montre un tracé de l'expression précédente de v_B en fonction de μ . La direction du parc d'attraction indique que la vitesse maximale atteinte dans son toboggan est de 80 km/h. En déduire une estimation de la valeur du coefficient de frottement passager-toboggan.

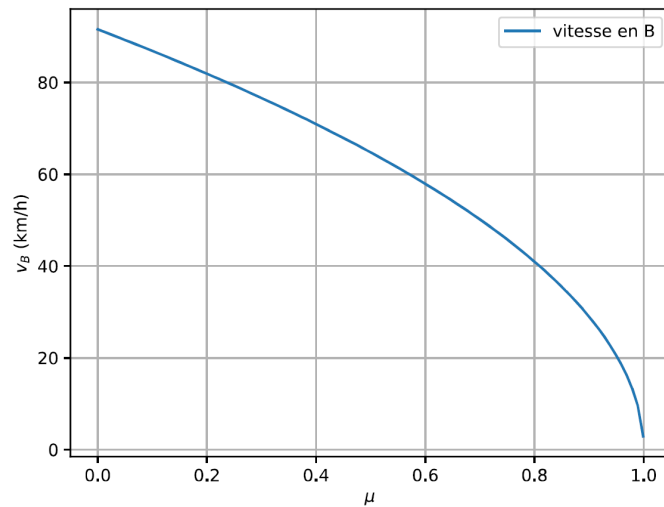


Figure 2: Tracé de l'expression de v_B obtenue dans l'énoncé en fonction du coefficient de frottement μ , pour $\alpha = 45^\circ$.

(1 pt)

D'après le tracé on peut estimer la valeur de μ , soit

$$\mu \approx 0,25.$$

En bas du toboggan se trouve une longue piste horizontale, dans laquelle le passager va ralentir jusqu'à atteindre une vitesse nulle. On souhaite dimensionner la longueur de cette piste.

7. À l'aide des données précédentes et d'un raisonnement énergétique, indiquer quelle doit être la longueur L de la piste. On attend une expression et une valeur numérique.

(Théorème 1 pt + expression L 1 pt + AN 1 pt)

Si on considère que la piste horizontale est constituée du même matériau que le toboggan, et a donc le même coefficient de frottement μ . Dans ce cas, une nouvelle application du PFD donne

$$ma_{x'} = -T$$

$$ma_{z'} = -P + N$$

avec Ox' et Oz' les axes parallèles et perpendiculaires au plan horizontal. Ainsi, le passager ne se déplaçant que sur le plan horizontal, il vient que

$$ma_{x'} = -T$$

$$0 = -P + N$$

soit, d'après la dernière relation $N = mg$.

En utilisant le théorème de l'énergie cinétique de nouveau

$$\Delta E_c = W_{BC}(\vec{R}) + W_{BC}(\vec{P})$$

$$E_c(C) - E_c(B) = \int_B^C \vec{R} \cdot d\vec{x}' - \Delta E_p$$

$$0 - E_c(B) = \int_B^C -T dx' - (mgz_C - mgz_B)$$

$$-E_c(B) = -TL - 0$$

$$L = \frac{E_c}{T}$$

soit, en utilisant de nouveau la relation $T = \mu \times N$, soit ici $T = \mu \times mg$

$$L = \frac{mv_B^2}{2\mu mg}$$

$$L = \frac{v_B^2}{2\mu g}.$$

A.N.

$$L \approx \frac{(80 \text{ km/h})^2}{2 \times 0,25 \times 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = \frac{\left(\frac{80 \times 10 \times 10^3 \text{ m}}{3,6 \times 10^3 \text{ s}}\right)^2}{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} \approx \frac{5 \times 10^2 \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2}}{5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 100 \text{ m}.$$

1.2 Étude d'un virage (19 pt)

On s'intéresse maintenant à un toboggan possédant un virage. Il est d'abord nécessaire d'établir quelques résultats préliminaires.

1.2.1 Préliminaire : étude des oscillations dans une cuvette

Cette sous-partie est indépendante du reste.

On considère une masse m (point M) astreinte à glisser dans une cuvette de rayon a . Le mouvement a lieu dans le plan Oxy de la Figure 3. On néglige tout frottement. On note $\vec{g}$ le vecteur pesanteur et g sa norme. On utilise les coordonnées polaires représentées sur la Figure 3, avec les vecteurs unitaires $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

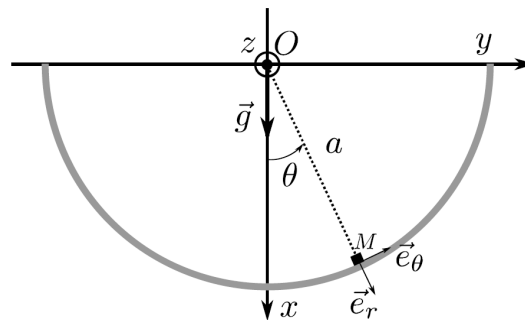


Figure 3: Le point M glisse sans frottement le long d'un support cylindrique (arc de cercle grise). Il n'y a pas de mouvement selon Oz .

8. Donner l'expression du moment cinétique L_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz , en fonction de m , a et $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$.
(Définition L_{Oz} 1 pt + expression finale 1 pt.)

L'expression du moment cinétique L_{Oz} de la masse m selon l'axe Oz est

$$L_{Oz} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_z$$

$$L_{Oz} = (\vec{OM} \wedge m \vec{v}) \cdot \vec{e}_z.$$

Le vecteur position est tel que $\vec{OM} = a \vec{e}_r$, en dérivant on obtient le vecteur vitesse $\vec{v} = a \dot{\theta} \vec{e}_\theta$, la coordonnée radiale a étant constante. Ainsi

$$L_{Oz} = (a \vec{e}_r \wedge m a \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \cdot \vec{e}_z$$

$$L_{Oz} = m a^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z$$

soit

$$L_{Oz} = m a^2 \dot{\theta}.$$

9. Donner les expressions du moment du poids et du moment de la réaction du support par rapport à l'axe Oz , en fonction de m , g , a et θ .

(2 pt + 1 pt)

Le moment du poids est défini tel que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\vec{P}) &= (\vec{OM} \wedge \vec{P}) \cdot \vec{e}_z \\ &= (a \vec{e}_r \wedge mg (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)) \cdot \vec{e}_z \\ &= (a \vec{e}_r \wedge mg (\cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta)) \cdot \vec{e}_z \\ &= -amg \sin \theta \vec{e}_z \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

soit

$$\mathcal{M}(\vec{P}) = -amg \sin \theta.$$

Le moment de la réaction du support est défini tel que

$$\begin{aligned}\mathcal{M}(\vec{R}) &= (\vec{OM} \wedge \vec{R}) \cdot \vec{e}_z \\ &= (a \vec{e}_r \wedge (N \vec{e}_r - T \vec{e}_\theta)) \cdot \vec{e}_z\end{aligned}$$

Comme on néglige tout frottement $T = 0$, donc

$$\mathcal{M}(\vec{R}) = (a \vec{e}_r \wedge N \vec{e}_r) \cdot \vec{e}_z$$

soit

$$\mathcal{M}(\vec{R}) = 0.$$

10. En utilisant le théorème du moment cinétique, établir une équation différentielle qui porte sur $\theta(t)$.

(Énoncé théorème 1 pt + équation finale 1 pt.)

D'après le théorème du moment cinétique, il vient que

$$\frac{dL_{Oz}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}(\vec{F}_i)$$

ainsi, ici il vient que

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(ma^2\dot{\theta}) &= -amg \sin \theta \\ ma^2\ddot{\theta} &= -amg \sin \theta\end{aligned}$$

soit

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{a} \sin \theta.$$

11. Proposer une approximation qui permet de résoudre cette équation.

(1 pt + 1 pt + 1 pt)

Nous pouvons linéariser l'équation différentielle précédente en supposant que l'amplitude des oscillations faibles. Ainsi

$$\ddot{\theta} \approx -\frac{g}{a}\theta.$$

On reconnait alors l'équation caractéristique d'un oscillateur harmonique, dont la solution générale est

$$\theta(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

avec A et B deux constantes d'intégration et $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ la pulsation propre du système.

Comme à $t = 0$, $\theta(0) = \theta_0$, il vient que

$$\theta(0) = A = \theta_0.$$

Comme à $t = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$, il vient que

$$\dot{\theta}(0) = \omega B = 0.$$

Ainsi

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega t).$$

Sous cette hypothèse, résoudre l'équation. On supposera qu'initialement $\theta(0) = \theta_0 > 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$.

12. Tracer l'allure de la solution $\theta(t)$. On fera apparaître les valeurs maximales et minimales atteintes.

(1 pt)

L'allure de $\theta(t)$ est celle d'un cosinus de valeur maximale θ_0 et de valeur minimale $-\theta_0$.

13. Toujours sous l'hypothèse précédente, donner l'expression de la période des oscillations en fonction de a et de g .

(1 pt)

D'après la définition de la période propre T_0 il vient que

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Ainsi

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{a}{g}}.$$

1.2.2 Retour au cas du virage dans le toboggan

On étudie un cas où le passager du toboggan arrive avec une vitesse v_0 à l'entrée d'un virage de rayon R_0 . Le toboggan a une forme de gouttière, et l'effet du virage va être de faire monter le passager le long de la gouttière. La question est de savoir jusqu'où il va monter : il faut en effet dimensionner la gouttière pour que le passager ne soit pas éjecté !

On suppose le virage horizontal. On repère par θ la position angulaire du passager dans un plan Oxy représenté Figure 4. On se place dans l'approximation où ce plan Oxy , qui se déplace avec le passager, le fait à une vitesse v_0 qui reste constante.

Les informations importantes pour la résolution du problème sont les suivantes :

- Il est possible de mener l'étude dans le plan Oxy uniquement (Figure 4, droite).
- Le référentiel dans lequel le plan Oxy est fixe peut être considéré comme galiléen, à condition d'ajouter au bilan des forces qui s'exercent sur le passager une force supplémentaire (parfois appelée "force centrifuge") qui s'écrit $\vec{F} = \frac{mv_0^2}{R_0} \vec{e}_y$.

- Dans le référentiel du plan Oxy , alors considéré galiléen, le passager est donc soumis à son poids $\vec{P}$, à $\vec{F}$, et à la réaction normale $\vec{N}$ du toboggan (on néglige tout frottement).

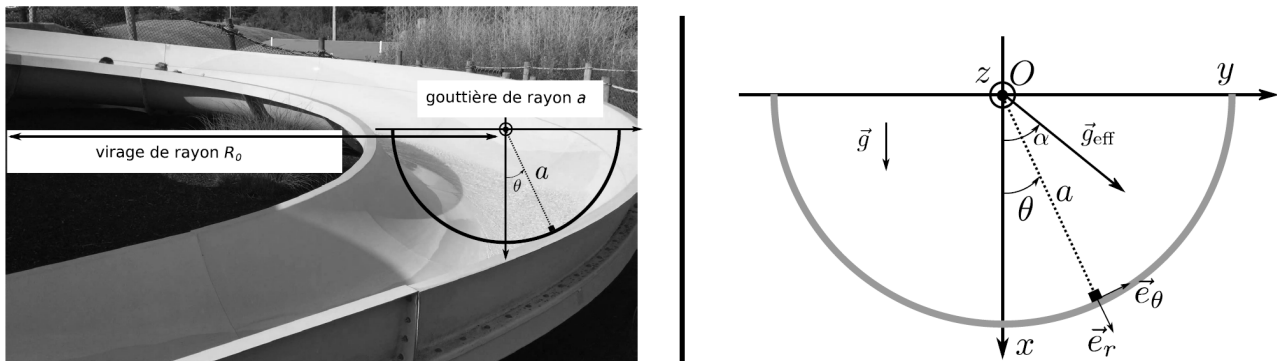


Figure 4: Gauche : photographie d'un virage. Droite : repère dans le plan de la gouttière.

14. Montrer que la somme des forces qui s'exercent sur le passager s'écrit $\vec{P} + \vec{F} + \vec{N} = m\vec{g}_{\text{eff}} + \vec{N}$, avec $\vec{g}_{\text{eff}}$ une pesanteur "effective" dont on donnera la norme en fonction de g , R_0 et v_0 .

(2 pt)

En effectuant le bilan des forces s'appliquant sur le passager dans le référentiel supposé galiléen dans lequel le plan Oxy est fixe, il vient que

$$\begin{aligned}\sum_i \vec{F}_i &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \\ &= m\vec{g} + N\vec{e}_r - T\vec{e}_\theta - \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y\end{aligned}$$

et en supposant toujours qu'il n'y a pas de frottement, soit $T = 0$, il vient que

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{g} + N\vec{e}_r - \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y.$$

On peut identifier le terme $m\vec{g}_{\text{eff}}$ à

$$\begin{aligned}m\vec{g}_{\text{eff}} &= m\vec{g} + \frac{mv_0^2}{R_0}\vec{e}_y \\ m\vec{g}_{\text{eff}} &= m\left(g\vec{e}_x + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_y\right).\end{aligned}$$

Ainsi il vient que

$$\vec{g}_{\text{eff}} = g\vec{e}_x + \frac{v_0^2}{R_0}\vec{e}_y.$$

15. Donner également l'expression de l'angle α : entre $\vec{g}_{\text{eff}}$ et l'axe Ox , en fonction de g , R_0 et v_0 .

(2 pt)

L'angle α est obtenu en étudiant la composante selon l'axe Ox (côté adjacent) et la composante selon l'axe Oy (côté opposé) de l'accélération de pesanteur effective, soit

$$\tan \alpha = \frac{v_0^2}{gR_0}$$

soit

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_0^2}{gR_0}\right).$$

Par exemple, si $v_0 = 25 \text{ km/h}$ et $R_0 = 4 \text{ m}$, on obtient $\|\vec{g}_{\text{eff}}\| = 15,5 \text{ m/s}^2$ et $\alpha = 51^\circ$. On se place dans ce cas dans la suite.

16. Le passager entre dans le virage avec $\theta(0) = 0$. En utilisant une analogie avec ce qui a été vu dans la sous partie 1.2.1, indiquer entre quelles valeurs extrêmes va varier θ dans la suite du mouvement. Il n'est pas nécessaire de faire de calculs compliqués pour répondre à cette question.

Conclure alors sur le dimensionnement de la gouttière dans ce cas ci.

(2 pt + 1 pt)

Le problème est le même que dans la sous partie 1.2.1, mise à part que l'accélération de pesanteur qui a été remplacée par une accélération de pesanteur effective. On peut voir une identité avec le problème précédent si on considère que l'angle α devient alors l'origine des coordonnées angulaires.

Ainsi le passager arrive avec une amplitude angulaire de $|\theta(0) - \alpha| = \alpha$. Ayant affaire à un oscillateur harmonique, il va donc osciller entre $\theta(0) = 0$ et $\theta_{\text{max}} = 2\alpha$ (on a bien une amplitude pic à pic de 2α).

Ainsi cette valeur de 2α nous permet de dimensionner le toboggan : il doit aller jusqu'à $2 \times 51^\circ = 102^\circ$.

2 Détecteur de wagon

Adapté du concours EPITA-IPSA-ESME - MP, MPI, PC, PT et TSI (2023)

Dans les attractions qui utilisent des wagons, il est parfois nécessaire de détecter le passage d'un wagon à un endroit donné. Ceci peut se faire à l'aide d'un capteur inductif, que nous étudions dans cette partie. Sauf pour la toute dernière, les sous-parties de ce problème peuvent être traitées indépendamment.

2.1 Étude d'un circuit RLC (14 pt)

On étudie le circuit RLC série représenté Figure 7. Pour $t < 0$ le circuit est ouvert et le condensateur est chargé à la tension $U_0 > 0$. À $t = 0$ l'interrupteur est fermé. On étudie l'évolution de la tension $u_c(t)$ bornes du condensateur Figure 6.

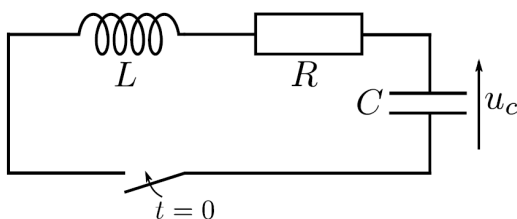


Figure 5: Circuit RLC étudié dans cette sous-partie.

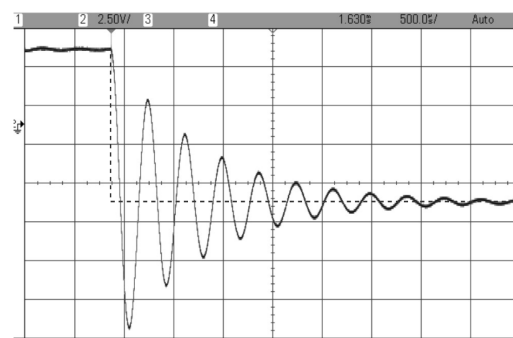


Figure 6: Relevé expérimental de la tension $u_c(t)$.

17. Démontrer que $u(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\ddot{u}_c + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_c + \omega_0^2 u_c = 0. \quad (1)$$

On donnera les expressions de ω_0 et de Q en fonction de R , L et C .

(2 pt démo équation + 1 pt pour ω_0 et Q .)

À partir de la loi des mailles, la loi de la bobine, la loi d'Ohm, il vient que

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0.$$

D'après la loi du condensateur il vient que

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\ddot{u}_C + \frac{R}{L} \dot{u}_C + \frac{1}{LC} u_C = 0.$$

Ainsi $u(t)$ vérifie bien l'équation différentielle

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = 0$$

avec

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

et

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$\frac{1}{Q} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{L}$$

$$Q \sqrt{LC} = \frac{L}{R}$$

$$Q = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

soit

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

18. On se place dans le régime qui est suivi sur le relevé de la Figure 6. Qu'est-ce que ceci implique sur la valeur de Q ?

Toujours à l'aide de la Figure 6, estimer approximativement sans calculs la valeur de Q .

(1 pt +1 pt)

On observe sur la figure des oscillations qui s'atténuent, cela correspond au régime pseudo-périodique. **On peut en déduire que $Q > \frac{1}{2}$.**

On peut obtenir une valeur approximative de Q à partir du nombre d'oscillations avant le passage au régime permanent de la tension u_C . À l'aide de la figure, on peut voir que la tension atteint une valeur de 8,75 V en régime permanent. Ce dernier est atteint lorsque la tension oscille entre des valeurs de $1,05 \times 8,75 \text{ V} \approx 9,25 \text{ V}$ et $0,95 \times 8,75 \text{ V} \approx 8,25 \text{ V}$. On constate que les oscillations sont comprises entre ces deux valeurs après 7 oscillations.

Ainsi $Q \approx 7$.

19. Toujours dans le cas du régime suivi Figure 6, établir l'expression de la solution de l'équation 1. On l'exprimera en fonction de ω_0 , Q , du temps t , et de deux constantes d'intégration A et B qu'on ne cherche pas à déterminer pour l'instant.

(1 pt solution générale + 1 pt pour ω_0/Q + 1 pt pour ω)

En régime pseudo-périodique, le discriminant de l'équation différentielle est négatif, et il est tel que

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 \\ \Delta &= \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \\ \Delta &= -\omega_0^2 \left(4 - \frac{1}{Q^2} \right).\end{aligned}$$

Les racines sont donc

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

La solution de l'équation différentielle sans second membre est donc

$$u_C(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t))$$

avec la pseudo-pulsation $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$.

20. Justifier soigneusement pourquoi $u_C(0^+) = U_0$ et $i(0^+) = 0$, où i est le courant dans le circuit et où l'instant 0^+ signifie "juste après la fermeture de l'interrupteur".

(1 pt + 1pt)

Il y a continuité de la tension aux bornes du condensateur (sans quoi une discontinuité impliquerait une divergence de la puissance électrique qu'il contient). Ainsi la valeur de la tension juste avant l'ouverture de l'interrupteur est égale à sa valeur juste après, soit $u_C(0^-) = u_C(0^+)$, donc $u_C(0) = u_C(0^-) = U_0$.

De même, il y a continuité de l'intensité du courant traversant la bobine (sans quoi une discontinuité impliquerait une divergence de la puissance magnétique qu'elle contient). Ainsi la valeur de l'intensité juste avant l'ouverture de l'interrupteur, qui est nulle en régime permanent, est égale à sa valeur juste après, soit $i(0^-) = i(0^+)$, donc $i(0) = i(0^-) = 0$.

21. En déduire les expressions des constantes d'intégration A et B .

(1 pt + 1pt)

À partir de ces deux conditions initiales nous pouvons en déduire les expressions de A et B .

À $t = 0$, il vient que

$$u_C(0) = A$$

donc

$$A = U_0$$

et

$$\begin{aligned}i(0) &= C \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=0} \\ &= C \left(-\frac{\omega_0}{2Q} e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (U_0 \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) + e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} (-\omega U_0 \sin(\omega t) + \omega B \cos(\omega t)) \right) \Big|_{t=0} \\ &= C \left(-\frac{\omega_0}{2Q} U_0 + \omega B \right)\end{aligned}$$

soit

$$0 = -\frac{\omega_0}{2Q}U_0 + \omega B$$

$$B = \frac{\omega_0}{2Q\omega}U_0$$

$$B = \frac{\omega_0}{2Q\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}U_0$$

donc

$$B = \frac{U_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}.$$

22. Montrer que si Q est grand devant 1, alors on peut approximer la pseudo-période des oscillations par $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$. (2pt)

Considérons la pseudo-période T définie telle que

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}.$$

Si $Q \gg 1$ il vient que

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$$

soit

$$T \approx T_0.$$

Ce qui précède montre que le circuit RLC oscille naturellement à une fréquence qui fait intervenir l'inductance L . Le relevé de la Figure 6 montre que cette fréquence vaut $f_0 = 2660\text{Hz}$. Si l'inductance L est modifiée par le passage d'un wagon, alors la fréquence d'oscillation change. Il reste donc à obtenir un moyen de détecter un changement de fréquence.

2.2 Étude d'un multiplieur (4 pt)

On dispose du signal produit par le circuit RLC précédent. On néglige l'amortissement des oscillations (en réalité, on modifie le circuit pour annuler cet amortissement, d'une façon non étudiée ici), ce qui revient à considérer que le signal produit aux bornes de u_c est de la forme :

$$e_1(t) = U_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t].$$

Ci-dessus f_0 est la fréquence d'oscillation du circuit en l'absence de wagon, et $f_0 + \Delta f$ est ce que devient cette fréquence en présence d'un wagon.

Ce signal est envoyé à l'entrée d'un multiplieur. Sur la seconde entrée du multiplieur est envoyé un signal de référence,

$$e_2(t) = U'_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0),$$

dont la fréquence est fixe, indépendamment du passage ou non d'un wagon. Le multiplieur produit à sa sortie le signal :

$$v(t) = K e_1(t) \times e_2(t),$$

avec $K > 0$ une constante.

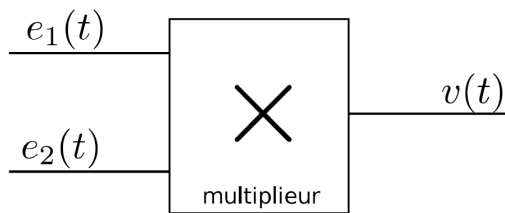


Figure 7: Multiplieur.

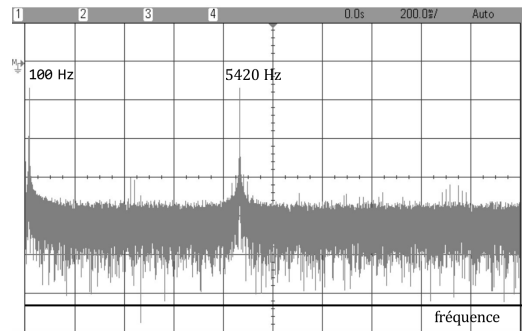


Figure 8: Relevé expérimental du spectre en amplitude de $v(t)$, en sortie du multiplieur.

23. Le spectre du signal $v(t)$ comporte deux composantes, l'une de fréquence f_1 et l'autre de fréquence f_2 . En écrivant $v(t)$ d'une autre manière, établir l'expression de f_1 et de f_2 en fonction de f_0 et de Δf .

(1 pt développement + 1 pt fréquences.)

Si on utilise les expressions données plus tôt ainsi que la formule fournie dans les données, il vient que

$$\begin{aligned} v(t) &= K e_1(t) \times e_2(t) \\ &= K U_0 \cos[2\pi(f_0 + \Delta f)t] \times U'_0 \cos(2\pi f_0 t + \varphi_0) \\ &= \frac{K U_0 U'_0}{2} (\cos[2\pi(2f_0 + \Delta f)t + \varphi_0] + \cos[2\pi\Delta f t - \varphi_0]). \end{aligned}$$

On constate que le signal $v(t)$ contient deux fréquences $f_1 = \Delta f$ et $f_2 = 2f_0 + \Delta f$.

24. Donner également les expressions des amplitudes de chacune des deux composantes du spectre.

(1 pt)

D'après l'expression obtenue précédemment, l'amplitude des deux composantes correspond à $\frac{K U_0 U'_0}{2}$.

25. La Figure 8 est un enregistrement du spectre en amplitude de $v(t)$. En déduire les valeurs de Δf et de f_0 dans ce cas-ci.

(1 pt)

D'après l'enregistrement la fréquence la plus basse correspond à $f_1 = \Delta f$ soit

$$\Delta f = 100 \text{ Hz}$$

et la fréquence la plus haute correspond à $f_2 = 2f_0 + \Delta f$ soit

$$f_0 = \frac{f_2 - \Delta f}{2}.$$

A.N.

$$f_0 = \frac{5420 \text{ Hz} - 100 \text{ Hz}}{2} = \frac{5320 \text{ Hz}}{2} = 2660 \text{ Hz}.$$

2.3 Filtre passe-bas (11 pt)

L'avant dernière étape est de réaliser un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante basse fréquence du signal $v(t)$. On considère ainsi le circuit de la Figure 9. On note $s(t)$ sa sortie.

On note $\underline{v}(t)$ et $\underline{s}(t)$ les grandeurs complexes associées à $v(t)$ et $s(t)$.

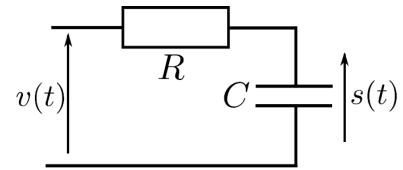


Figure 9: Circuit RC étudié dans cette sous-partie.

26. Par une étude asymptotique du circuit, montrer qu'il s'agit bien d'un filtre passe-bas.

(1 pt)

En régime sinusoïdal, pour les faibles fréquences, l'intensité traversant le condensateur est telle que

$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = j\omega C \underline{u}_C \rightarrow 0$$

car ω est faible. Donc, à faibles fréquences, le courant est quasi nul, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, ainsi, la tension à ses bornes est maximale.

Pour les hautes fréquences, l'intensité traversant le condensateur est telle que

$$\underline{i}(t) = C \frac{d\underline{u}_C}{dt} = j\omega C \underline{u}_C \rightarrow \infty$$

car ω est important. Donc, à hautes fréquences, le courant est très important, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé, ainsi, la tension à ses bornes est nulle.

Cette étude asymptotique nous permet de confirmer qu'il s'agit d'un filtre passe-bas car les signaux de fréquences faibles présentent des tensions de sortie importantes, et les signaux de fréquences importantes présentent des tensions de sortie nulle.

27. Établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{v}}$ de ce circuit, en fonction de R et de C (et de la pulsation ω du signal d'entrée).

(2 pt)

On utilise le pont diviseur de tension pour obtenir la fonction de transfert du filtre, soit

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}(t)}{\underline{v}(t)} = \frac{1}{\underline{v}(t)} \underline{v}(t) \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC}.$$

28. Établir l'expression de $|\underline{H}|$, ainsi que l'expression du déphasage $\Delta\phi$ induit par ce filtre, en fonction de R , C et ω .

(1 pt + 1 pt)

Il vient que

$$|\underline{H}| = \left| \frac{1}{1 + j\omega RC} \right| = \frac{1}{|1 + j\omega RC|}$$

soit

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 (RC)^2}}.$$

Il vient que

$$\Delta\phi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{1}{1 + j\omega RC}\right) = \arg(1) - \arg(1 + j\omega RC) = \arctan\left(\frac{0}{1}\right) - \arctan\left(\frac{\omega RC}{1}\right)$$

soit

$$\Delta\varphi = -\arctan(\omega RC).$$

29. Démontrer, en partant de l'expression de $\underline{H}$ ou de $|\underline{H}|$, que l'asymptote haute fréquence dans le diagramme de Bode en amplitude a pour pente $-20\text{dB}/\text{decade}$.

(1 pt)

Pour les hautes fréquences il vient que $\omega \gg \frac{1}{RC}$, donc $\omega RC \gg 1$, ainsi

$$|\underline{H}| \approx \frac{1}{\omega RC}.$$

Le gain en décibel asymptotique est alors tel que

$$G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = -20\log(RC) - 20\log(\omega).$$

On constate que l'asymptote à haute fréquence a bien une pente de $-20\text{dB}/\text{decade}$ (à chaque fois que ω augmente d'un facteur 10, la valeur du gain décroît de -20dB).

On donne dans la Figure 10 le diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

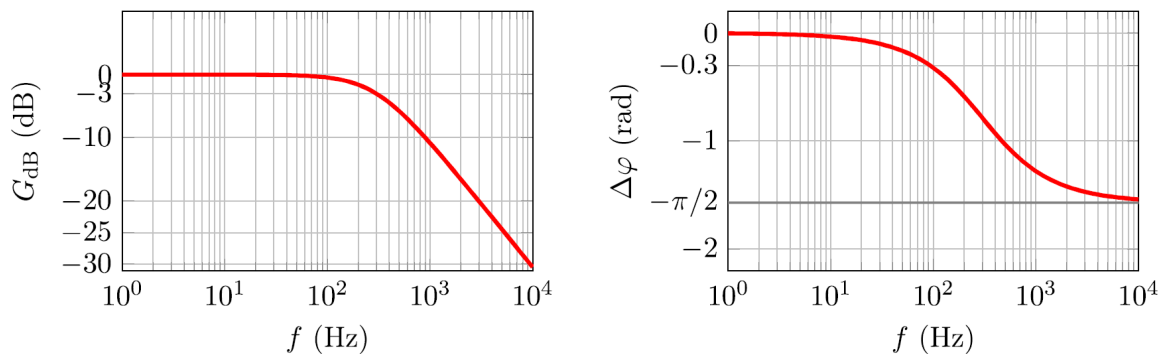


Figure 10: Diagramme de Bode en amplitude et en phase du filtre.

30. À l'aide de la Figure 10, estimer la valeur de la fréquence de coupure de ce filtre.

(1 pt)

D'après la fonction de Gain en décibel, on peut identifier la fréquence du coupure du filtre, elle correspond à la fréquence pour laquelle $G_{dB} = -3\text{dB}$, soit ici $3 \times 10^2\text{ Hz}$.

On considère en entrée du filtre le signal

$$e(t) = E_0 \cos(2\pi ft)$$

avec $E_0 = 1\text{ V}$ et $f = 100\text{ Hz}$. Pour les deux questions qui suivent, on ne raisonne pas à partir des expressions théoriques de $|\underline{H}|$ ou de $\arg(\underline{H})$, mais en utilisant la Figure 10.

31. Donner l'expression du signal de sortie qui correspond à $e(t)$ en entrée. On donnera les valeurs numériques de l'amplitude et de la phase à l'origine de ce signal de sortie.

(1 pt pour la forme générale du signal + 1 pt pour valeurs l'amplitude et la phase)

En utilisant la définition du gain linéaire et du déphasage produit par le filtre, il vient que

$$s(t) = G(f)E_0 \cos(2\pi ft + \Delta\varphi(f)).$$

D'après la figure $G(100\text{ Hz}) = 10^{G_{dB}(100\text{ Hz})/20} \approx 10^{0/20} = 1$, et $\Delta\varphi(100\text{ Hz}) = -0,3\text{ rad}$.

Ainsi

$$s(t) = 1\text{ V} \times \cos(2\pi \times 100\text{ Hz} \times t - 0,3\text{ rad}).$$

32. Même question, avec cette fois une fréquence $f = 5 \text{ kHz}$ pour le signal d'entrée (et toujours $E_0 = 1 \text{ V}$).

(1 pt pour la forme générale du signal + 1 pt pour valeurs l'amplitude et la phase)

D'après la figure $G(5 \text{ kHz}) = 10^{G_{dB}(5 \text{ kHz})/20} \approx 10^{-25/20} = 10^{-1,25} \approx 0,056$, et $\Delta\varphi(5 \text{ kHz}) = -\frac{\pi}{2}$.

Ainsi

$$s(t) = 0,056 \text{ V} \times \cos\left(2\pi \times 5 \text{ kHz} \times t - \frac{\pi}{2}\right).$$

2.4 Chaîne complète (6 pt)

Le passage d'un wagon modifie l'expression de l'inductance L du circuit RLC, qui devient $L = L_1 - \frac{M^2}{L_2}$, avec L_1 la valeur initiale de L , L_2 une inductance liée au wagon mobile et M un coefficient de couplage entre L_1 et L_2 .

La fréquence d'oscillation du circuit RLC passe alors de $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C}}$ à $f_0 + \Delta f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

33. Montrer que si $M \ll \sqrt{L_1 L_2}$, alors $\Delta f = f_0 \times \frac{M^2}{2L_1 L_2}$.

(2 pt si bien justifié, avec développement limité)

Exprimons Δf à partir des expressions données dans l'énoncé

$$\begin{aligned} \Delta f &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} - \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1C}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{C}} \left(\frac{1}{\sqrt{L}} - \frac{1}{\sqrt{L_1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{C}} \left(\frac{1}{\sqrt{L_1 - \frac{M^2}{L_2}}} - \frac{1}{\sqrt{L_1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{C}} \left(\frac{1}{\sqrt{L_1 \left(1 - \left(\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \right)^2 \right)}} - \frac{1}{\sqrt{L_1}} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \right)^2}} - 1 \right) \end{aligned}$$

or pour $M \ll \sqrt{L_1 L_2}$ on peut utiliser le développement limité $(1+x)^a \approx 1+ax$ pour $x \ll 1$. Ainsi

$$\Delta f \approx \frac{1}{2\pi\sqrt{L_1 C}} \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} \right)^2 - 1 \right)$$

soit

$$\Delta f \approx f_0 \times \frac{M^2}{2L_1 L_2}.$$

Le signal de fréquence $f_0 + \Delta f$, précédemment noté $e_1(t)$, est envoyé dans le multiplieur. La sortie $v(t)$ du multiplieur est envoyée dans le filtre passe-bas (cf. Figure 11). Le signal $e_2(t)$ est le signal de référence de fréquence f_0 .

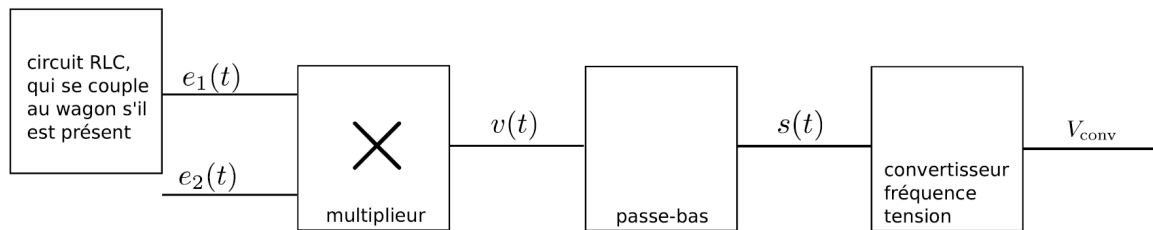


Figure 11: Chaîne complète de traitement du signal.

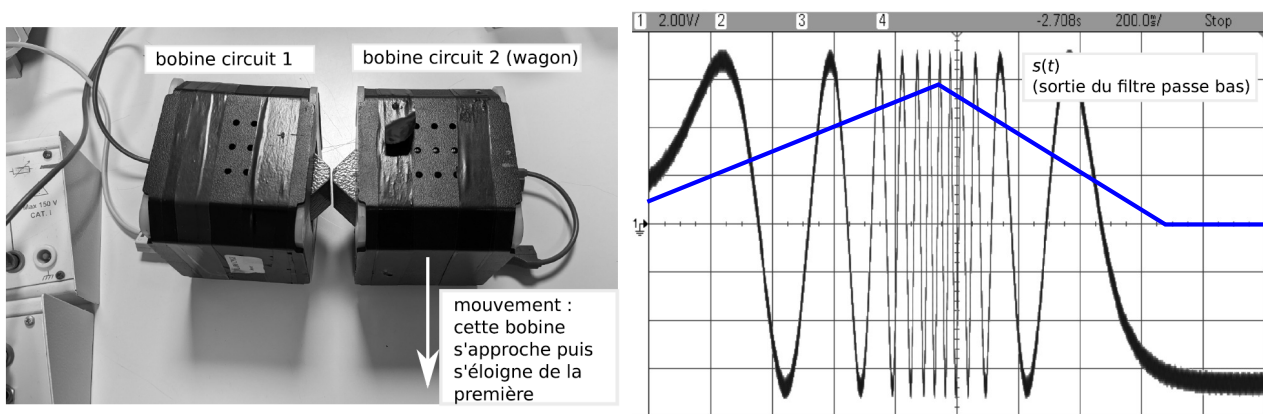
34. Indiquer alors l'expression du signal $s(t)$ observé en sortie du filtre passe-bas, en supposant que celui-ci coupe entièrement tout signal de fréquence supérieure ou égale à f_0 . On notera son amplitude S_0 sans chercher à la déterminer.

(2 pt)

Si le filtre coupe tout signal de fréquence supérieur à f_0 , alors la seule composante du signal qui ne sera pas filtrée sera la composante de fréquence Δf , ainsi le signal aura comme expression

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi \Delta f t - \varphi_0 + \Delta \varphi(\Delta f)).$$

L'écart Δf varie lors du passage du wagon. Pour simuler ceci, nous remplaçons le wagon par une bobine, que l'on fait passer devant la bobine du circuit 1 (Figure 12 à gauche). Il en résulte le signal $s(t)$ enregistré sur la Figure 12 à droite.

Figure 12: Gauche : passage de la bobine L_2 à proximité de la bobine L_1 . Droite : signal correspondant en sortie du filtre passe-bas.

Le convertisseur fréquence-tension délivre une tension V_{conv} dont la valeur est proportionnelle à la fréquence du signal envoyé sur son entrée. On note α la constante de proportionnalité.

35. Donner l'expression de cette tension en fonction, entre autre, de M .

(1 pt)

D'après les questions précédentes le signal $s(t)$ a pour fréquence Δf , or la tension V_{conv} est proportionnelle à la fréquence de $s(t)$, ainsi

$$V_{\text{conv}} = \alpha \Delta f = \alpha f_0 \frac{M^2}{2L_1 L_2}.$$

36. Conclure en traçant l'allure de $V_{\text{conv}}(t)$ lors du passage d'un wagon, sachant qu'un tel passage a pour conséquence de faire augmenter puis diminuer M .

(1 pt)

On constate que la fréquence du signal présentée sur la figure augmente puis diminue (oscillations qui se resserrent puis se détendent), ainsi la tension $V_{\text{conv}}(t)$ fera de même, comme présentée sur la Figure 12.

3 Trajectoire de la sonde Juno (22 pt)

Adapté du concours e3a - MP (2021)

Une des prouesses technologiques du siècle dernier a été de pouvoir s'échapper de la surface de la Terre afin d'envoyer hommes, satellites et instruments de mesure hors de l'atmosphère. Lancée en 2011 depuis la Terre, la sonde Juno restera en orbite autour de Jupiter jusqu'au mois de juillet 2021.

Pour libérer un objet M de masse m de l'attraction gravitationnelle terrestre, on comprend qu'il est nécessaire de le "lancer" vers l'espace avec une vitesse suffisamment importante. La vitesse de libération de la Terre v_l est précisément la vitesse minimale, évaluée dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, avec laquelle on doit lancer l'objet pour qu'il "s'échappe".

37. En appliquant le théorème de l'énergie mécanique à l'objet M entre l'instant initial (M à la surface de la Terre) et l'instant final (M à l'infini sans vitesse), déterminer la vitesse de libération v_l en fonction de $\mathcal{G}$ et d'autres grandeurs. Calculer numériquement v_l .

(Th. 1 pt + expression de v_l 1 pt + A.N. 1 pt)

L'objet M n'est soumis qu'à la force d'attraction gravitationnelle de la Terre, qu'on appelle poids lorsque les objets sont à la surface des astres. L'absence de force non conservatives implique que l'énergie mécanique se conserve, soit

$$\mathcal{E}_m = \text{cst.}$$

Calculons la à l'instant initial t_i et à l'instant final t_f

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m(t_i) &= \mathcal{E}_c(t_i) + \mathcal{E}_p(t_i) = \frac{1}{2}mv_l^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} \\ \mathcal{E}_m(t_f) &= \mathcal{E}_c(t_f) + \mathcal{E}_p(t_f) = 0\end{aligned}$$

avec v_l la vitesse de libération de l'objet, M_T et R_T la masse et le rayon de la Terre.

Comme $\mathcal{E}_m(t_i) = \mathcal{E}_m(t_f) = \text{cst}$ Il vient que

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - \mathcal{G}\frac{mM_T}{R_T} = 0$$

soit

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_T}{R_T}}.$$

A.N.

$$v_l = \sqrt{\frac{2 \times 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times 5,97 \times 10^{24} \text{ kg}}{6 \times 10^6 \text{ m}}} = 11,5 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

La sonde Juno devait, en tout, effectuer 36 révolutions complètes autour de Jupiter et achever sa mission en février 2018 mais un problème de moteur a contraint les ingénieurs à la laisser sur une orbite elliptique de 53 jours. On assimile la sonde Juno à un point matériel P de masse m soumis uniquement à la force d'interaction gravitationnelle exercée par Jupiter de masse M_J . En outre, le centre O de Jupiter est supposé immobile dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen et la sonde est repérée par le vecteur position $\vec{r} = \vec{OP}$.

38. Dans quelle circonstance est-il légitime de supposer que le centre de Jupiter est immobile ? Justifier alors l'approximation galiléenne du référentiel jupiterocentrique.

(Circonstance 1 pt + justification 1 pt)

On peut supposer le centre de Jupiter immobile par rapport au référentiel héliocentrique si la durée d'étude est très petite devant la durée de révolution de Jupiter autour du Soleil.

Ici l'étude est menée sur 53 jours alors que la durée d'une révolution de Jupiter autour du Soleil est de 12 ans. On peut donc bien utiliser l'approximation galiléenne pour le référentiel jupiterocentrique au cours de l'étude de la trajectoire de la sonde Juno.

39. En appliquant le théorème du moment cinétique dans le référentiel jupiterocentrique, montrer que le moment cinétique est constant au cours du temps. Conclure que le mouvement de la sonde est plan. Définir ce plan.

Il est donc plus judicieux de travailler en coordonnées cylindriques plutôt qu'en coordonnées sphériques. De plus, on choisit O comme étant l'origine du système de coordonnées cylindriques. Ce système de coordonnées est illustré sur la Figure 13.

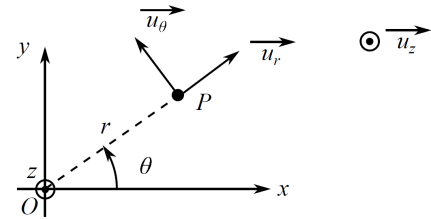


Figure 13: Paramétrage cylindrique.

(Th. 1 pt + calcul du moment des forces 1 pt + justification mouvement plan 1 pt)

On considère que la seule force exercée sur la sonde est la force d'attraction gravitationnelle due à Jupiter telle que

$$\vec{F}_{J/P} = -\mathcal{G} \frac{mM_J}{r} \vec{u}_r$$

avec r la valeur du vecteur position de la sonde dans le référentiel jupiterocentrique $\vec{OP}$, et $\vec{u}_r$ le vecteur unitaire portait par le vecteur position.

Il s'agit d'une force centrale dans le référentielle jupiterocentrique, ainsi si on calcule le moment de cette force par rapport à l'origine O de ce référentielle, il vient que

$$\mathcal{M}_O(\vec{F}_{J/P}) = \vec{OP} \wedge \vec{F}_{J/P} = OP \vec{u}_r \wedge \left(-\mathcal{G} \frac{mM_J}{r} \right) \vec{u}_r = \vec{0}.$$

Or d'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_{O(P)}}{dt} = \sum_i \mathcal{M}_O(\vec{F}_i) = \mathcal{M}_O(\vec{F}_{J/P}) = \vec{0}.$$

Donc le moment cinétique de la sonde par rapport à l'origine du référentielle jupiterocentrique est constant en norme, direction et sens au cours du temps, soit

$$\vec{L}_{O(P)} = \text{cst.}$$

Or ce moment cinétique est défini tel que

$$\vec{L}_{O(P)} = \vec{OP} \wedge m \vec{v}$$

avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de la sonde. **Comme le moment cinétique est constant en direction, cela implique que $\vec{OP}$ et $\vec{v}$ sont toujours inclus dans le plan perpendiculaire à la direction de $\vec{L}_{O(P)}$.**

40. Déterminer les expressions du vecteur position $\vec{r}$ et du vecteur vitesse $\vec{v}_{P/\mathcal{R}}$ dans la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. (2 pt)

Dans la base polaire, il vient que

$$\vec{r} = r \vec{u}_r$$

et

$$\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta.$$

41. On définit le vecteur $\vec{C}$ par $\vec{C} = \vec{L}_{O,P/\mathcal{R}}/m$. En exprimant $\vec{C}$ dans la base cylindrique orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, montrer que $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ est une constante du mouvement que l'on exprimera en fonction de $C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z$.
(Expression de $\vec{C}$ 1 pt + justification $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ constante 1 pt + expression en fonction de C 1 pt)

On calcule le moment cinétique $\vec{L}_{O,P/\mathcal{R}}$, soit

$$\vec{L}_{O,P/\mathcal{R}} = \vec{r} \wedge m\vec{v}_{P/\mathcal{R}} = m \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ 0 \end{pmatrix} = mr^2\dot{\theta}\vec{u}_z.$$

Ainsi le vecteur C est tel que

$$\vec{C} = \frac{\vec{L}_{O,P/\mathcal{R}}}{m} = r^2\dot{\theta}\vec{u}_z.$$

Comme $\vec{L}_{O,P/\mathcal{R}}$ est une constante et que la masse m de la sonde est aussi constante, il vient que $r^2\dot{\theta}$ est également une constante du mouvement, soit

$$C = \vec{C} \cdot \vec{u}_z = r^2\dot{\theta} = \text{cst.}$$

42. Déterminer l'énergie mécanique de la sonde et montrer qu'elle se met sous la forme :

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r})^2 + U_{eff}(r) \quad \text{avec} \quad U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r}.$$

Justifier que $\mathcal{E}_m$ se conserve.

(Expression énergie mécanique 1 pt + expression sous forme demandée 1 pt)

On calcule l'énergie mécanique de la sonde, soit

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m(\vec{v}_{P/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{P/\mathcal{R}}) - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r}$$

soit

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m(r^2\dot{\theta})^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r}.$$

On reconnaît l'expression de C , donc

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r}$$

soit

$$\mathcal{E}_{m,P/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r)$$

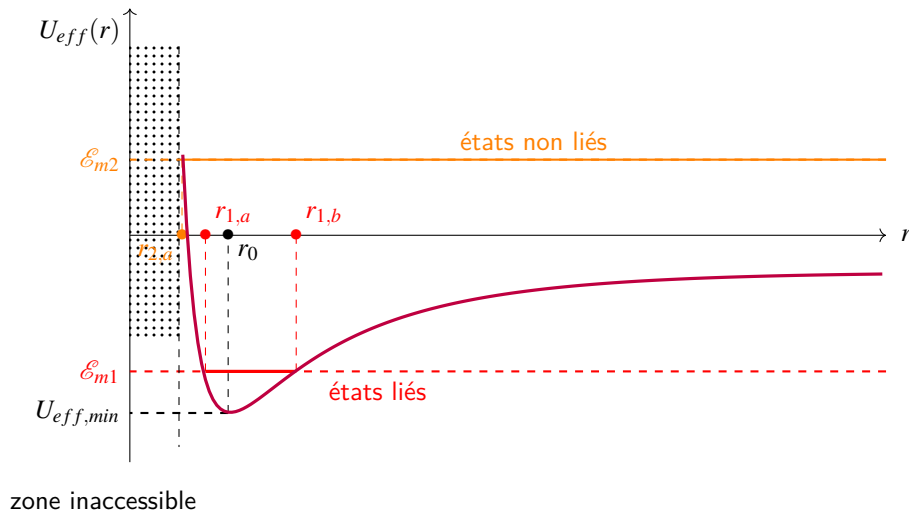
avec

$$U_{eff}(r) = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r}.$$

L'énergie mécanique se conserve car le système n'est pas soumis à des forces non conservatives.

43. Tracer l'allure de $U_{eff}(r)$ et discuter les trajectoires possibles de la sonde en fonction de $\mathcal{E}_m$. On distinguera en particulier les états qualifiés de liés de ceux dits de diffusion.

(Schéma 2 pt + trajectoires possibles 2 pt)



Pour $\mathcal{E}_m < 0$, par exemple $\mathcal{E}_{m,1}$, le rayon de de la sonde est compris entre une valeur minimale et une valeur maximale, par exemple $r_{1,a}$ et $r_{1,b}$, elle a une trajectoire elliptique et **elle est dans un état lié**.

Pour $\mathcal{E}_m \geq 0$, par exemple $\mathcal{E}_{m,2}$, le rayon de de la sonde est borné par une valeur minimale, par exemple $r_{2,a}$, et peut tendre vers $+\infty$, elle a une trajectoire hyperbolique et **elle est dans un état de diffusion**.

44. En utilisant les données, déterminer le demi-grand axe a de l'orbite elliptique de la sonde. Exprimer, sans justifier, $\mathcal{E}_m$ en fonction de a . En déduire une première équation liant la distance minimale r_{min} , la distance maximale r_{max} et a . Montrer également que r_{min} et r_{max} vérifient la relation suivante :

$$r_{min}r_{max} = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m}.$$

Ces deux relations permettent de déterminer r_{min} et r_{max} , ce que l'on ne demande pas.

(Expression de $\mathcal{E}_m$ en fonction de a 1 pt + expression de r_{min} et r_{max} 1 pt + vérification relation 1 pt)

Si la sonde suit une trajectoire elliptique dont l'un des foyer est occupé par Jupiter, alors, d'après la troisième loi de Kepler, il vient que

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_J}$$

avec $T = 53 \text{ jours} = 4,6 \times 10^6 \text{ s}$ la période de révolution de la sonde autour de Jupiter.

Ainsi

$$a = \left(\frac{\mathcal{G}M_J T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}.$$

A.N.

$$a = \left(\frac{6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \times 1,97 \times 10^{27} \text{ kg} \times (4,6 \times 10^6 \text{ s})^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} = 4,2 \times 10^9 \text{ m}.$$

Pour une trajectoire circulaire, donc de rayon r constant et de vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante également, on sait que l'énergie mécanique est telle que

$$\mathcal{E}_m = \frac{m(r^2\dot{\theta})^2}{2r^2} - \mathcal{G}\frac{mM_J}{r}.$$

Si on applique le PFD dans le cas d'une trajectoire circulaire de la sonde, soit $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{u}_r$, il vient que

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

donc

$$-mr\dot{\theta}^2 \vec{u}_r = -\mathcal{G} \frac{mM_J}{r^2} \vec{u}_r$$

il vient que

$$\frac{m(r^2\dot{\theta})^2}{2r^2} = \mathcal{G} \frac{mM_J}{2r}.$$

L'énergie mécanique est alors telle que

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{G} \frac{mM_J}{2r} - \mathcal{G} \frac{mM_J}{r} = -\mathcal{G} \frac{mM_J}{2r}.$$

On peut généraliser ce résultat obtenu dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r au cas d'un trajectoire elliptique de demi grand-axe a , soit

$$\mathcal{E}_m = -\mathcal{G} \frac{mM_J}{2a}.$$

Dans le cas d'une ellipse, le grand-axe a correspond à la somme des rayons minimal et maximal

$$2a = r_{\min} + r_{\max}.$$

On a vu plus tôt que l'énergie mécanique dans le cas d'une trajectoire elliptique était

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_J}{r}.$$

Dans le cas où r atteint un extremum, $r_{\min}$ ou $r_{\max}$, la variation de r par rapport au temps en ces points est nulle, soit $\dot{r} = 0$ en $r_{\min}$ ou $r_{\max}$. On considère ces deux cas, il vient alors que

$$\mathcal{E}_m = \frac{mC^2}{2r^2} - \mathcal{G} \frac{mM_J}{r}$$

soit

$$\mathcal{E}_m r^2 + \mathcal{G} m M_J r - \frac{mC^2}{2} = 0.$$

On reconnaît une équation du second d'ordre en r . Cette équation à deux solution $r_{\min}$ et $r_{\max}$ qui sont

$$r_{\max/\min} = \frac{-\mathcal{G} m M_J \pm \sqrt{\mathcal{G}^2 m^2 M_J^2 + 2\mathcal{E}_m m C^2}}{2\mathcal{E}_m}.$$

En multipliant $r_{\min}$ et $r_{\max}$, il vient donc que

$$r_{\min} r_{\max} = \frac{-\mathcal{G} m M_J - \sqrt{\mathcal{G}^2 m^2 M_J^2 + 2\mathcal{E}_m m C^2}}{2\mathcal{E}_m} \times \frac{-\mathcal{G} m M_J + \sqrt{\mathcal{G}^2 m^2 M_J^2 + 2\mathcal{E}_m m C^2}}{2\mathcal{E}_m}$$

$$r_{\min} r_{\max} = \frac{\mathcal{G}^2 m^2 M_J^2 - (\mathcal{G}^2 m^2 M_J^2 + 2\mathcal{E}_m m C^2)}{4\mathcal{E}_m^2}$$

soit

$$r_{\min} r_{\max} = -\frac{mC^2}{2\mathcal{E}_m}.$$

FIN DU SUJET